

Spis treści

1	WPROWADZENIE	13
1.1	Przedmiot zainteresowań mechaniki	13
1.2	Podstawowe pojęcia mechaniki	15
1.3	Podstawowe założenia mechaniki	16
1.4	Modele stosowane w mechanice	20
2	WEKTORY I RACHUNEK WEKTOROWY W MECHANICE	23
2.1	Wektory - podstawowe pojęcia i definicje	24
2.1.1	Rzut wektora na oś	27
2.1.2	Rzut wektora na prostą	31
2.1.3	Rzut wektora na płaszczyznę	32
2.1.4	Przedstawienie wektora za pomocą rzutów na osie	32
2.1.5	Współrzędne wektora	37
2.1.6	Analityczne przedstawienie wektora	37
2.1.7	Macierzowa reprezentacja wektora	38
2.2	Algebra wektorów	38
2.2.1	Dodawanie wektorów	39
2.2.2	Składowe wektora	42
2.2.3	Iloczyn wektora przez skalar	43
2.2.4	Iloczyn skalarny dwóch wektorów	43
2.2.5	Iloczyn wektorowy dwóch wektorów	43
2.3	Moment wektora względem punktu	48
2.3.1	Moment siły względem punktu	50
2.3.2	Moment siły określonej za pomocą składowych	53
2.4	Moment siły względem osi	55
2.5	Układy wektorów – redukcja układu wektorów	57
2.5.1	Para sił – moment pary sił	57
2.5.2	Wektor główny i moment główny układu sił	59
2.5.3	Redukcja układu sił	60
2.5.4	Redukcja układu sił równoległych	63

2.5.5	Równoważny układ wektorów dla siły związanej z prostą	64
3	MODELOWANIE WZAJEMNEGO ODDZIAŁYWANIA CIAŁ	67
3.1	Reakcje więzów	69
3.1.1	Przykłady oddziaływania ciał – reakcje więzów (modele idealne)	70
3.2	Modelowanie zjawiska tarcia	74
3.2.1	Modelowanie zjawiska tarcia suchego	75
3.2.2	Modelowanie tarcia w łożyskach ślizgowych	79
3.2.3	Modelowanie oporu toczenia	81
3.2.4	Tarcie ciągła o powierzchnię walcową	83
3.3	Więzy i reakcje więzów – zestawienie	84
3.4	Oddziaływanie elementów sprężystych	89
4	STATYKA	91
4.1	Równowaga swobodnego punktu materialnego	91
4.2	Równowaga nieswobodnego punktu materialnego	93
4.3	Szczególne przypadki równowagi ciała sztywnego	96
4.3.1	Równowaga ciała sztywnego obciążonego dwiema siłami	96
4.3.2	Równowaga ciała sztywnego obciążonego trzema siłami	97
4.4	Warunki równowagi układu punktów materialnych	100
4.4.1	Siły wewnętrzne i siły zewnętrzne	100
4.4.2	Warunki równowagi nieswobodnego układu punktów materialnych	102
4.5	Równania równowagi ciała sztywnego	105
4.6	Rozwiązywanie zadań statyki	107
4.6.1	Układy proste	108
4.6.2	Układy złożone	114
4.7	Redukcja równoległego układu sił – środek ciężkości	118
4.7.1	Położenie środka ciężkości ciała	121
4.7.2	Twierdzenia Guldina-Pappusa	129
5	KINEMATYKA	131
5.1	Funkcje wektorowe	131
5.1.1	Pochodne elementarnych funkcji skalarnych	132
5.1.2	Funkcja wektorowa	133

5.2	Kinematyka punktu	140
5.2.1	Położenie punktu	141
5.2.2	Prędkość i przyspieszenie punktu	144
5.3	Kinematyka ciała sztywnego	158
5.3.1	Twierdzenie o rzutach prędkości punktów ciała sztywnego	160
5.3.2	Związki między prędkościami punktów ciała sztywnego	163
5.3.3	Zależności pomiędzy przyspieszeniami punktów ciała sztywnego	165
5.3.4	Szczególne przypadki ruchu ciała	168
5.4	Ruch złożony – ruch punktu względem ruchomego układu odniesienia	180
5.4.1	Prędkość punktu o ruchu złożonym	181
5.4.2	Przyspieszenie punktu o ruchu złożonym	184
6	DYNAMIKA PUNKTU MATERIALNEGO	193
6.1	Dynamika swobodnego punktu materialnego	193
6.1.1	Pojęcie siły bezwładności	196
6.2	Dynamika nieswobodnego punktu materialnego	197
6.3	Energia kinetyczna punktu materialnego	200
6.4	Praca siły i moc siły	201
6.5	Prawo zmienności energii kinetycznej punktu	205
6.6	Równania dynamiki punktu materialnego wyrażone za pomocą pędu i krętu	207
6.6.1	Pęd punktu materialnego	208
6.6.2	Kręt punktu materialnego	208
6.6.3	Twierdzenia o pochodnej pędu i pochodnej krętu	210
6.7	Rozwiązywanie zadań z dynamiki nieswobodnego punktu materialnego	212
6.8	Masowe momenty bezwładności punktu materialnego	217
7	DYNAMIKA UKŁADU PUNKTÓW MATERIALNYCH	219
7.1	Podstawowe pojęcia i oznaczenia	219
7.2	Swobodny układ punktów materialnych	222
7.3	Nieswobodny układ punktów materialnych	222
7.3.1	Równania więzów	223
7.4	Energia układu punktów materialnych - zależności ogólne	226

7.5	Prawo zmienności energii kinetycznej układu punktów materialnych	227
7.6	Pęd układu punktów materialnych	228
7.7	Prawo zmienności pędu układu punktów materialnych	229
7.8	Kręt układu punktów materialnych	230
7.9	Prawo zmienności krętu układu punktów materialnych	232
7.10	Równania dynamiki układu punktów materialnych	234
7.11	Prawo ruchu środka masy układu punktów materialnych	235
8	DYNAMIKA CIAŁA SZTYWNEGO	237
8.1	Energia kinetyczna ciała sztywnego – zależności ogólne	237
8.2	Masowe momenty bezwładności i masowe momenty dewiacyjne	241
8.2.1	Masowe momenty bezwładności i masowe momenty dewiacyjne ciała sztywnego	241
8.2.2	Masowy moment bezwładności ciała względem prostej o dowolnym kierunku	244
8.2.3	Masowe momenty bezwładności i masowe momenty dewiacyjne wybranych ciał sztywnych	246
8.3	Energia kinetyczna ciała sztywnego – przypadki szczególne	249
8.4	Praca sił działających na ciało sztywne	250
8.5	Prawo zmienności energii kinetycznej dla ciała sztywnego	253
8.6	Pęd ciała sztywnego	255
8.7	Kręt ciała sztywnego	256
8.7.1	Kręt ciała sztywnego w układzie inercyjnym	257
8.7.2	Kręt ciała sztywnego względem ruchomego (nieinercyjnego) układu odniesienia	258
8.8	Równania dynamiki ciała sztywnego	260
8.8.1	Równania dynamiki ciała sztywnego w postaci ogólnej	261
8.8.2	Równania Newtona-Eulera	263
8.8.3	Prawa dynamiki dla ciała sztywnego	265
8.9	Dynamika ciała sztywnego – szczególne przypadki ruchu	266
8.9.1	Równania dynamiki ciała sztywnego o ruchu postępowym	267

8.9.2	Równania dynamiki ciała sztywnego o ruchu obrotowym	270
8.9.3	Równania dynamiki ciała sztywnego o ruchu płaskim	276
8.10	Dynamika układu ciał	281

Pomoce dydaktyczne

Katedra Dynamiki Maszyn

Wykład jest po to, żeby zrozumieć podstawowe pojęcia, przekształcenia i zależności.

Mechaniki można się nauczyć tylko przez samodzielną pracę.

Przedmowa

Podręcznik *"Wykłady z mechaniki ogólnej"* jest przeznaczony dla studentów uczących się na wydziałach mechanicznych i im pokrewnych. W pracy omawiane są zagadnienia mechaniki, które są przedmiotem wykładów i ćwiczeń przewidzianych programem zajęć na tych kierunkach kształcenia, na których liczba godzin przeznaczonych na mechanikę nie przekracza 100. Jest to więc kurs podstaw mechaniki.

Treścią podręcznika jest newtonowska mechanika klasyczna – odnosząca się do punktów materialnych i mechanika ogólna – zajmująca się zagadnieniami dynamiki ciała sztywnego. Przedstawione są podstawy mechaniki, to jest statyka, kinematyka i dynamika punktu materialnego, układu punktów materialnych i ciała sztywnego. Pierwsze trzy rozdziały obejmują: wprowadzenie w zagadnienia mechaniki, podstawy rachunku wektorowego – w odniesieniu do mechaniki ciała sztywnego oraz modelowanie wzajemnych oddziaływań pomiędzy ciałami. Rozdział czwarty dotyczy zagadnień równowagi układów mechanicznych, a piąty kinematyki punktu i kinematyki ciała sztywnego. Ostatnie trzy rozdziały poświęcone są problemom dynamiki.

Taki układ pracy jest podyktowany programem studiów. Zajęcia z mechaniki prowadzone są już w pierwszym semestrze, kiedy to studenci nie mają jeszcze odpowiedniego przygotowania z matematyki. Brak dostatecznej wiedzy dotyczącej rachunku różniczkowego i równań różniczkowych w pierwszej części semestru wymusza określoną kolejność omawiania zagadnień mechaniki (statyka, kinematyka, dynamika).

Omówienie rachunku wektorowego na pierwszych wykładach umożliwia jego konsekwentne wykorzystanie przy rozpatrywaniu kolejnych zagadnień mechaniki. Rachunek wektorowy jest przedstawiony w taki sposób, że stanowi wprowadzenie w zagadnienia mechaniki. Jednocześnie z wykładem podstaw rachunku wektorowego realizowany jest zasadniczy cel ćwiczeń, jakim jest – w pierwszej fazie kursu mechaniki – opanowanie umiejętności rzutowania wektorów i wyznaczanie momentu siły względem punktu i względem osi.

Ze względu na konieczność selekcji materiału szereg zagadnień zostało omówionych skrótowo (np. ruch kulisty ciała), a niektóre zupełnie pominięte (zderzenia ciał, metody mechaniki analitycznej). Z tych samych powodów dowody niektórych twierdzeń nie zostały tu przytoczone.

Przedstawione zagadnienia ilustrowane są rozwiązaniami przykładowych zadań.

Na końcu pracy zamieszczony został spis literatury wykorzystywanej przy opracowaniu zamieszczonego materiału. Chętnych do rozszerzenia i pogłębienia wiadomości z mechaniki ogólnej odsyłamy przede wszystkim do podręcznika [15] (*Osiński Z., Mechanika ogólna. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1994*). Należy dodać, że wiele zagadnień, które zostały w tej pracy z konieczności pominięte, jest omówionych w książce Z. Osińskiego. Sposób podejścia, a także oznaczenia używane w obu pracach są zbliżone i jednoczesne korzystanie z nich nie powinno prowadzić do nieporozumień.

Oprócz wskazania na podobieństwa w ujęciu zagadnień mechaniki do innych opracowań z tej dziedziny, warto też zwrócić uwagę Czytelnika na liczne propozycje oryginalnego podejścia i wyjaśniania problemów zawarte w tej pracy. Jako przykłady można podać: omówienie działań na wektorach nieswobodnych, poruszenie niektórych zagadnień związanych z modelowaniem układów mechanicznych, zwrócenie uwagi na dodatkowe warunki, jakie muszą być spełnione przy analizie szczególnych przypadków ruchu ciała sztywnego.

W tym miejscu pragniemy podziękować Koledze Bogumiłowi Mjanowskiemu za sugestie dotyczące pracy i udostępnienie szeregu rysunków, a także słuchaczowi studium doktoranckiego, Panu Tomaszowi Sochackiemu za wnikliwą lekturę całości i przekazane uwagi.

Serdecznie dziękujemy prof. dr hab. inż. Walterowi Bartelmusowi z Politechniki Wrocławskiej i prof. dr hab. inż. Zbigniewowi Powierzy z Akademii Morskiej w Gdyni za zwrócenie uwagi na niedociągnięcia w recenzowanej wersji pracy. Jesteśmy pełni uznania dla pracy włożonej przez Recenzentów i wyrażamy przekonanie, że przyczynili się do poprawy jakości tego podręcznika.

Łódź, maj – grudzień 2003

Autorzy

Wykaz oznaczeń¹

• Litery łacińskie duże

A, B, C, \dots	–	oznaczenia punktów
E_A, E_B	–	energia kinetyczna (punktu materialnego, ciała lub układu materialnego) w punkcie A i w punkcie B
$\vec{F}, \vec{P}, \vec{R}, \vec{W}$	–	wektory sił (zewnątrznych, reakcji, wewnętrznych)
F, P, R, W	–	wartości sił (długości wektorów $\vec{F}, \vec{P}, \vec{R}, \vec{W}$)
F_x, F_y, F_z	–	rzut siły (\vec{F}) na osie x, y, z
\vec{G}	–	siła ciężkości (jej wartość jest określona jako $G = mg$)
J_O	–	masowy moment bezwładności względem punktu (bieguna)
J_x, J_y, J_z	–	masowe momenty bezwładności względem osi x, y i z
$J_{(xy)}, J_{(yz)}, \dots$	–	masowe momenty bezwładności względem płaszczyzn
J_{xy}, J_{yz}, J_{zx}	–	momenty dewiacyjne
$\vec{K}_B, \vec{K}_C, \vec{K}_O$	–	wektor krętu (punktu materialnego lub ciała sztywnego) względem bieguna B, C oraz O
$\frac{d\vec{K}_C}{dt}, \frac{d\vec{K}_O}{dt}$	–	pochodna względem czasu wektora krętu względem punktu C oraz O
L, L_{AB}	–	praca siły i praca siły wykonana podczas przemieszczenia punktu przyłożenia z położenia A do B
$\vec{M}_B, \vec{M}_C, \vec{M}_O$	–	moment siły względem punktu B, C, O
N	–	reakcja normalna, moc siły
\vec{Q}	–	wektor pędu (punktu materialnego, ciała sztywnego lub układu materialnego)
$\frac{d\vec{Q}}{dt}$	–	pochodna wektora pędu
\vec{S}	–	wektor główny układu wektorów
T, T_{gr}	–	siła tarcia i graniczna siła tarcia

• Litery łacińskie małe

a, b, c, d, \dots	–	długości odcinków i wektorów
\vec{a}	–	wektor przyspieszenia punktu (a oznacza długość tego wektora)
a_x, a_y, a_z	–	rzuty wektora przyspieszenia punktu na osie x, y, z

¹W wykazie podane zostały ważniejsze oznaczenia używane w tekście. W pewnych sytuacjach znaczenie niektórych symboli może być inne niż podano w tym zestawieniu. Wszelkie odstępstwa od podanego w wykazie sposobu oznaczeń zostały w pracy opatrzone odpowiednim komentarzem.

a_τ, a_n	– rzuty wektora przyspieszenia punktu na oś styczną i normalną do toru
$d'L$	– elementarna praca siły
e_x, e_y, e_z	– odległości (wykorzystywane przy definiowaniu masowych momentów bezwładności)
\vec{g}	– wektor przyspieszenia ziemskiego (g oznacza jego wartość)
k	– stała grawitacji; współczynnik sztywności sprężyny (sztywność sprężyny albo stała sprężyny)
m	– masa (punktu materialnego, układu punktów, ciała sztywnego)
n	– liczba naturalna (np. liczba punktów materialnych, liczba sił działających na układ materialny lub ciało sztywne)
$\vec{r}, \vec{r}_{BA}, \vec{r}_{OB}$	– wektory określające położenie punktów
t	– czas (t_1, t_2 oznaczają wybrane chwile)
\vec{v}	– wektor prędkości punktu (v oznacza długość tego wektora)
v_x, v_y, v_z	– rzuty wektora prędkości punktu na osie x, y, z
x_A, y_A, z_A	– współrzędne wybranego punktu (A)
x, y, z	– osie prostokątnego układu współrzędnych (lub współrzędne punktu)

• **Litery greckie**

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$	– kąty pomiędzy dwoma wektorami, dwiema prostymi lub płaszczyznami (przy opisie położenia wektora α, β i γ oznaczają kąty skierowane pomiędzy osiami x, y i z a wektorem)
$\vec{\epsilon}$	– wektor przyspieszenia kątownego ciała
ϵ	– wartość wektora przyspieszenia kątownego ciała (w ruchu płaskim ciała $\epsilon = \frac{d\omega}{dt}$)
μ	– współczynnik tarcia (μ_s, μ_k oznaczają statyczny i kinematyczny współczynnik tarcia)
ξ, η, ζ	– osie ruchomego układu współrzędnych sztywno związanego z ciałem
ρ	– promień krzywizny toru (i masa właściwa ciała)
$\tau, \eta, (\eta_b)$	– oś styczna oraz oś normalna (i binormalna) do toru poruszającego się punktu
ψ, θ, φ	– kąty opisujące orientację ciała w przestrzeni (kąty Eulera)
$\vec{\omega}$	– wektor prędkości kątownej ciała
ω	– wartość wektora prędkości kątownej ciała (w ruchu płaskim ciała $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$)

Rozdział 1

WPROWADZENIE

Przedmiotem rozważań zawartych w tym podręczniku jest mechanika klasyczna i mechanika ogólna.

Mechanika klasyczna zajmuje się opisem ruchu ciał, przy czym ciała są zastępowane przez punkty materialne.

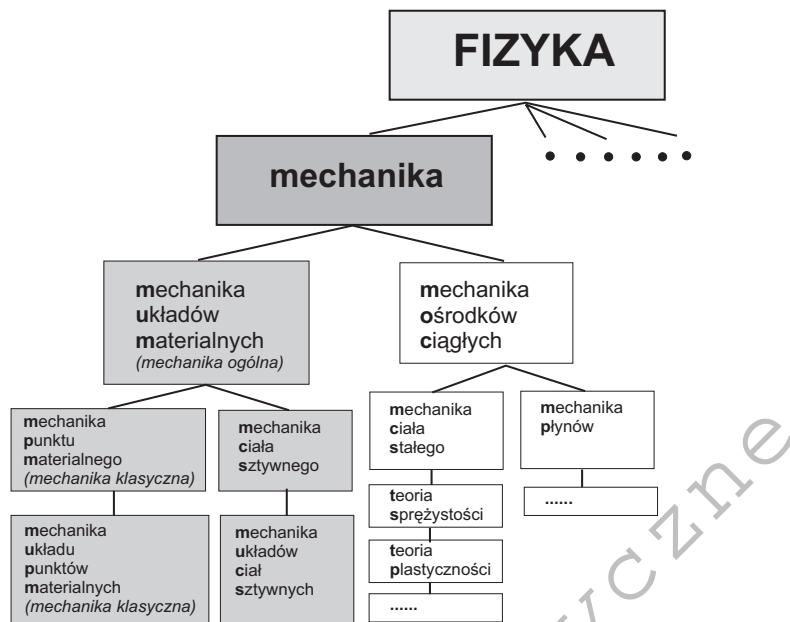
Mechanika ogólna zajmuje się podstawowymi prawami, które pozwalają na opis ruchu ciał. Charakterystyczne dla mechaniki ogólnej modele to ciało sztywne i układ ciał sztywnych. Prawa i zależności opisujące ruch ciał sztywnych obejmują prawa sformułowane dla punktów materialnych (mechanika ogólna zawiera w sobie mechanikę klasyczną).

1.1 Przedmiot zainteresowań mechaniki

Mechanika jest działem fizyki, którego przedmiotem jest opis ruchu ciał.

W zależności od tego, jakiego rodzaju ciałami zajmuje się mechanika rozróżnia się:

- *mechanikę układów materialnych*, w której można wyróżnić:
 - *mechanikę punktu materialnego*,
 - *mechanikę układu punktów materialnych*,
 - *mechanikę ciała sztywnego*,
 - *mechanikę układów ciał sztywnych (układów wielocząsteczkowych)*,
- *mechanikę ośrodków ciągłych* obejmującą:
 - *mechanikę ciała stałego*, a w niej
 - *teorię sprężystości*,
 - *teorię plastyczności*,
 - *mechanikę pękania* i inne,
 - *mechanikę płynów*, z podziałem na *hydromechanikę* (dotyczącą cieczy) i *aeromechanikę* (zajmującą się gazami).



Rysunek 1.1: Główne obszary zainteresowań mechaniki

Można powiedzieć tak, że w mechanice układów materialnych podejmuje się badania nad tym co dzieje się z ciałem traktowanym jako całość (np. określa się przemieszczenia, przyspieszenia); dla odmiany domeną mechaniki ośrodków ciągłych jest analiza tego co dzieje się wewnątrz ciała, to jest analiza naprężeń, odkształceń (deformacji)¹.

Mechanika klasyczna (newtonowska) zajmuje się opisem ruchu punktów materialnych, a wielkością niezmienniczą jest czas². Mechaniką ogólną jest nazywana rozszerzona o opis ruchu ciał – traktowanych jako sztywne bryły – wersja mechaniki newtonowskiej³.

Mechanika ogólna zajmuje się prawami, które pozwalają na opis ruchu modeli ciał. Stosowane w mechanice ogólnej modele to punkt materialny i ciało sztywne, a także układy złożone z punktów materialnych i ciał sztywnych. Niektóre modele ciał używane w mechanice ogólnej (punkt materialny, układ punktów materialnych) mogą być wykorzystywane zarówno w mechanice płynów, jak i mechanice ciała stałego.

¹Mechanika ośrodków ciągłych nie będzie tu omawiana. Zagadnienia, o których mowa w mechanice ośrodków ciągłych są przedmiotem odrębnych zajęć (np. wytrzymałości materiałów).

²Inne podejście – zaproponowane przez Einsteina – właściwe mechanice relatywistycznej wiąże się z założeniem, że niezmienniczą jest czasoprzestrzeń.

³Mechanika relatywistyczna, ani kwantowa nie będą tu przywoływane.

Niekiedy dokonywany jest podział na mechanikę teoretyczną i mechanikę stosowaną.

Mechanika teoretyczna jest częścią fizyki teoretycznej i zajmuje się opisem ruchu ciał pod wpływem działających sił.

Mechanika stosowana koncentruje się na zastosowaniach mechaniki teoretycznej do rozwiązywania zagadnień spotykanych w praktyce (w technice). Przedmiotem badań (obiektem badań) mechaniki stosowanej są modele konstrukcji, urządzeń, maszyn, pojazdów. Często są nimi fragmenty, podzespoły lub elementy konstrukcji, urządzeń, maszyn, pojazdów. W związku z tym używane są określenia: *mechanika konstrukcji*, *mechanika maszyn*, *mechanika pojazdów*.

Mechaniką analityczną zwykło się określać sposób podejścia do mechaniki wywodzący się od J. d'Alemberta (1717–1783), J.L. Lagrange'a (1736–1813) i rozwijany przez C.F. Gaussa (1777–1855), W.R. Hamiltona (1805–1865) i innych, a polegający na zastosowaniu metod analizy matematycznej do opisu dynamiki układów materialnych.

Dla porządku należy jeszcze wspomnieć o specyficznych obszarach zainteresowań mechaniką, spotykanych u badaczy innych dyscyplin. Na przykład fizyków i astronomów interesuje ruch planet – co tłumaczy nieco archaiczną dziś nazwę *mechanika nieba*.

1.2 Podstawowe pojęcia mechaniki

Do pierwotnych pojęć mechaniki należą:

- czas,
- przestrzeń,
- masa,
- siła.

Na bazie tych pojęć są definiowane inne pojęcia i wielkości używane w mechanice (np.: prędkość, przyspieszenie, pęd, energia kinetyczna, moment siły, praca siły).

Przy opisie ruchu ciał rzeczywistych pomija się nieistotne, z punktu widzenia analizy, szczegóły. Posługujemy się przy tym pewnymi idealizującymi rzeczywistość pojęciami, które zostaną tu wymienione.

Punktem materialnym nazywa się ciało o nieskończenie małych rozmiarach i posiadające masę. Masa punktu nie ulega zmianie. Jego położenie określa się tak jak położenie punktu geometrycznego. Pojęcie punktu materialnego wykorzystuje się przy opisie ruchu ciał rzeczywistych, w takich przypadkach, w których rozmiary ciał w stosunku do odległości charakteryzujących ruch są niewielkie i mogą być pominięte.

Zbiór wzajemnie na siebie oddziałujących ciał, z których każde można traktować jako punkt materialny jest nazywany *układem punktów materialnych*.

Układem swobodnych punktów materialnych nazywa się układ punktów materialnych, którego ruch nie podlega żadnym ograniczeniom pochodzącym spoza tego układu.

Układem nieswobodnych punktów materialnych nazywa się układ punktów materialnych, którego ruch podlega dodatkowym ograniczeniom. Ograniczenia ruchu są wyrażone poprzez dodatkowe warunki nałożone na położenia lub prędkości. Ograniczenia nałożone na ruch są nazywane więzami.

Ciałem sztywnym nazywa się taki szczególny układ nieskończenie wielu punktów materialnych, w którym odległości między punktami pozostają stałe (nie występują względne przemieszczenia punktów).

Układ materialny (albo *układ mechaniczny*) składa się ze skończonej liczby punktów materialnych i/lub ciał sztywnych, pomiędzy którymi zachodzą wzajemne oddziaływania (np. ciała mogą być ze sobą połączone), a ich ruchy mogą podlegać różnego rodzaju ograniczeniom.

Swobodny układ materialny to układ (składający się z punktów materialnych i/lub ciał sztywnych), na który nie oddziałują inne ciała, albo ich oddziaływania występują w postaci znanych sił. Pojęcie swobodnego układu punktów materialnych dotyczy takich układów, których ruch spowodowany jest jedynie poprzez siły, przy czym mogą to być siły wewnętrzne (działające pomiędzy punktami tego układu) lub zewnętrzne (spoza układu).

Nieswobodny układ materialny to układ (składający się z punktów materialnych i/lub ciał sztywnych), którego położenie (albo ruch) jest ograniczone przez oddziaływanie innych ciał. Ograniczenia nałożone na położenie ciała lub układu – wynikające z oddziaływania ciał nie należących do rozpatrywanego układu są nazywane *więzami*. Poza ograniczeniami nałożonymi na położenie więzy mogą oznaczać warunki nałożone na prędkości.

1.3 Podstawowe założenia mechaniki

Podstawą mechaniki klasycznej są:

- hipoteza mezmienniczości G. Galileusza⁴ (1564–1642),
- prawo dodawania prędkości (dotyczące ruchu względem poruszającego się układu odniesienia).

⁴Hipoteza Galileusza oznacza, że: *Jeśli prawa mechaniki są ważne w pewnym układzie odniesienia, to są one ważne w każdym innym układzie poruszającym się ruchem jednostajnym względem układu odniesienia.* Inne sformułowanie tej hipotezy: *Podstawowe prawa fizyki są jednakowe we wszystkich układach odniesienia, które poruszają się względem siebie ze stałą prędkością (bez przyspieszenia)* [10]. Obserwacje i eksperymenty potwierdzają słuszność tej hipotezy.

Podstawowe aksjomaty (to jest założenia przyjmowane bez dowodu⁵) w mechanice stanowią trzy prawa sformułowane po raz pierwszy przez I. Newtona⁶ (1643–1727) oraz prawo grawitacji (prawo powszechnego ciążenia).

I. Pierwsze prawo dynamiki

W wersji podanej przez Newtona⁷ w 1687 roku brzmiało

◇ *Każde ciało trwa w stanie spoczynku lub ruchu jednostajnego, dopóki siły nań działające tego stanu nie zmienią.*

Współczesne sformułowanie tego prawa jest następujące

● *Punkt materialny, na który nie działa żadna siła lub działają siły, których wypadkowa jest wektorem zerowym, pozostaje w spoczynku lub w ruchu jednostajnym prostoliniowym.*

Z tego prawa wynika, że bez działania siły zmiana prędkości ani zmiana kierunku ruchu punktu jest niemożliwa. Punkt nie może ruszyć z miejsca, zatrzymać się ani poruszać się wzdłuż krzywej, o ile nie działa na niego siła. Prawo to jest nazywane prawem bezwładności.

II. Drugie prawo dynamiki

Newton podał taką formułę

◇ *Zmiana ilości ruchu (czyli pędu) jest proporcjonalna względem siły działającej i ma kierunek prostej, wzdłuż której ta siła działa.*

Obecnie drugie prawo dynamiki jest przedstawiane w formie

● *Przyspieszenie punktu materialnego ma wartość proporcjonalną do wartości siły działającej na ten punkt oraz kierunek i zwrot siły.*

Prawo to można przedstawić w postaci wzoru

$$m \vec{a} = \vec{F},$$

gdzie: m – masa punktu, \vec{a} – wektor przyspieszenia punktu, \vec{F} – wektor wypadkowy sił działających na punkt materialny.

Równanie to, nazywane równaniem Newtona, jest podstawowym równa-

⁵Obserwacje i doświadczenia potwierdzają poprawność tych stwierdzeń.

⁶W oryginalnym sformułowaniu praw Newtona jest mowa o ciałach, a nie punktach materialnych. Obecny stan wiedzy wymaga zastrzeżenia, że chodzi o ciała sztywne, które poruszają się ruchem postępowym. Jeśli jako model ciała przyjmie się punkt materialny, to takie zastrzeżenia są zbędne.

⁷Tłumaczenie praw Newtona zostało zaczerpnięte z pracy [15].

niem dynamiki punktu. Opis ruchu ciała sztywnego pod wpływem sił działających na ciało jest bardziej skomplikowany z uwagi na możliwość obrotu ciała. Prawa dynamiki dla ciała sztywnego są sformułowane w punkcie 8.8.3.

III. Trzecie prawo dynamiki

W wersji Newtona zostało zapisane

◇ *Każdemu działaniu towarzyszy równe i wprost przeciwne oddziaływanie, czyli wzajemne działania dwóch ciał są zawsze równe i skierowane przeciwnie.*

Współcześnie trzecie prawo dynamiki można podać w formie

● *Każdemu działaniu towarzyszy przeciwdziałanie. Siły, z jakimi oddziałują na siebie dwa punkty materialne są równe co do wartości, mają kierunek prostej przechodzącej przez te punkty i mają przeciwne zwroty.*

Prawo to oznacza, że siły pochodzą od oddziaływania punktów materialnych (ciał) na siebie, i że oddziaływania te są wzajemne. Trzecie prawo dynamiki jest nazywane prawem działania i przeciwdziałania (albo akcji i reakcji).

IV. Prawo powszechnego ciążenia

Prawo powszechnego ciążenia dotyczy jednego rodzaju oddziaływań pomiędzy ciałami – wzajemnego przyciągania się ciał.

● *Wartość siły wzajemnego oddziaływania pomiędzy dwoma punktami materialnymi określa wzór*

$$F = k \frac{m_1 m_2}{r^2},$$

przy czym: $k = 6,672 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$ oznacza stałą grawitacji, m_1 i m_2 masy punktów materialnych, a r odległość pomiędzy punktami.

Siłą ciężkości albo siłą grawitacyjną Ziemi (oznaczaną G) nazywa się siłę z jaką ta planeta oddziałuje na punkty materialne (ciała) znajdujące się na jej powierzchni (lub w pobliżu). Jej wartość można wyrazić jako

$$G = k \frac{m_Z}{R^2} m = m g,$$

gdzie $m_1 = m_Z$ oznacza masę Ziemi, $m_2 = m$ masę punktu materialnego (ciała), a R jego odległość od środka Ziemi. Oznacza to, że przyspieszenie

ziemskie g , można wyznaczyć jako

$$g = k \frac{m_Z}{R^2} = 6,672 \cdot 10^{-11} \frac{5,96 \cdot 10^{24}}{(6,37 \cdot 10^6)^2} \cong 9,8 \text{ m/s}^2.$$

Do sformułowania spójnej teorii (a taką jest mechanika ogólna), oprócz przytoczonych praw, niezbędne są jeszcze dodatkowe aksjomaty. Pozwalają one na sformułowanie praw ruchu dla ciała sztywnego na podstawie praw odnoszących się do punktu materialnego. Te dodatkowe założenia są wyszczególnione poniżej.

V. Wielkości wektorowe stosowane w mechanice podlegają regułom rachunku wektorowego⁸.

VI. Niezależność działania sił

- Dwie dowolne siły \vec{P}_1 i \vec{P}_2 , przyłożone do jednego punktu ciała, można zastąpić siłą wypadkową \vec{W} przyłożoną do tego punktu i przedstawioną jako wektor będący przekątną równoległoboku zbudowanego na wektorach sił \vec{P}_1 i \vec{P}_2 . Efekt (ostateczny) działania siły wypadkowej na ciało jest taki sam jak łączny efekt osobnego działania każdej z sił.

VII. Równowaga ciała sztywnego pod działaniem dwu sił

- Przy działaniu dwu sił ciało sztywne jest w równowadze tylko wtedy, gdy siły działają wzdłuż jednej prostej, są przeciwnie zwrócone i mają te same wartości liczbowe.

Układ dwu sił działających wzdłuż jednej prostej, przeciwnie zwróconych i mających takie same wartości liczbowe, przyłożonych do ciała sztywnego, nazywa się zerowym układem sił⁹.

VIII. Dodanie zerowego układu sił

- Efekt działania układu sił przyłożonych do ciała sztywnego nie ulegnie zmianie, gdy do tego układu dodamy lub odejmiemy dowolny zerowy układ sił.

IX. Zesztynwienie ciała (lub układu)

- Równowaga ciała odkształcalnego (lub układu ciał) nie zostanie naruszona przez zesztynwienie tego ciała (lub układu ciał).

Założenie to oznacza, że przy rozpatrywaniu równowagi ciała odkształcalnego można wykorzystywać jego model, jakim jest ciało sztywne. (Po-

⁸Warunki, jakie muszą spełniać wektory, by możliwe było ich dodawanie oraz inne kwestie związane z zastosowaniem rachunku wektorowego w mechanice ogólnej są omawiane w rozdziale 2.

⁹Zerowym układem sił można nazywać każdy układ sił działających na ciało sztywne, o ile kierunki działania sił przecinają się w jednym punkcie, a ich suma jest równa zero.

dobnie, przy analizie równowagi układu złożonego z ciał, o połączeniach dopuszczających ruchy ciał względem siebie, można badać równowagę modelu, który jest ciałem sztywnym.)

Należy podkreślić, że założenie odwrotne nie jest prawdziwe (to znaczy równowaga ciała może zostać naruszona, o ile zamiast modelu ciała sztywnego zostanie użyty model dopuszczający odkształcenia ciała lub układu).

X. Oswobodzenie od więzów

- *Każde ciało nieswobodne można oswobodzić od więzów, zastępując przy tym ich działanie odpowiednimi reakcjami. Dalej można rozpatrywać ciało tak jak ciało swobodne, podlegające działaniu sił czynnych i reakcji więzów.*

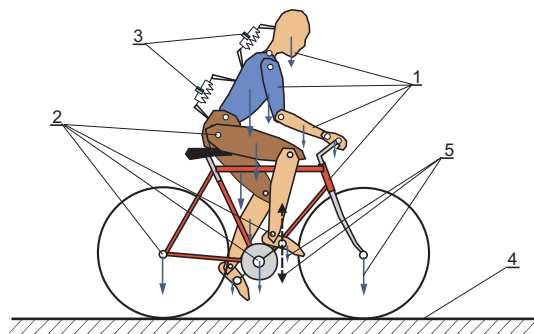
Reakcje więzów są nazywane siłami biernymi. Są one zależne od sił czynnych (reakcje pojawiają się, gdy działają siły czynne i znikają, gdy siły czynne przestają działać).

Na podstawie podanych tu aksjomatów będą wyprowadzone zależności dotyczące opisu ruchu ciała sztywnego.

1.4 Modele stosowane w mechanice

Model definiuje się jako taki dający się pomyśleć lub materialnie zrealizować układ, który odzwierciedlając lub odtwarzając przedmiot badania, zdolny jest zastępować go tak, że jego badanie dostarcza nam nowej informacji o tym przedmiocie, a także pozwala na sprawdzenie informacji znanych [1].

Model układu mechanicznego – to układ punktów materialnych i brył sztywnych wraz z modelami wzajemnych powiązań, oddziaływań otoczenia i obciążeń zewnętrznych i wewnętrznych. Przykłady modeli układów mechanicznych są pokazane na rysunkach 1.2 i 1.3.



Rysunek 1.2: Model układu mechanicznego *rowerzysta-rower* z programu *Working Model* [22] (1 – ciała sztywne, 2 – połączenia bezpośrednie (przeguby), 3 – połączenia pośrednie (sprężyny, tłumiki), 4 – więzy (ograniczenia ruchu), 5 – obciążenia zewnętrzne (ciężar ciał) i wewnętrzne (siła nacisku na pedal).

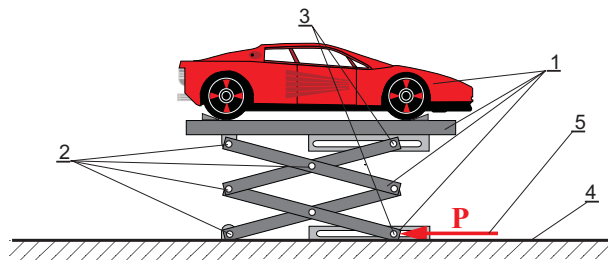
W modelu układu mechanicznego można wyróżnić następujące elementy:

- *model ciała*, którym może być punkt materialny lub bryła sztywna (ciało sztywne),
- *model połączeń (lub powiązań) bezpośrednich* pomiędzy ciałami wynikających z oddziaływania w miejscach kontaktu ciał (na powierzchniach ciał),
- *model połączeń (lub powiązań) pośrednich*, realizowany za pomocą dodatkowych elementów¹⁰, takich jak np. przeguby, łożyska, nierozciągliwe liny (nici), taśmy,
- *model oddziaływań zewnętrznych (więzy)*; chodzi tu o oddziaływanie otoczenia na rozpatrywany układ (to znaczy oddziaływanie innych ciał, które nie należą do rozpatrywanego układu),
- *model obciążeń*, którymi mogą być: siły skupione, pary sił, obciążenia ciągłe (rozłożone) – pochodzące spoza układu (siły zewnętrzne) lub mające swoje źródło w rozpatrywanym układzie (np. siły wewnętrzne pochodzące od oddziaływania sprężyn czy tłumików łączących ciała).

Bardziej szczegółowe omówienie poszczególnych elementów modelu układu znajduje się w następnych rozdziałach. W tym miejscu warto jeszcze wspomnieć o podziale na podukłady.

Podukłady – wydzielone z układu ciała, części ciał lub grupy ciał, które są rozpatrywane oddzielnie. Istotne jest to, że w miejscach podziału na podukłady należy uwzględnić wzajemne oddziaływanie ciał (wynikające z trzeciego prawa mechaniki mówiącego o działaniu i przeciwdziałaniu).

¹⁰Elementy pośrednie w modelu układu mechanicznego nie są traktowane jako ciała – masa tych elementów nie jest uwzględniana (to znaczy zakłada się, że ich masa jest równa zero).



Rysunek 1.3: Model podnośnika samochodowego z programu *Working Model* [22] (1 – ciała sztywne, 2 – połączenia bezpośrednie (przegubowe), 3 – połączenia bezpośrednie (przegubowo-przesuwne), 4 – więzy (ograniczenia ruchu), 5 – obciążenie zewnętrzne)

Na zakończenie tych wstępnych uwag przytoczone zostały dla porządku określenia różnych rodzajów modeli układu używanych w mechanice¹¹. Są to modele: fizyczny, matematyczny i wirtualny.

Modelem fizycznym nazywa się zbiór informacji o badanym zjawisku, niesformalizowany pod względem matematycznym.

Modelowanie fizyczne polega na wyodrębnieniu istotnych elementów z rozważanego zjawiska rzeczywistego, czyli ustaleniu: celu modelowania, praw fizycznych rządzących zjawiskiem, cech jakościowych i charakterystyk ilościowych obiektu oraz cech i charakterystyk sygnałów wejściowych [1]. Dla układu mechanicznego sygnałami wejściowymi są zadane siły zewnętrzne i/lub wewnętrzne, a także zadany ruch niektórych punktów lub ciał.

Model matematyczny odpowiadający przyjętemu modelowi fizycznemu otrzymuje się wprowadzając sformalizowany opis zawierający informacje o zjawisku wyrażony w postaci zależności analitycznych (równań i nierówności).

Model wirtualny układu jest modelem tworzonym przy pomocy specjalnego programu komputerowego. Jest to model fizyczny układu wprowadzony do komputera przy pomocy edytora graficznego (wyposażonego w narzędzia, które pozwalają na zadawanie własności modelu, obciążeń, parametrów liczbowych), automatycznie uzupełniany o równania ruchu oraz związki (prawa) fizyczne.

¹¹Nie wspominamy tu o modelach doświadczalnych używanych w badaniach eksperymentalnych.

Rozdział 2

WEKTORY I RACHUNEK WEKTOROWY W MECHANICE

Przed przystąpieniem do omawiania szczegółowych problemów związanych z mechaniką przypominamy kilka podstawowych pojęć dotyczących wektorów oraz rachunku wektorowego. Należy tu wspomnieć, że zastosowanie rachunku wektorowego pozwala na zwięzłe wyprowadzenie zależności stosowanych w mechanice. Drugą zaletą ujęcia wektorowego jest to, że prawa przedstawione w zapisie wektorowym są niezależne od wyboru układu współrzędnych i mogą być sformułowane bez wprowadzania układu współrzędnych.

Zastosowanie rachunku wektorowego w mechanice wymaga jednak zwrócenia uwagi na specyficzne cechy niektórych wektorów (tzw. wektorów nieswobodnych). Działania na wektorach zdefiniowane w podręcznikach matematyki dotyczą wektorów swobodnych. W mechanice prócz wektorów swobodnych występują wektory nieswobodne, dla których niektóre działania (np. dodawanie) przeprowadza się w specyficzny sposób. Warto dodać, że niekiedy działania na wektorach swobodnych nie mają sensu.

Niektóre z wielkości występujących w mechanice to wielkości wektorowe, które są scharakteryzowane poprzez: wartość, kierunek, zwrot (np.: przemieszczenie, prędkość i przyspieszenie punktu, siła, moment siły względem punktu, pęd, moment pędu). Wielkość fizyczną można przedstawić jako wektor, jeśli:

- jej wartość, kierunek i zwrot nie zależą od wyboru układu współrzędnych,
- dodawanie jest zgodne z regułą równoległoboku¹.

¹Kąt obrotu ciała sztywnego nie jest wielkością wektorową, mimo iż można określić jego wartość, kierunek i zwrot. Dodawanie kątów obrotu wokół różnych osi nie podlega regule równoległoboku.

Reguła równoległoboku oznacza, że sumę dwóch wektorów, o początkach leżących w jednym punkcie, stanowi wektor, którego wartość, kierunek i zwrot wyznacza przekątna równoległoboku zbudowanego na wektorach składowych. Początek wektora sumy pokrywa się z początkiem dodawanych wektorów (rys. 2.1).

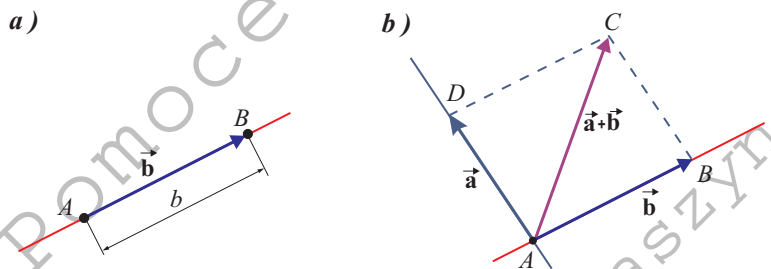
Drugą grupę stanowią wielkości skalarne, to znaczy wielkości określone poprzez podanie ich wartości (czas, masa, energia, moment bezwładności). Skalar jest wielkością, której wartość nie zależy od układu współrzędnych². Wszystkie wielkości skalarne będą oznaczane symbolami pisanymi czcionką pochyloną (np. t , m , E , J_o). Działania matematyczne na wielkościach skalarnych podlegają takim regułom, jak działania na liczbach i funkcjach.

Wielkości wektorowe są tu oznaczane czcionką pogrubioną z umieszczoną nad symbolem strzałką (\vec{r} , \vec{v} , \vec{a} , \vec{F} , \vec{M}_o , \vec{Q} , \vec{K}_o , itd.). Operacje matematyczne wykonywane na wektorach (funkcjach wektorowych) podlegają odmiennym – od działań na skalarach – regułom.

2.1 Wektory - podstawowe pojęcia i definicje

Wektorem nazywa się wielkość, która jest określona poprzez: wartość, kierunek, zwrot i której dodawanie określa reguła równoległoboku. W niektórych przypadkach (chodzi o wektory nieswobodne) wektor jest określony dodatkowo przez położenie prostej działania lub położenie początku wektora.

Wartość (b) wektora (\vec{b}) jest utożsamiana z jego długością (używa się też określenia moduł wektora i oznaczenia $b = |\vec{b}|$). Kierunek wektora \vec{b} jest wyznaczony prostą, na której leży wektor. Zwrot wektora jest zadany przez wyróżnienie początku (A) oraz końca wektora (B) w ten sposób, że zwrot (groty strzałki) wskazuje koniec wektora (rys. 2.1a).



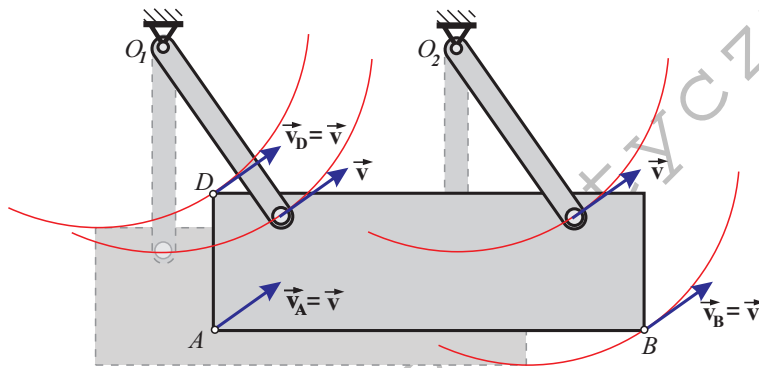
Rysunek 2.1: Przykład wektora (a) i sposób dodawania wektorów (b)

²Współrzędna określająca położenie punktu nie jest skalarzem, gdyż zależy od wyboru kierunku osi.

Geometryczna reprezentacja wektora. Geometrycznie wektor przedstawia się poprzez podanie dwóch punktów: początku i końca wektora. Początek wektora określa punkt przyłożenia. Zwrot wektora jest określony od początku do końca wektora. Wartość wektora jest określona przez odległość między początkiem i końcem wektora. Prosta przechodząca przez początek i koniec wektora wyznacza kierunek wektora (rys. 2.1a).

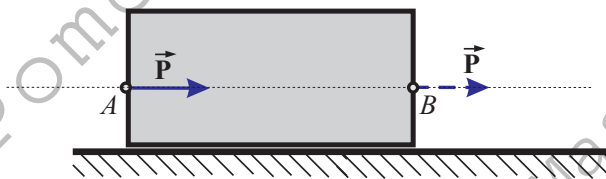
Wektorem swobodnym nazywa się wektor, który ma określoną wartość, kierunek i zwrot (a położenie prostej działania i początku wektora są dowolne).

Przykładem wektora swobodnego jest wektor prędkości punktów ciała sztywnego o ruchu postępowym (rys. 2.2). Znając wektor \vec{v} , równy prędkości jednego punktu takiego ciała, możemy go przenieść (zachowując wartość, kierunek i zwrot) do dowolnego punktu tego ciała. Prędkości wszystkich punktów ciała sztywnego poruszającego się ruchem postępowym są równe \vec{v} ($\vec{v}_A = \vec{v}$, $\vec{v}_B = \vec{v}$, $\vec{v}_D = \vec{v}$, itd.).



Rysunek 2.2: Przykład wektora swobodnego – prędkość punktów ciała sztywnego poruszającego się ruchem postępowym

Innym przykładem wektora swobodnego może być wektor momentu pary sił działającej na ciało sztywne (omawiany w punkcie 2.5.1).



Rysunek 2.3: Przykład wektora posuwnego – siła przyłożona do sztywnej bryły

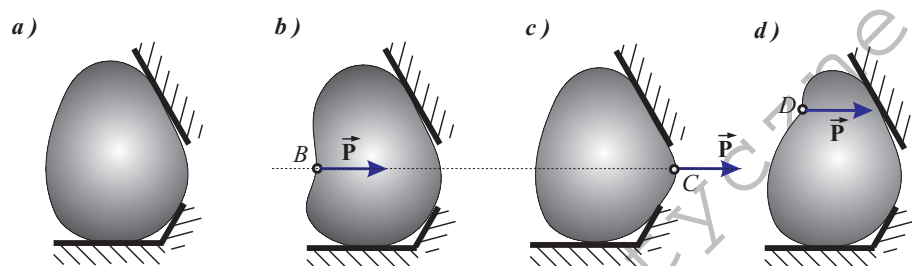
Wektorem związanym z prostą (wektorem posuwnym) jest taki wek-

tor, który ma określoną wartość, kierunek i zwrot oraz położenie prostej, na której leży (rys. 2.3).

Przykładem wektora związanego z prostą może być wektor siły przyłożonej do ciała sztywnego. Efekt działania przyłożonej siły (np. ruch ciała) jest niezależny od punktu przyłożenia siły, o ile działa ona wzdłuż tej samej prostej.

W tym miejscu zaznaczymy, że – w przypadku ciała sztywnego – zamiast wiązać punkt przyłożenia siły z początkiem wektora będziemy – w zależności od potrzeb – przesuwac wektor siły wzdłuż prostej działania do dowolnego punktu.

Wektorem związanym z punktem (wektorem zaczepionym) nazywa się wektor, dla którego są określone: wartość, kierunek, zwrot i położenie początku wektora (zadany punkt przyłożenia określa jednoznacznie położenie prostej działania wektora).



Rysunek 2.4: Przykład wektora związanego z punktem: a) ciało odkształcalne (sprężyste), b-d) deformacje wywołane siłą \vec{P} przyłożoną w różnych punktach (B , C , D)

Rozpatrzmy zachowanie odkształcalnego ciała (np. wiotkiej powłoki napłnionego gazem – balonu), do którego jest przyłożona siła (rys. 2.4). Efekt działania siły jest w tym przypadku zależny od punktu przyłożenia tej siły. Wynika stąd, że siła działająca na ciało odkształcalne jest wektorem związanym z punktem (przesunięcie siły do innego punktu powoduje zmianę zachowania ciała).

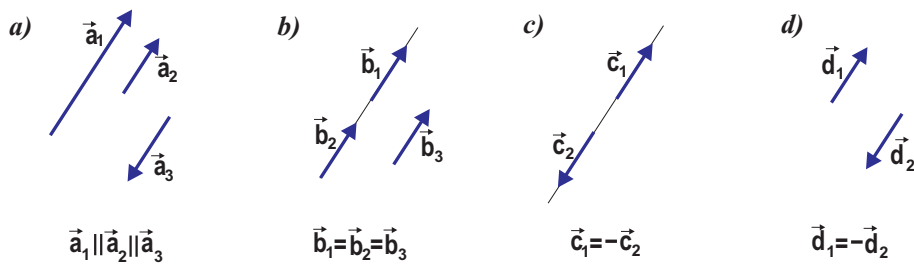
Wektory równoległe to wektory o jednakowych kierunkach (rys. 2.5).

Wektory równe są to wektory o jednakowych kierunkach, wartościach i zwrotach. Wektory równe nie muszą leżeć na jednej prostej (rys. 2.5b).

Wektory przeciwne to dwa wektory o jednakowych kierunkach, jednakowych wartościach i przeciwnych zwrotach. Wektory przeciwne nie muszą leżeć na jednej prostej (rys. 2.5c i 2.5d).

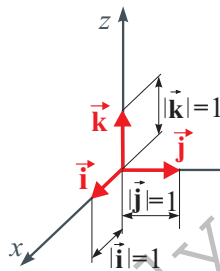
Wektory równoważne to takie wektory, które ściśle przedstawiają tę samą wielkość (np. dwa wektory swobodne są równoważne, jeśli są równe; dwa wektory związane z punktem są równoważne wtedy, gdy są równe i mają wspólny początek).

Wektorem jednostkowym (wersorem) nazywa się wektor, którego moduł jest równy jeden.



Rysunek 2.5: Rodzaje wektorów: a) wektory równoległe, b) wektory równe, c) i d) wektory przeciwne

Wektorem jednostkowym osi (wersorem osi) jest nazywany wektor, którego moduł jest równy jeden, a kierunek i zwrot pokrywają się z kierunkiem i zwrotem osi. Wersor osi x jest oznaczany symbolem \vec{i} , osi y symbolem \vec{j} , a osi z symbolem \vec{k} (rys. 2.6).



Rysunek 2.6: Wektory jednostkowe osi x , y , z

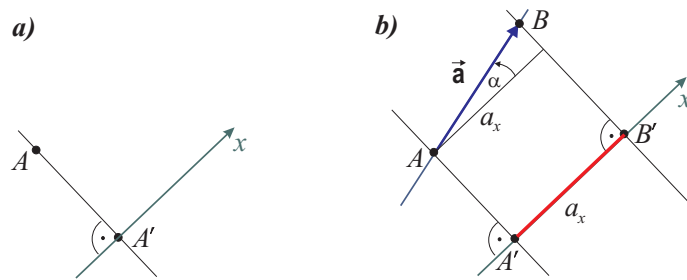
Wektorem zerowym jest wektor o module równym zero.

2.1.1 Rzut wektora na oś

Rzut wektora ($\vec{a} = \vec{AB}$) na oś (x) będziemy uważać za wielkość liczbową³ a_x (rys. 2.7b). Jej miarą jest długość odcinka $A'B'$ opatrzona znakiem. Punkt A' jest rzutem punktu⁴ A na oś x , a punkt B' jest rzutem punktu B na tę oś.

³W podręcznikach do mechaniki, jak i matematyki, można spotkać dwa odmienne sposoby definiowania rzutu wektora na oś. Część autorów proponuje definicję analogiczną jak przyjęta powyżej (rzut wektora na oś jest liczbą) – jako przykład mogą służyć prace [9, 15]. Inne podejście – zgodnie z którym rzut wektora na oś jest wektorem – jest proponowane, między innymi, w pracach [5, 12].

⁴Rzutem prostokątnym punktu A na oś nazywa się punkt A' , który leży w punkcie przecięcia osi x z prostą prostopadłą do x i przechodzącą przez punkt A (rys. 2.7a).

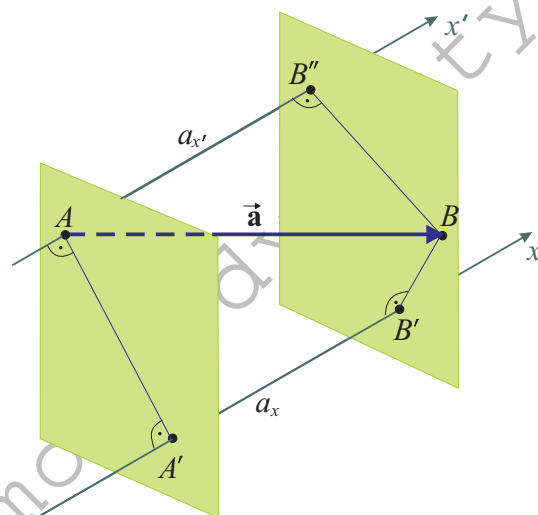


Rysunek 2.7: Rzuty: a) punktu na oś; b) wektora na oś

Rzut wektora na oś wyznacza się z zależności

$$a_x = a \cos \alpha, \quad (2.1)$$

przy czym α oznacza kąt skierowany pomiędzy osią x a wektorem \vec{a} .



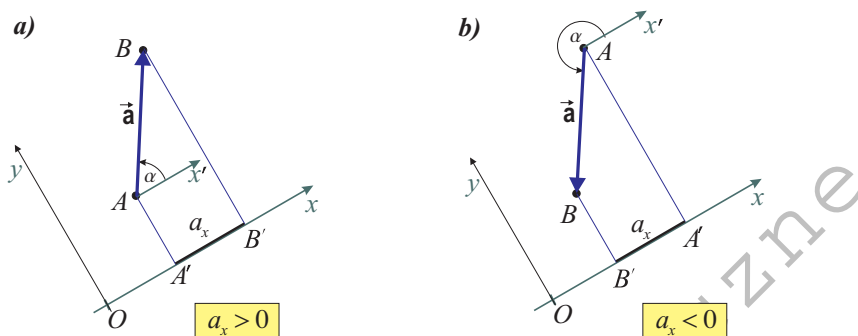
Rysunek 2.8: Rzuty wektora na dwie równoległe do siebie osie

Na rys. 2.8 jest pokazany wektor $\vec{a} = \vec{AB}$ skośny do osi x . Prowadząc przez początek i koniec wektora dwie płaszczyzny prostopadłe do osi x można określić rzut wektora na tę oś (długość rzutu określa odcinek $A'B'$). Łatwo zauważyć, że rzut wektora \vec{a} na oś x' jest równy rzutowi tego wektora na oś x ($AB'' = A'B'$). Wynika stąd, że rzutowanie wektora skośnego do osi x można sprowadzić do

rzutowania tego wektora na oś x' , która jest równoległa do osi x i leży w jednej płaszczyźnie z wektorem \vec{a} .

- **Rzuty wektora na osie równoległe i jednakowo zwrócone są sobie równe.**

Sposób określania kąta α ($\alpha = \sphericalangle(Ox, \vec{a})$, $\alpha = \sphericalangle(Ax', \vec{a})$) jest pokazany na rys. 2.9.



Rysunek 2.9: Rzuty wektorów na oś x : a) dodatnia wartość rzutu, b) ujemna wartość rzutu

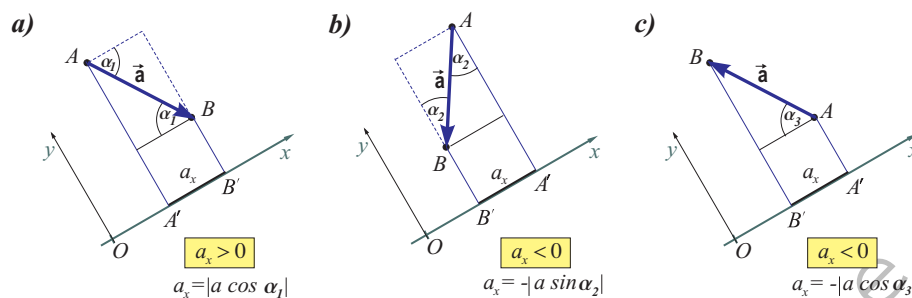
Należy podkreślić, że dla tak zdefiniowanego kąta α (rys. 2.9) rzut wektora na oś będzie dodatni dla kątów $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ oraz $\frac{3}{2}\pi < \alpha \leq 2\pi$ (tj. dla kątów z pierwszej i czwartej ćwiartki), a będzie ujemny dla kątów $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3}{2}\pi$ (czyli dla kątów z drugiej i trzeciej ćwiartki).

Rzut wektora na oś, zdefiniowany w przyjęty tu sposób, jest też nazywany składową skalarną wektora [2].

- **Wyznaczania rzutu wektora leżącego w płaszczyźnie xy na osie – metoda 1** (rys. 2.9):
 1. obrócić układ osi xy ,
 2. w początku wektora umieścić początek osi x' równoległej do osi x (równoległe przenosimy oś x do początku wektora),
 3. oznaczyć kąt (α) pomiędzy osią x' a wektorem (zachowując kierunek trygonometryczny),
 4. wyznaczyć rzut wektora na oś x zgodnie ze wzorem $a_x = a_1 \cos \alpha$,
 5. jeżeli oś y jest prostopadła do osi x , to rzut na oś y jest równy $a_y = a_1 \sin \alpha$.

Korzystając z tej metody znak rzutu wektora na oś otrzymuje się – po podstawieniu wartości funkcji $\cos \alpha$ (oraz $\sin \alpha$) – automatycznie. (Znak rzutu wektora na oś x wynika ze znaku funkcji $\cos \alpha$, a znak rzutu wektora na oś y wynika ze znaku funkcji $\sin \alpha$.)

Warto jeszcze zwrócić uwagę na – wygodny w praktyce – sposób określania rzutu wektora na oś w przypadku, gdy położenie wektora jest określone przy pomocy kąta odmierzanego w inny sposób (np. kątów $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ pokazanych na rys. 2.10).



Rysunek 2.10: Rzuty wektorów na oś – dla różnych sposobów określania kierunku wektora

• Wyznaczania rzutu wektora leżącego w płaszczyźnie xy na osie – metoda 2 (rys. 2.10):

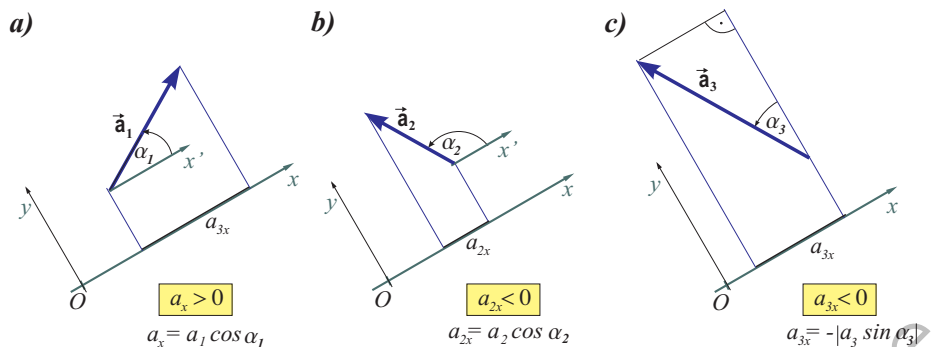
1. obrócić układ osi xy ,
2. przez początek wektora poprowadzić prostą równoległą do jednej z osi (np. x),
3. przez koniec wektora poprowadzić prostą równoległą do drugiej osi (y),
4. określić jeden z kątów i wyznaczyć przyprostokątne w otrzymanym trójkącie (przeciwprostokątna ma długość rzutowanego wektora),
5. wartość bezwzględna rzutu na oś x ($|a_x|$) jest równa długości boku trójkąta równoległego do tej osi; dodatkowo należy określić znak rzutu,
6. wartość bezwzględna rzutu na oś y ($|a_y|$) jest równa długości boku trójkąta równoległego do tej osi; dodatkowo należy określić znak rzutu,
7. znak rzutu wektora na oś jest dodatni, jeśli współrzędna początku wektora jest mniejsza od współrzędnej końca wektora (innymi słowy znak rzutu jest dodatni, jeśli koniec wektora znajduje się – w stosunku do jego początku – po stronie wskazywanej przez zwrot osi).

Z opisu drugiej metody wyznaczania rzutu wektora na oś wynika, że znak rzutu nie jest otrzymywany automatycznie. Należy go określić oddzielnie.

PRZYKŁAD 2.1.1

Wyznaczyć rzuty na oś x wektorów $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$, pokazanych na rysunku 2.11.

Dane są długości wektorów $a_1 = 3$, $a_2 = 2$, $a_3 = 4$ oraz kąty $\alpha_1 = \pi/6$, $\alpha_2 = 2\pi/3$, $\alpha_3 = \pi/6$.



Rysunek 2.11: Przykłady wyznaczania rzutów wektorów na oś – przy różnych sposobach określania kierunku wektora

W przypadku a) i b) – kąt odmierza się od osi x , a więc rzut na tę oś wyznacza się jako iloczyn długości wektora i cosinusa kąta jaki tworzy on z osią x . Korzystając z metody 1 otrzymuje się:

$$a_{1x} = a_1 \cos \alpha_1 = 3 \cdot \cos \frac{\pi}{6} = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}, \quad (2.2)$$

$$a_{2x} = a_2 \cos \alpha_2 = 2 \cdot \cos \frac{2}{3}\pi = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1 \quad (2.3)$$

(znak rzutu wynika tu ze znaku cosinusa kąta).

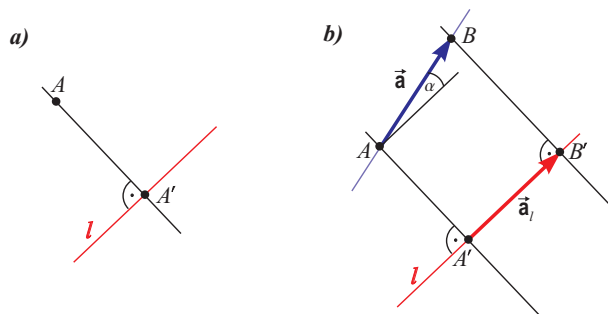
Kierunek trzeciego wektora jest określony względem prostej prostopadłej do osi x – wykorzystana jest metoda 2 (znak rzutu określamy na podstawie zwrotu wektora):

$$a_{3x} = - |a_3 \sin \alpha_3| = - |4 \cdot \sin \frac{\pi}{6}| = -4 \cdot \frac{1}{2} = -2. \quad \diamond \quad (2.4)$$

2.1.2 Rzut wektora na prostą

Rzutem prostokątnym wektora ($\vec{a} = \vec{AB}$) na prostą l jest nazywany **wektor** (\vec{a}_l), którego początek A' jest rzutem punktu A na prostą l , a koniec B' jest rzutem punktu B na tę prostą ($\vec{a}_l = \vec{A'B'}$). Miarą (a_l) rzutu wektora na prostą jest długość odcinka $A'B'$ (rys. 2.12b). Można ją określić jako

$$a_l = a \cos \alpha. \quad (2.5)$$

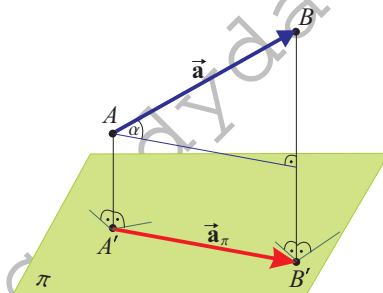


Rysunek 2.12: Rzuty: a) punktu na prostą; b) wektora na prostą

2.1.3 Rzut wektora na płaszczyznę

Rzutem prostokątnym wektora ($\vec{a} = \vec{AB}$) na płaszczyznę π jest nazywany wektor $\vec{a}_\pi = \vec{A'B'}$, którego początek A' jest rzutem punktu A na płaszczyznę⁵ π , a koniec B' jest rzutem punktu B na tę płaszczyznę. Miarą (a_π) rzutu wektora na płaszczyznę jest długość odcinka $A'B'$ (rys. 2.13).

$$a_\pi = a \cos \alpha, \quad (2.6)$$



Rysunek 2.13: Rzut wektora na płaszczyznę

2.1.4 Przedstawienie wektora za pomocą rzutów na osie

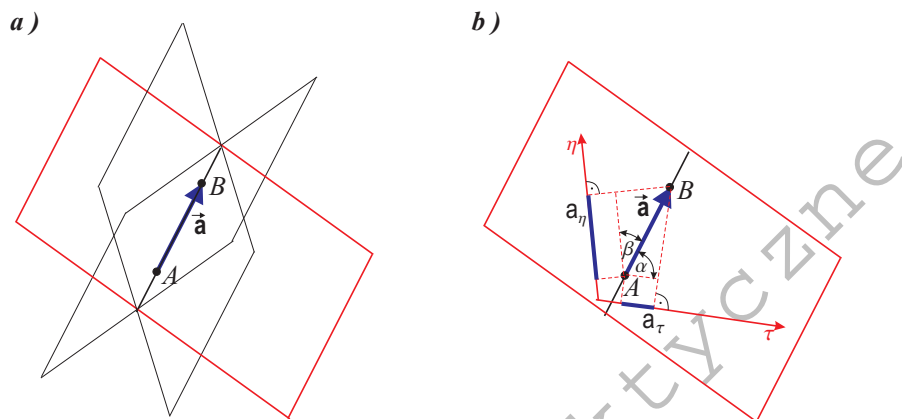
Dla wyrażenia wektora za pomocą wielkości skalarnych (takich jak długość wektora, współczynniki kierunkowe lub kąty określające kierunek wektora) korzystamy z możliwości przedstawienia wektora za pomocą jego rzutów na dwie

⁵Rzutem prostokątnym punktu A na płaszczyznę nazywa się punkt A' , w którym prosta przechodząca przez punkt A i prostopadła do płaszczyzny π przebija tę płaszczyznę.

osie leżące w jednej płaszczyźnie z wektorem lub za pomocą rzutów na trzy dowolne⁶ osie.

Przedstawienie wektora swobodnego za pomocą rzutów na dwie osie

Każdy wektor swobodny można w sposób jednoznaczny opisać za pomocą rzutów tego wektora na dwie nierównoległe osie, leżące w jednej płaszczyźnie z wektorem. Taki sposób przedstawienia wektora ilustruje rysunek 2.14.



Rysunek 2.14: Rzut wektora na osie leżące w jednej płaszczyźnie z wektorem: a) rodzina płaszczyzn, b) osie leżące w jednej z płaszczyzn

Przez wektor można poprowadzić rodzinę płaszczyzn w taki sposób, by wszystkie te płaszczyzny przecinały się wzdłuż prostej, która określa kierunek wektora (rys. 2.14a). W każdej z takich płaszczyzn można poprowadzić dwie nierównoległe osie (np. τ i η)⁷ i przedstawić wektor (\vec{a}) przy pomocy jego rzutów na osie:

$$\begin{aligned} a_\tau &= a \cos \alpha, \\ a_\eta &= a \cos \beta. \end{aligned} \quad (2.7)$$

W przypadku, gdy osie τ i η są wzajemnie prostopadłe ($\alpha + \beta = \pi/2$) – jak na rysunku 2.15 – otrzymuje się:

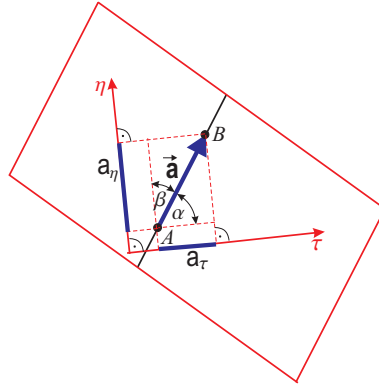
$$\begin{aligned} \beta &= \pi/2 - \alpha, \\ \cos \beta &= \cos(\pi/2 - \alpha) = \sin \alpha \end{aligned} \quad (2.8)$$

⁶Takie osie muszą jednak spełniać dwa warunki: nie mogą być do siebie równoległe i nie mogą leżeć w jednej płaszczyźnie.

⁷Sposób oznaczenia osi jest tu bez znaczenia. Symbolami τ , η będziemy posługiwać się w kinematyce do oznaczenia osi stycznej i normalnej do toru.

oraz

$$\begin{aligned} a_\tau &= a \cos \alpha, \\ a_\eta &= a \sin \alpha. \end{aligned} \quad (2.9)$$



Rysunek 2.15: Rzut wektora na dwie prostopadłe osie leżące w jednej płaszczyźnie z wektorem

Na podstawie rzutów wektora na dwie wzajemnie do siebie prostopadłe osie, tworzące z wektorem jedną płaszczyznę, można w prosty sposób wyznaczyć długość wektora

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_\eta^2}, \quad (2.10)$$

a także określić kierunek wektora – na podstawie wartości funkcji $\sin \alpha$ i $\cos \alpha$:

$$\cos \alpha = \frac{a_\tau}{a}, \quad \sin \alpha = \frac{a_\eta}{a}. \quad (2.11)$$

Na podstawie znaków funkcji $\sin \alpha$ i $\cos \alpha$ określa się ćwiartkę, w której znajduje się kąt α , a na podstawie wartości tych funkcji wyznacza się wartość kąta α .

Przedstawienie wektora swobodnego za pomocą rzutów na trzy osie

Jeśli chcemy przedstawić wektor swobodny za pomocą rzutów na osie nie leżące w jednej płaszczyźnie z wektorem, to można go w sposób jednoznaczny przedstawić za pomocą rzutów wektora na trzy osie. Kierunki tych osi nie mogą być równoległe, a ponadto osie nie mogą leżeć w jednej płaszczyźnie. Zazwyczaj wybiera się w takim przypadku osie kartezjańskiego układu współrzędnych prostokątnych xyz (rys. 2.16). Zaletą takiego układu współrzędnych jest prosty sposób wyznaczania wektora na podstawie jego rzutów.

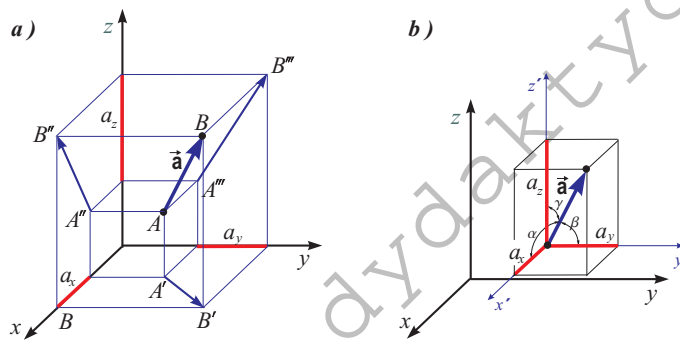
W przypadku, gdy znana jest długość (a) wektora (\vec{a}) oraz kąty (α, β, γ), jakie tworzy ten wektor z osiami układu współrzędnych kartezjańskich xyz (lub równoległe przesuniętego względem xyz układu $x'y'z'$), to rzuty wektora są określone jako:

$$\begin{aligned} a_x &= a \cos \alpha, \\ a_y &= a \cos \beta, \\ a_z &= a \cos \gamma. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Wektor pokrywa się z przekątną prostopadłościanu o bokach równych a_x, a_y, a_z (rys. 2.16b), a jego długość jest równa

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}, \quad (2.13)$$

przy czym α oznacza kąt skierowany pomiędzy osią x (x') a wektorem \vec{a} , β – kąt skierowany pomiędzy osią y (y') a wektorem \vec{a} , γ – kąt skierowany pomiędzy osią z (z') a wektorem \vec{a} .



Rysunek 2.16: Rzuty wektora: a) na płaszczyzny xz, xy, yz oraz osie x, y, z , b) rzuty na osie x', y', z'

Na podstawie wzorów (2.12)–(2.13) można udowodnić tożsamość

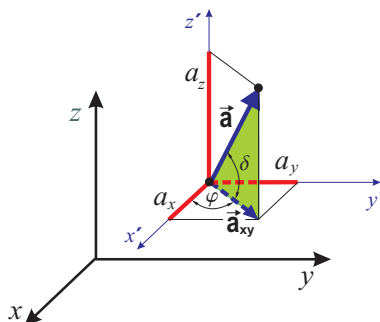
$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma \equiv 1. \quad (2.14)$$

Jeśli kierunek wektora jest określony za pomocą innych kątów – na przykład δ i φ (rys. 2.17), to rzutowanie przeprowadza się w dwóch etapach: najpierw wyznacza się rzut wektora \vec{a} na oś z i na płaszczyznę xy , a następnie wektor \vec{a}_{xy} rzuca się na osie x i y . Mamy zatem:

$$\begin{aligned} a_z &= a \cos(90 - \delta) = a \sin \delta, \\ |a_{xy}| &= a \cos \delta, \end{aligned} \quad (2.15)$$

a następnie

$$\begin{aligned} a_x &= |a_{xy}| \cos \varphi = a \cos \delta \cos \varphi, \\ a_y &= |a_{xy}| \cos(90 - \varphi) = a \cos \delta \cos(90 - \varphi) = a \cos \delta \sin \varphi. \end{aligned} \quad (2.16)$$



Rysunek 2.17: Rzuty wektora \vec{a} na płaszczyznę xy oraz na osie x, y, z

Ostatecznie otrzymuje się rzuty wektora \vec{a} na osie x, y, z (x', y', z') w postaci:

$$\begin{aligned} a_x &= a \cos \delta \cos \varphi, \\ a_y &= a \cos \delta \sin \varphi, \\ a_z &= a \sin \delta. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Przedstawienie wektora związanego z prostą za pomocą rzutów na osie

Każdy wektor związany z prostą można opisać za pomocą rzutów wektora na dwie nierównoległe osie, leżące w jednej płaszczyźnie z wektorem. Dodatkowo należy określić położenie prostej, wzdłuż której wektor działa.

Taki sam wektor – związany z prostą – można przedstawić za pomocą rzutów tego wektora na trzy dowolne, nierównoległe i nie leżące w jednej płaszczyźnie osie oraz podając położenie prostej, wzdłuż której wektor działa. Położenie prostej można określić przez podanie współrzędnych dowolnego punktu tej prostej.

Przedstawienie wektora związanego z punktem za pomocą rzutów na osie

Każdy wektor związany z punktem można opisać za pomocą rzutów wektora na dwie nierównoległe osie, leżące z tym wektorem w jednej płaszczyźnie. Dodatkowo należy określić położenie początku wektora.

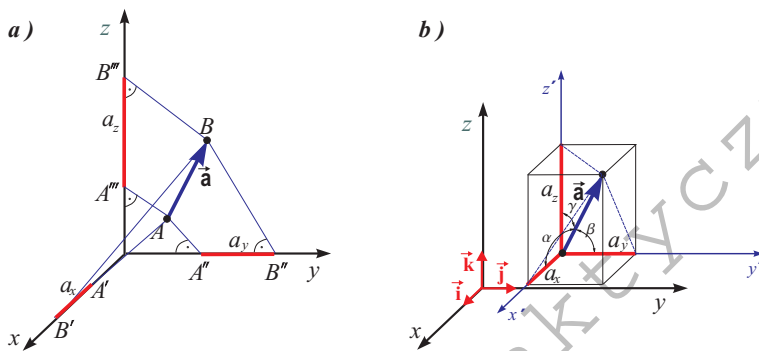
Wektor związany z punktem można też przedstawić za pomocą rzutów tego wektora na trzy dowolne, nierównoległe i nieleżące w jednej płaszczyźnie osie oraz podając położenie punktu, który jest początkiem wektora.

2.1.5 Współrzędne wektora

Współzrędnymi wektora \vec{a} w kartezjańskim układzie współrzędnych xyz nazywa się wielkości a_x, a_y, a_z określone jako różnice odpowiednich współrzędnych końca i początku wektora (rys. 2.18)

$$\begin{aligned} a_x &= x_{B'} - x_{A'} , \\ a_y &= y_{B''} - y_{A''} , \\ a_z &= z_{B'''} - z_{A'''} . \end{aligned} \quad (2.18)$$

Współzrędnne mają wartość dodatnią (znak "+"), jeśli $x_{B'} > x_{A'}$ ($x_{B''} > x_{A''}, x_{B'''} > x_{A'''});$ w przeciwnym przypadku mają wartość ujemną (znak "-").



Rysunek 2.18: Współzrędnne (a) i rzuty wektora (b)

Współzrędnne wektora są równoważne rzutom tego wektora na osie. Rzut wektora jest pojęciem wynikającym z geometrycznego przedstawienia wektora, a współzrędnna jest pojęciem wynikającym z analitycznego przedstawienia wektora (omawianego w następnym punkcie).

2.1.6 Analityczne przedstawienie wektora

Wektor swobodny można przedstawić za pomocą jego współrzędnych a_x, a_y, a_z (rzutów na osie xyz lub $x'y'z'$) w postaci

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} , \quad (2.19)$$

gdzie $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ są wersorami osi (wektorami jednostkowymi osi) układu współrzędnych xyz (rys. 2.18).

Dla jednoznacznego przedstawienia wektorów związanych z prostą lub z punktem, prócz wyrażenia o postaci (2.19), które pozwala na wyznaczenie długości, kierunku i zwrotu wektora, konieczne jest jeszcze określenie położenia wektora.

Położenie może być zadane przez wskazanie punktu położenia początku wektora lub punktu, przez który przechodzi prosta, z którą wektor jest związany.

2.1.7 Macierzowa reprezentacja wektora

Dogodną reprezentacją wektora (na przykład wektora \vec{a}) określonego w przestrzeni kartezjańskiej za pomocą współrzędnych a_x, a_y, a_z określonych w układzie xyz jest *macierz kolumnowa*⁸ o wymiarach (3×1) , oznaczona symbolem \mathbf{a}

$$\vec{a} \rightarrow \mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix}. \quad (2.20)$$

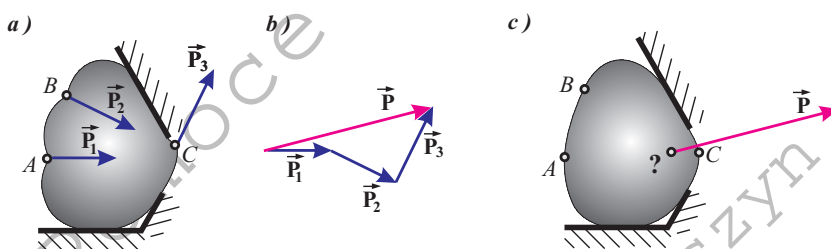
Przy wykonywaniu działań na wektorach, które realizowane są z pomocą komputera, bardzo przydatna jest reprezentacja wektora w postaci macierzy kwadratowej o wymiarach (3×3) – oznaczonej tu symbolem \mathbf{A}

$$\vec{a} \rightarrow \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.21)$$

2.2 Algebra wektorów

Zdefiniowane dalej działania na wektorach dotyczą wektorów swobodnych.

Wykonywanie niektórych działań dla wektorów związanych z prostą lub punktem może być bezsensowne pod względem fizycznym. Przykładem takich wektorów, których dodawanie nie ma sensu, są siły działające na odkształcalne ciało (rys. 2.19).



Rysunek 2.19: Przykład wektora związanego z punktem: a) ciało odkształcone pod wpływem sił $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3$; b) suma działających sił $\vec{P} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \vec{P}_3$; c) odkształcenia wywołane siłą \vec{P} przyłożoną w jednym punkcie

⁸Macierz kolumnowa jest niekiedy nazywana wektorem.

Efekt działania sił \vec{P}_1 , \vec{P}_2 i \vec{P}_3 jest widoczny na rys. 2.19a. Deformacje takiego ciała wywołane siłą \vec{P} , która jest sumą działających obciążeń ($\vec{P} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \vec{P}_3$), są zależne od punktu przyłożenia tej siły (rys. 2.19c) i różnią się w istotny sposób od odkształceń spowodowanych przyłożeniem poszczególnych sił w punktach A , B i C . Siła \vec{P} nie jest równoważna z układem sił \vec{P}_1 , \vec{P}_2 , \vec{P}_3 . Zastępowanie sił działających na ciało odkształcalne – w przypadku, gdy siły są przyłożone w różnych punktach ciała – wektorem równym sumie tych sił jest błędem (jest bezsensowne).

Działania na wektorach spełniają następujące prawa:

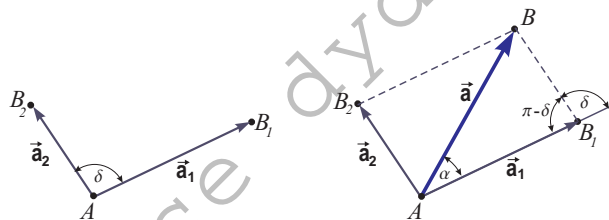
- przemienności i łączności dla dodawania,
- rozdzielności mnożenia względem dodawania,
- łączności mnożenia przez skalar,
- istnienia wektora zerowego i przeciwnego

i mają odpowiednio zdefiniowane iloczyny: skalarny i wektorowy [9].

2.2.1 Dodawanie wektorów

Dodawanie wektorów określa reguła równoległoboku (rys. 2.20).

- Suma dwóch wektorów o wspólnym początku jest wektorem o długości i kierunku przekątnej równoległoboku zbudowanego na tych wektorach. Początek wektora sumy pokrywa się z początkiem dodawanych wektorów.



Rysunek 2.20: Dodawanie dwóch wektorów ($\vec{a}_1 + \vec{a}_2 = \vec{a}$)

Długość wektora \vec{a} ($\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2$) można wyznaczyć na podstawie wzoru cosinusów jako

$$a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 - 2a_1a_2 \cos(\pi - \delta)} \quad (2.22)$$

lub

$$a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \cos \delta} \quad (2.23)$$

Kąt α określający kierunek wektora sumy w stosunku do kierunku wektora \vec{a}_1 – wyznaczony na podstawie wzoru sinusów ($\frac{a_2}{\sin \alpha} = \frac{a}{\sin(\pi-\delta)}$) – określa funkcja

$$\sin \alpha = \frac{a_2 \sin \delta}{a} . \quad (2.24)$$

Analityczne przedstawienie sumy wektorów \vec{a}_1 i \vec{a}_2 jest następujące

$$\vec{a}_1 + \vec{a}_2 = (a_{1x} + a_{2x}) \vec{i} + (a_{1y} + a_{2y}) \vec{j} + (a_{1z} + a_{2z}) \vec{k} = \vec{a} . \quad (2.25)$$

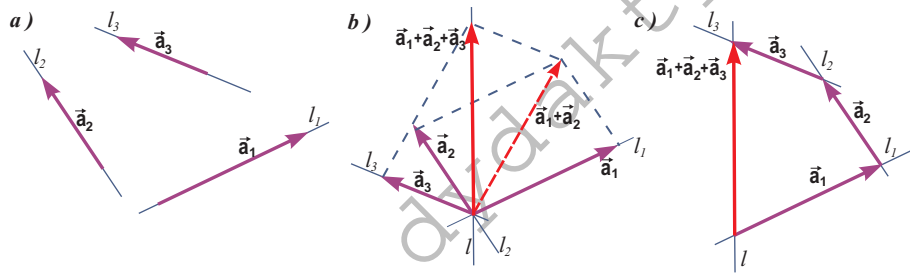
Współrzędne (lub rzuty na osie) wektora \vec{a} będącego sumą wektorów \vec{a}_1 i \vec{a}_2 są równe sumie współrzędnych wektorów składowych, to znaczy:

$$\vec{a}_1 + \vec{a}_2 = \vec{a} \iff a_x = a_{1x} + a_{2x}; \quad a_y = a_{1y} + a_{2y}; \quad a_z = a_{1z} + a_{2z} . \quad (2.26)$$

Odejmowanie wektorów \vec{a}_1 i \vec{a}_2 jest równoważne dodawaniu wektorów \vec{a}_1 i $-\vec{a}_2$, to znaczy

$$\vec{a}_1 - \vec{a}_2 = \vec{a}_1 + (-\vec{a}_2) = (a_{1x} - a_{2x}) \vec{i} + (a_{1y} - a_{2y}) \vec{j} + (a_{1z} - a_{2z}) \vec{k} . \quad (2.27)$$

Dodawaniu większej liczby wektorów sprowadza się do wielokrotnego użycia reguły równoległoboku (rys. 2.21b).



Rysunek 2.21: Dodawanie wektorów swobodnych: a) dodawane wektory \vec{a}_1 , \vec{a}_2 , \vec{a}_3 ; b) metoda równoległoboku; c) metoda wieloboku

Dodawanie wektorów metodą równoległoboku stosuje się w przypadku, gdy wektory mają wspólny początek lub, gdy można je przesunąć do wspólnego punktu.

Przy dodawaniu większej liczby wektorów swobodnych używa się bardziej efektywnego sposobu dodawania wektorów, jakim jest **metoda wieloboku** przedstawiona na rys. 2.21c.

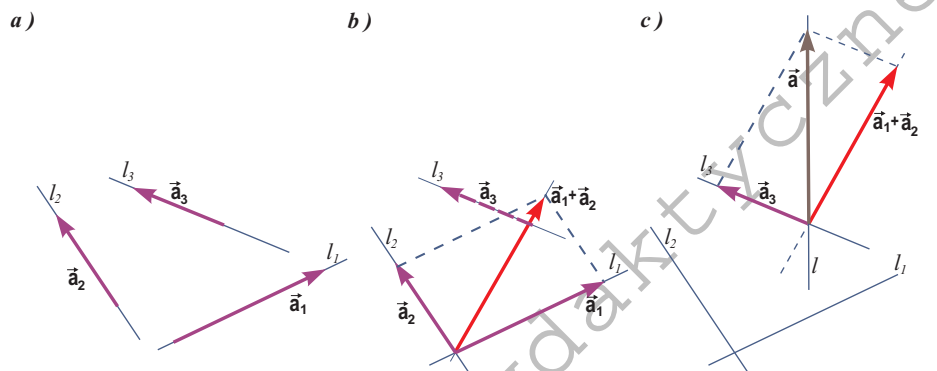
- **Suma wektorów swobodnych jest wektorem otrzymanym w taki sposób, że w końcu jednego wektora umieszcza się początek następnego. Początek pierwszego i koniec ostatniego wektora wyznaczają początek i koniec wektora sumy.**

Szereg wielkości wektorowych wykorzystywanych w mechanice ogólnej to wektory związane z prostą (np. siła, prędkość kątowna ciała sztywnego) lub z punktem (np. prędkość i przyspieszenie punktu ciała sztywnego o niezerowej prędkości kątowej). Dodawanie takich wektorów podlega dodatkowym rygorom.

Dodawanie wektorów związanych z prostą

Jak wspomniano wcześniej działania zdefiniowane dla wektorów dotyczą wektorów swobodnych (to jest takich, które mogą być przesunięte równoległe do dowolnego punktu przestrzeni).

Przy dodawaniu wektorów związanych z prostą stosuje się regułę równoległoboku, z tym, że możliwości przesuwania wektorów są ograniczone do prostych, wzdłuż których działają te wektory (rys. 2.22).



Rysunek 2.22: Dodawanie wektorów związanych z przecinającymi się prostymi l_1 , l_2 i l_3

Kolejne etapy dodawania wektorów związanych z prostymi są przedstawione na rys. 2.22b i rys. 2.22c. Wektor \vec{a} , który jest sumą trzech wektorów \vec{a}_1 , \vec{a}_2 i \vec{a}_3 leży na prostej l . Położenie tej prostej jest ściśle określone względem l_1 , l_2 i l_3 i nie zależy od kolejności w jakiej dodawane są wektory. (W przypadku wektorów swobodnych, których dodawanie zilustrowano rysunkiem 2.21, położenie prostej l jest dowolne).

Dodawanie wektorów związanych z punktem

Wektory związane z jednym punktem dodaje się tak jak wektory swobodne – metodą równoległoboku lub wieloboku (koniec ostatniego wektora wyznacza koniec wektora sumy).

Jeśli wektory są związane z punktami o różnym położeniu, to nie można ich dodawać.

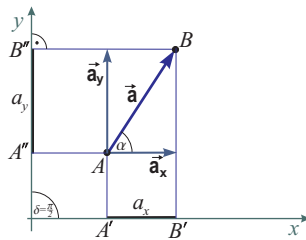
2.2.2 Składowe wektora

Składowymi wektora nazywamy taki zbiór wektorów, których suma jest równa temu wektorowi. Każdy wektor można przedstawić za pomocą składowych o różnych kierunkach. Liczba wektorów składowych może być dowolna, na przykład

$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \dots + \vec{a}_n, \quad \text{lub} \quad \vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} = \vec{a}_x + \vec{a}_y, \quad (2.28)$$

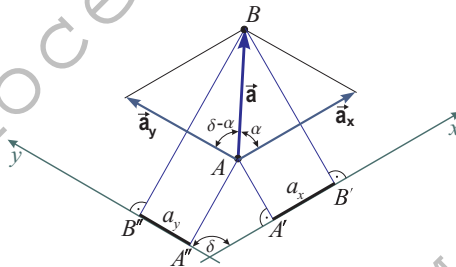
gdzie $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ są wektorami składowymi wektora \vec{a} , podobnie \vec{a}_x, \vec{a}_y .

Rozkład wektora na składowe nie jest działaniem jednoznacznym.



Rysunek 2.23: Składowe (\vec{a}_x, \vec{a}_y) i rzuty (a_x, a_y) wektora \vec{a} dla prostopadłych osi xy

We współrzędnych prostokątnych długości składowych o kierunkach osi są równe rzutom wektora na osie (rys. 2.23). Różnice pomiędzy rzutami wektora a wartościami składowych wektora są wyraźnie widoczne, jeśli przedstawiamy wektor w układzie współrzędnych ukośnokątnych (rys. 2.24).



Rysunek 2.24: Składowe (\vec{a}_x, \vec{a}_y) i rzuty (a_x, a_y) wektora \vec{a} dla osi xy nachylnych względem siebie pod kątem δ

2.2.3 Iloczyn wektora przez skalar

Iloczyn wektora \vec{a} przez skalar c jest wektorem \vec{b} o kierunku i zwrocie wektora mnożonego (\vec{a}), a długości b równej długości wektora \vec{a} pomnożonej przez skalar c

$$c\vec{a} = \vec{b}, \quad b = ca, \quad (2.29)$$

gdzie a, b są długościami wektorów \vec{a} i \vec{b} .

2.2.4 Iloczyn skalarny dwóch wektorów

Symbolem mnożenia skalarnego jest kropka "•" (lub "◦").

Iloczyn skalarny wektorów \vec{a} i \vec{b} jest wielkością skalarną (oznaczoną tu jako c) określoną zależnością

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = c = ab \cos(\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})) = ab \cos \alpha = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z, \quad (2.30)$$

w której α jest kątem pomiędzy wektorami \vec{a} i \vec{b} , a i b są długościami, a a_x, a_y, \dots, b_z współrzędnymi tych wektorów.

Iloczyn skalarny dwóch wektorów w mechanice jest wykorzystywany do wyznaczania rzutu wektora na oś, pracy siły, a także przy definiowaniu energii kinetycznej.

2.2.5 Iloczyn wektorowy dwóch wektorów

Symbolem mnożenia wektorowego jest znak "×".

Iloczyn wektorowy dwóch wektorów \vec{a} i \vec{b} jest wektorem (oznaczonym tu jako \vec{d})

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{d}, \quad (2.31)$$

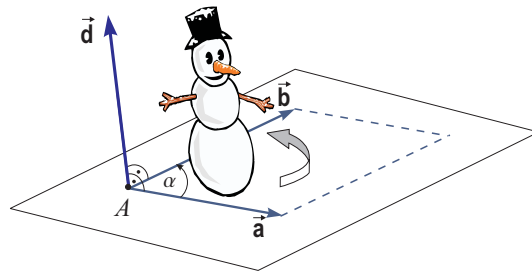
o następujących własnościach:

- wektor \vec{d} jest prostopadły do wektora \vec{a} i wektora \vec{b} ,
- długość wektora \vec{d} jest równa⁹

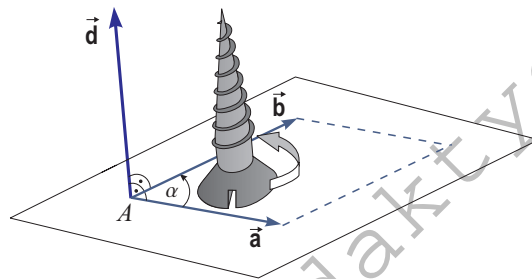
$$d = |\vec{d}| = ab \sin(\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})) = ab \sin \alpha, \quad \alpha \in (0, \pi) \quad (2.32)$$

- zwrot wektora \vec{d} jest taki, że trójka wektorów ($\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}$) stanowi układ prawoskrętny (zwrot wektora \vec{d} można też określić korzystając z reguły śruby prawoskrętnej lub reguły prawej dłoni); sposób określania zwrotu wektora \vec{d} ilustrują rysunki 2.25 – 2.27.

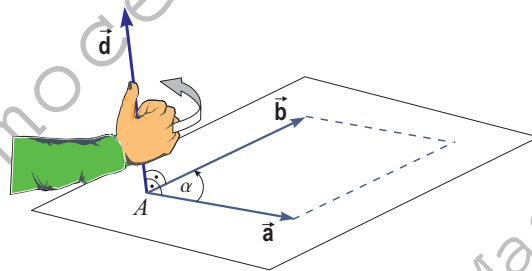
⁹Wartość iloczynu wektorowego $d = ab \sin \alpha$ jest równa polu równoległoboku zbudowanego na wektorach \vec{a} i \vec{b} .



Rysunek 2.25: Zwrot wektora iloczynu wektorowego dwóch wektorów o wspólnym początku ($\vec{d} = \vec{a} \times \vec{b}$)



Rysunek 2.26: Wyznaczanie zwrotu iloczynu wektorowego wektorów ($\vec{a} \times \vec{b} = \vec{d}$) – reguła śruby prawoskrętnej



Rysunek 2.27: Wyznaczanie zwrotu iloczynu wektorowego wektorów ($\vec{a} \times \vec{b} = \vec{d}$) – reguła prawej dłoni

Układ wektorów $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{d})$ jest nazywany prawoskrętnym, jeśli dla obserwatora ustawionego równoległe do wektora \vec{d} (rys. 2.25) obrót wektora \vec{a} do wektora \vec{b} (o kąt mniejszy niż π) jest przeciwny do ruchu wskazówek zegara.

Zwrot wektora \vec{d} jest zgodny z przemieszczeniem śruby (o gwincie prawoskrętnym) obracanej (o kąt mniejszy niż π) od wektora \vec{a} do wektora \vec{b} (rys. 2.26).

Zwrot wektora \vec{d} wskazuje kciuk prawej dłoni umieszczonej nad wektorem \vec{a} w taki sposób, by palce wskazywały wektor \vec{b} (rys. 2.27).

Podstawowe własności iloczynu wektorowego dwóch wektorów są następujące:

- spełnia prawo rozdzielności względem dodawania $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$,
- nie spełnia prawa przemienności, gdyż $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$,
- spełnia prawo łączności przy mnożeniu przez skalar $(n\vec{a}) \times \vec{b} = n(\vec{a} \times \vec{b})$.

Bardzo przydatne jest przedstawienie iloczynu wektorowego za pomocą wyznacznika trzeciego stopnia

$$\vec{d} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \quad (2.33)$$

lub wyznaczników drugiego stopnia

$$\vec{d} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \vec{k}. \quad (2.34)$$

Wyznaczniki zawierają współrzędne mnożonych wektorów w prostokątnym, prawoskrętnym układzie współrzędnych xyz . Po rozwinięciu wyznaczników otrzymuje się analityczną postać wektora \vec{d}

$$\vec{d} = \vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y) \vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{k}. \quad (2.35)$$

Taki sposób przedstawienia iloczynu wektorowego dwóch wektorów zawiera wszystkie informacje dotyczące wektora $\vec{d} = \vec{a} \times \vec{b}$, to jest w sposób jednoznaczny określa jego wartość, kierunek i zwrot.

Wektor, który otrzymuje się na podstawie iloczynu wektorowego dwóch wektorów swobodnych jest wektorem swobodnym.

W zagadnieniach mechaniki iloczyn wektorowy jest używany do mnożenia wektorów związanych z prostą lub z punktem. Mnożone wektory mogą leżeć na prostych skośnych. Rezultat mnożenia jest zazwyczaj wektorem związanym z punktem (np.: moment siły względem punktu, składowe prędkości i przyspieszenia punktu ciała sztywnego, kręt). Wynika to z fizycznej interpretacji wielkości wyznaczanej na podstawie iloczynu wektorowego.

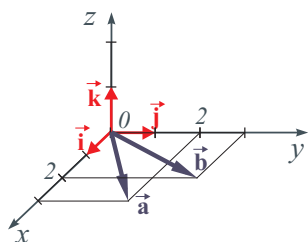
PRZYKŁAD 2.2.2

Dla zadanych wektorów $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + 0\vec{k}$ oraz $\vec{b} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 0\vec{k}$ wyznaczyć ich iloczyn skalarny i wektorowy. Narysować wektor $\vec{d} = \vec{a} \times \vec{b}$.

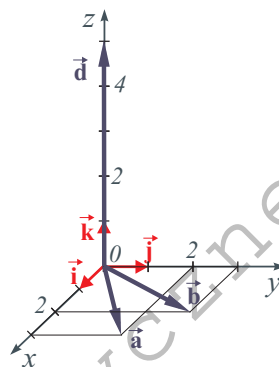
ROZWIĄZANIE

Zadane wektory są pokazane na rysunku 2.28a.

a)



b)



Rysunek 2.28: Wektory \vec{a} i \vec{b} oraz \vec{d}

Do wyznaczenia iloczynu skalarnego $c = \vec{a} \cdot \vec{b}$ użyty będzie wzór (2.30)

$$c = \vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 0 \cdot 0 = 12.$$

Iloczyn wektorowy $\vec{d} = \vec{a} \times \vec{b}$ wyznaczmy, obliczając wartość wyznacznika trzeciego stopnia, określonego wzorem (2.33)

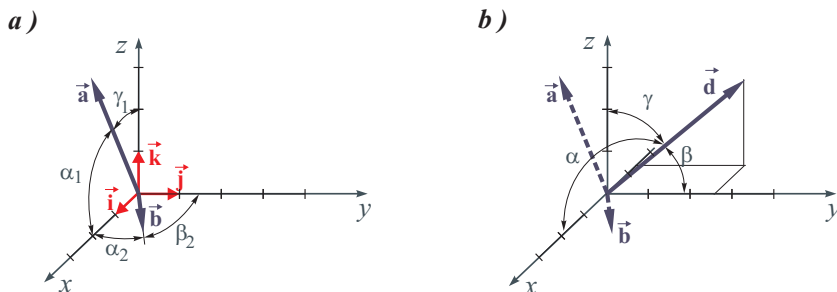
$$\vec{d} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = (9 - 4) \vec{k} = 5 \vec{k}.$$

Wynik tego mnożenia (wektor $\vec{d} = \vec{a} \times \vec{b}$) jest przedstawiony na rys. 2.28b. \diamond

PRZYKŁAD 2.2.3

Dane są wektory \vec{a} i \vec{b} , przy czym: $a = 3$, $\alpha_1 = \pi/6$, $\beta_1 = \pi/2$, $\gamma_1 = \pi/3$, $b = 2$, $\alpha_2 = \pi/6$, $\beta_2 = \pi/3$, $\gamma_2 = \pi/2$ (rys. 2.29a). Wyznaczyć iloczyn skalarny oraz wektorowy wektorów \vec{a} i \vec{b} . Narysować wektor $\vec{d} = \vec{a} \times \vec{b}$ i wyznaczyć cosinusy kątów określających kierunki tego wektora.

ROZWIĄZANIE



Rysunek 2.29: Wektory \vec{a} i \vec{b} oraz \vec{d}

Przed wykonaniem mnożenia wektorów zostaną określone rzuty tych wektorów na osie (współrzędne wektorów):

$$\begin{aligned} a_x &= a \cos \alpha_1 = 3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3}{2}\sqrt{2}, \\ a_y &= a \cos \beta_1 = 3 \cdot 0 = 0, \\ a_z &= a \cos \gamma_1 = 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_x &= b \cos \alpha_2 = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}, \\ b_y &= b \cos \beta_2 = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1, \\ b_z &= b \cos \gamma_2 = 2 \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Iloczyn skalarny wektorów (zgodnie z (2.30))

$$c = \vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{3} + 0 \cdot 1 + \frac{3}{2} \cdot 0 = \frac{3}{2}\sqrt{6}.$$

Iloczyn wektorowy wektorów (wzór (2.33))

$$\vec{d} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{3}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{3}{2} \\ \sqrt{3} & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{3}{2}\vec{i} + \frac{3}{2}\sqrt{3}\vec{j} + \frac{3}{2}\sqrt{2}\vec{k}.$$

Wynik tego mnożenia (wektor \vec{d}) jest przedstawiony na rys. 2.29b.

Cosinusy kierunkowe wektora określa się na podstawie wartości rzutów wektora na osie oraz długości wektora. Długość wektora \vec{d}

$$d = \sqrt{d_x^2 + d_y^2 + d_z^2} = \sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{27}{2}} \cong 3,674.$$

Cosinusy kierunkowe wektora \vec{d} określają zależności:

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= \frac{d_x}{d} = \frac{-\frac{3}{2}}{\sqrt{\frac{27}{2}}} \cong -0,408, \\ \cos \beta &= \frac{d_y}{d} = \frac{\frac{3}{2}\sqrt{3}}{\sqrt{\frac{27}{2}}} \cong 0,707, \\ \cos \gamma &= \frac{d_z}{d} = \frac{\frac{3}{2}\sqrt{2}}{\sqrt{\frac{27}{2}}} \cong 0,577. \quad \diamond\end{aligned}$$

Podwójny iloczyn wektorowy

Iloczyn wektorowy jest działaniem na dwóch wektorach. Wektor otrzymany w wyniku tego działania może być mnożony przez kolejny wektor. Taką operację – nazywaną podwójnym iloczynem wektorowym – można przeprowadzać etapami. Podwójny iloczyn wektorowy można też przedstawić za pomocą dwóch iloczynów skalarnych¹⁰

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} (\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c} (\vec{a} \cdot \vec{b}). \quad (2.36)$$

Iloczyn mieszany trzech wektorów

Iloczynem mieszanym trzech wektorów będziemy nazywali skalarny iloczyn jednego wektora przez wektor będący wynikiem wektorowego mnożenia dwóch wektorów.

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = a_x (b_y c_z - b_z c_y) + a_y (b_z c_x - b_x c_z) + a_z (b_x c_y - b_y c_x). \quad (2.37)$$

Wynikiem tego działania jest wielkość skalarna.

Iloczyn mieszany trzech wektorów można przedstawić za pomocą następującego wyznacznika

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \quad (2.38)$$

2.3 Moment wektora względem punktu

Pojęcie momentu wektora względem punktu jest używane w mechanice wielokrotnie. Jednym z podstawowych pojęć statyki jest **moment siły względem**

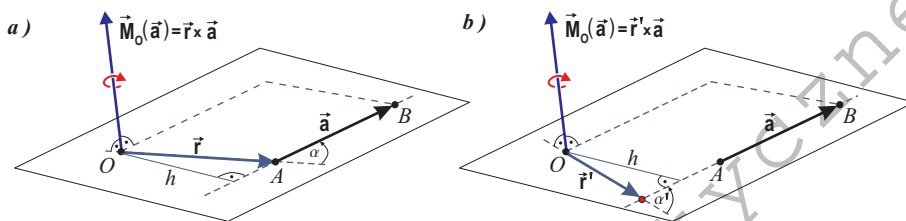
¹⁰Wyprowadzenie tego wzoru można znaleźć np. w pracy [15].

punktu. W dynamice ważnym pojęciem jest **moment pędu względem punktu.** Również w kinematyce wykorzystywane są wielkości, które zdefiniowane są w analogiczny sposób, choć nazwy takie jak **moment wektora prędkości kątowej względem punktu** są rzadko używane.

Powszechnie przyjmuje się następującą definicję momentu wektora względem punktu

$$\vec{M}_O(\vec{a}) = \vec{r} \times \vec{a}, \quad (2.39)$$

przy czym \vec{r} jest wektorem poprowadzonym od punktu O do początku wektora \vec{a} (rys. 2.30a).



Rysunek 2.30: Moment wektora \vec{a} względem punktu O

Zauważmy, że taki sam rezultat otrzymuje się, prowadząc wektor \vec{r}' od punktu O do dowolnego punktu leżącego na prostej o kierunku wektora \vec{a} (rys. 2.30b). Wynikiem mnożenia wektorów $\vec{r} \times \vec{a}$ oraz $\vec{r}' \times \vec{a}$ jest wektor prostopadły do płaszczyzny, w której leżą te wektory, a jego długość jest równa

$$M_o = rP \sin \alpha = r'P \sin \alpha' = Ph, \quad (2.40)$$

przy czym (rys. 2.30)

$$h = r \sin \alpha = r' \sin \alpha'. \quad (2.41)$$

Z własności iloczynu wektorowego ($\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$) wynika, że moment wektora względem punktu (2.39) można przedstawić jako $\vec{M}_O(\vec{a}) = -\vec{a} \times \vec{r} = \vec{a} \times (-\vec{r})$ lub w postaci $\vec{M}_O(\vec{a}) = \vec{a} \times \vec{r}_O$, gdzie wprowadzono wektor \vec{r}_O przeciwny do \vec{r} ($\vec{r}_O = -\vec{r}$).

W następnych podrozdziałach szczegółowo jest omówione pojęcie momentu siły względem punktu. Momenty innych wektorów (np. prędkości kątowej, pędu) wyznacza się w taki sam sposób jak moment siły.

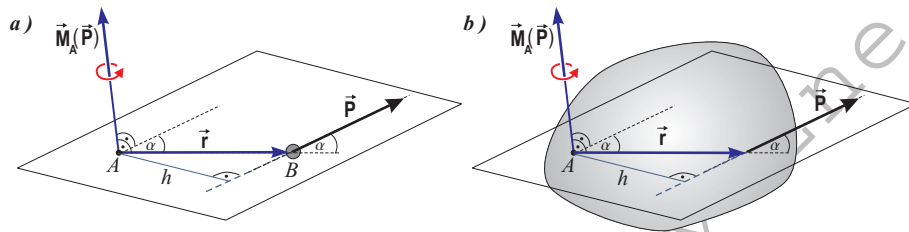
2.3.1 Moment siły względem punktu

Moment siły \vec{P} , działającej na punkt materialny (B) (rys. 2.31a) lub na ciało (rys. 2.31b), względem dowolnego punktu A , jest zdefiniowany jako

$$\vec{M}_A = \vec{r} \times \vec{P} \quad (2.42)$$

gdzie \vec{r} jest wektorem poprowadzonym z punktu A do początku wektora \vec{P} (albo do dowolnego innego punktu leżącego na prostej o kierunku wektora \vec{P}).

Moment siły względem punktu **jest wektorem związanym z punktem** (z tym punktem, względem którego moment jest określony). Z tego względu na rysunku początek wektora momentu \vec{M}_A jest umieszczony w punkcie A .



Rysunek 2.31: Moment siły \vec{P} względem punktu A ($\vec{M}_A = \vec{r} \times \vec{P}$)

Tę samą wielkość (\vec{M}_A) można przedstawić w postaci

$$\vec{M}_A = \vec{P} \times \vec{r}_A \quad (2.43)$$

gdzie $\vec{r}_A = -\vec{r}$ (\vec{r}_A jest wektorem przeciwnym do \vec{r}).

Wartość (długość) wektora momentu siły względem punktu wyznacza się – na podstawie definicji iloczynu wektorowego – jako

$$M_A = r P \sin \alpha = P h \quad (2.44)$$

przy czym α (rys. 2.31) jest kątem pomiędzy wektorami \vec{r} i \vec{P} ($\alpha \in \langle 0, \pi \rangle$).

Moment siły względem punktu A można wyrazić poprzez współrzędne (r_x, r_y, r_z) i (P_x, P_y, P_z) wektorów \vec{r} i \vec{P} w prawoskrętnym układzie współrzędnych xyz w postaci (por. (2.35))

$$\vec{M}_A = (r_y P_z - r_z P_y) \vec{i} + (r_z P_x - r_x P_z) \vec{j} + (r_x P_y - r_y P_x) \vec{k} \quad (2.45)$$

Przy takim przedstawieniu wektora momentu jego długość M_A jest określona zależnością

$$M_A = \sqrt{(r_y P_z - r_z P_y)^2 + (r_z P_x - r_x P_z)^2 + (r_x P_y - r_y P_x)^2} \quad (2.46)$$

PRZYKŁAD 2.3.4

Zadana jest wartość siły \vec{P} ($P = 3 \text{ N}$), a jej kierunek jest określony za pomocą kątów $\delta = \pi/4$ oraz $\varphi = \pi/3$. Początek wektora \vec{P} znajduje się w punkcie $B(0, 2, 0)$ (rys. 2.32a). Wyznaczyć moment siły \vec{P} względem punktu $O(0, 0, 0)$. Narysować wektor momentu $\vec{M}_O(\vec{P})$.

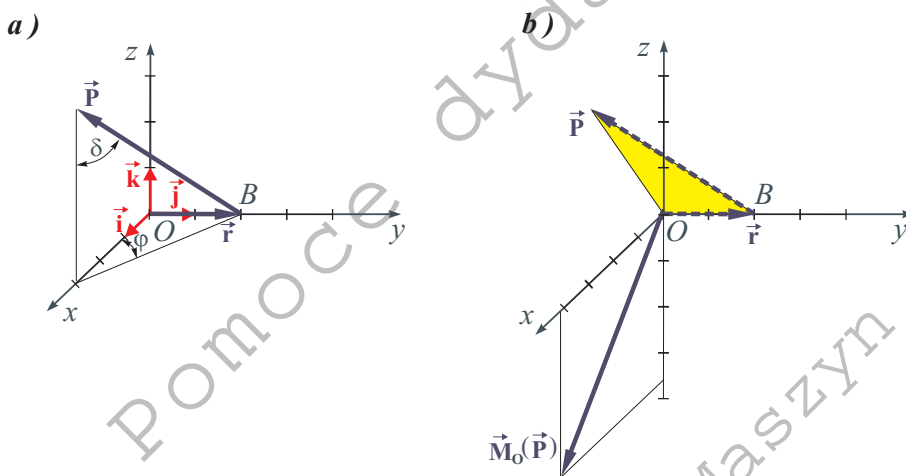
ROZWIĄZANIE

Moment siły względem punktu jest określony za pomocą iloczynu wektorowego $\vec{M}_O(\vec{P}) = \vec{r} \times \vec{P}$. Na podstawie zadanych wartości P , δ , φ oraz współrzędnych punktu B można określić współrzędne wektorów \vec{P} i \vec{r} (rys. 2.32):

$$P_x = P \sin \delta \cos \varphi = 3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{4}\sqrt{6},$$
$$P_y = -P \sin \delta \sin \varphi = -3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{3}{4}\sqrt{2},$$
$$P_z = P \cos \delta = 3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3}{2}\sqrt{2}$$

oraz

$$r_x = 0, \quad r_y = 2, \quad r_z = 0.$$



Rysunek 2.32: Siła \vec{P} i jej moment względem punktu O

Iloczyn wektorowy $\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{P}$ wyznaczymy, obliczając wartość wyznacz-

nika trzeciego stopnia określonego wzorem (2.33)

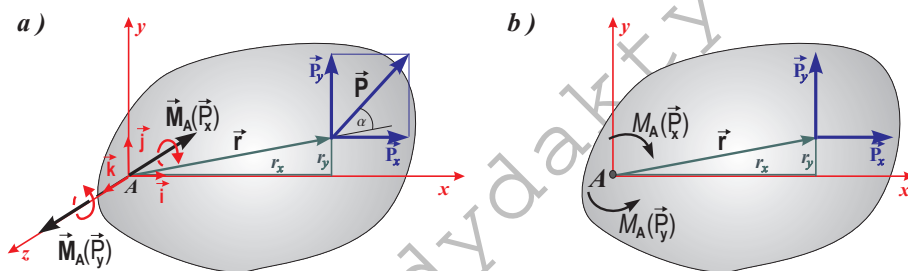
$$\begin{aligned}\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{P} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ P_x & P_y & P_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 2 & 0 \\ \frac{3}{4}\sqrt{6} & -\frac{3}{4}\sqrt{2} & \frac{3}{2}\sqrt{2} \end{vmatrix} = \\ &= 2 \cdot \frac{3}{2}\sqrt{2} \vec{i} + 0 \vec{j} - 2 \cdot \frac{3}{4}\sqrt{6} \vec{k} = 4,24 \vec{i} - 3,67 \vec{k} .\end{aligned}$$

Wektor \vec{M}_O , to jest moment siły \vec{P} względem punktu O , jest wektorem o współrzędnych $(3\sqrt{2}, 0, -\frac{3}{2}\sqrt{6})$. Jego długość jest równa

$$M_o = \sqrt{(3\sqrt{2})^2 + (-\frac{3}{2}\sqrt{6})^2} = 3\sqrt{\frac{7}{2}} \cong 5,612 \text{ Nm} .$$

Wektor \vec{M}_O jest przedstawiony na rys. 2.32b. \diamond

Moment siły względem punktu – przypadek szczególny



Rysunek 2.33: "Dodatni i "ujemny" moment siły \vec{P} leżącej w płaszczyźnie xy względem punktu A w tej płaszczyźnie

W przypadku, gdy siła \vec{P} i punkt A leżą w płaszczyźnie xy ($P_z = 0, r_z = 0$), to moment siły względem punktu A jest wektorem prostopadłym do tej płaszczyzny (ma kierunek osi z – rys. 2.33a) i jest określony wzorem

$$\vec{M}_A = (r_x P_y - r_y P_x) \vec{k} . \quad (2.47)$$

Siłę \vec{P} można przedstawić w postaci sumy sił $\vec{P} = \vec{P}_x + \vec{P}_y$ (lub jako $\vec{P} = P_x \vec{i} + P_y \vec{j}$). Z zależności (2.47) wynika, że moment siły \vec{P}_y , zwróconej zgodnie z osią y , która powoduje obrót¹¹ ciała sztywnego względem osi z w lewo (rys. 2.33b), jest

¹¹Zakładamy przy tym, że ciało ma możliwość obracania się wokół osi z przechodzącej przez punkt A .

”**dodatni**” (ma zwrot zgodny z osią z – rys. 2.33a). Moment siły $\vec{\mathbf{P}}_x$, o zwrocie zgodnym ze zwrotem osi x , która usiłuje obracać ciało sztywne względem osi z w **prawo**, jest ”**ujemny**” (ma zwrot przeciwny do osi z).

W sytuacjach analogicznych do pokazanej na rysunku 2.33 można stosować poniższą regułę dotyczącą znaku (zwrotu) wektora momentu siły względem punktu A .

- **Moment siły powodującej obrót ciała (dookoła osi przechodzącej przez punkt A) w lewo jest ”dodatni”, a moment siły usiłującej obrócić ciało w prawo jest ”ujemny”.**

Wektor momentu $\vec{\mathbf{M}}_A$ określony wzorem (2.47) można przedstawić w formie

$$\vec{\mathbf{M}}_A = \pm |P_y r_x - P_x r_y| \vec{\mathbf{k}} = \pm M_A \vec{\mathbf{k}}, \quad (2.48)$$

gdzie ” \pm ” oznacza znak (dodatni lub ujemny) wyrażenia $(r_x P_y - r_y P_x)$, natomiast $|P_y r_x - P_x r_y|$ oznacza wartość bezwzględną tego wyrażenia, czyli długość wektora $\vec{\mathbf{M}}_A$ – wyznaczoną na podstawie (2.46)

$$M_A = \sqrt{(r_x P_y - r_y P_x)^2} = |P_y r_x - P_x r_y| > 0. \quad (2.49)$$

Przedstawienie wektora momentu siły $\vec{\mathbf{P}}$ względem punktu A w postaci (2.48) powoduje, że znak wektora momentu musi być określony oddzielnie (na przykład na podstawie podanej wcześniej reguły).

Przy rozwiązywaniu zadań wymagających określenia sumy momentów pochodzących od sił leżących w jednej płaszczyźnie można ograniczyć obliczenia do wyznaczenia wartości i znaku wektora momentu sił względem punktu leżącego w tej samej płaszczyźnie.

Wartość i znak wektora momentu można określić dwiema metodami:

– metoda pierwsza polega na wykorzystaniu wyrażenia 2.47, które generuje zarówno wartość jak i znak tego wektora na podstawie rzutów P_x, P_y, r_x, r_y

$$\pm M_A = P_y r_x - P_x r_y, \quad (2.50)$$

– metoda druga polega na wykorzystaniu długości rzutów $|P_x|, |P_y|, |r_x|, |r_y|$ do obliczenia wartości składników momentu $|P_y| |r_x|$ oraz $|P_x| |r_y|$, a znaki tych składników są określane na podstawie przytoczonej reguły dotyczącej znaków

$$\pm M_A = \pm |P_y| |r_x| \pm |P_x| |r_y|. \quad (2.51)$$

2.3.2 Moment siły określonej za pomocą składowych

Jeśli siła $\vec{\mathbf{P}}$ jest określona poprzez siły składowe ($\vec{\mathbf{P}} = \vec{\mathbf{P}}_1 + \vec{\mathbf{P}}_2 + \dots + \vec{\mathbf{P}}_n$), to jej moment względem dowolnego punktu A można przedstawić jako

$$\vec{\mathbf{M}}_A = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{P}} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{P}}_1 + \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{P}}_2 + \dots + \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{P}}_n, \quad (2.52)$$

lub

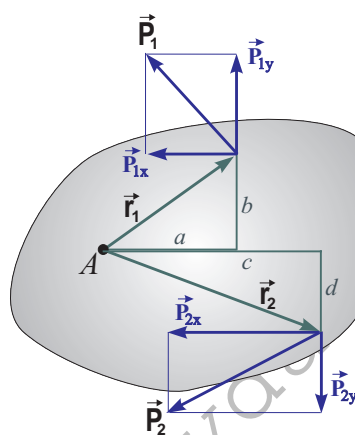
$$\vec{M}_A(\vec{P}) = \vec{M}_A(\vec{P}_1) + \vec{M}_A(\vec{P}_2) + \dots + \vec{M}_A(\vec{P}_n). \quad (2.53)$$

Na podstawie wzoru (2.53) można sformułować twierdzenie

- **Moment siły \vec{P} ($\vec{P} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \dots + \vec{P}_n$) względem dowolnego punktu jest równy sumie momentów sił składowych $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{P}_n$ względem tego punktu.**

Twierdzenie to zostało udowodnione przez Varignoną (w roku 1687) – na drodze geometrycznej – i jest nazywane twierdzeniem Varignoną.

PRZYKŁAD 2.3.5



Rysunek 2.34: Przykład wyznaczania momentów sił leżących w jednej płaszczyźnie

Wyznaczyć wartość i znak wektora sumy momentów sił \vec{P}_1 i \vec{P}_2 względem punktu A (rys. 2.34). Dane są wartości składowych tych sił: $|\vec{P}_{1x}| = 6 \text{ N}$; $|\vec{P}_{1y}| = 7 \text{ N}$; $|\vec{P}_{2x}| = 10 \text{ N}$; $|\vec{P}_{2y}| = 6 \text{ N}$ oraz odległości: $a = 0,9 \text{ m}$; $b = 0,6 \text{ m}$; $c = 1,4 \text{ m}$; $d = 0,5 \text{ m}$.

Do rozwiązania zadania zostaną wykorzystane zależności (2.50) i (2.51) pozwalające na wyznaczenie wartości i znaku wektora sumy momentów sił. Przy tak określonych danych jak w tym zadaniu wygodniejsza jest druga z podanych metod.

Na podstawie (2.51), po podstawieniu zadanych wartości: $|r_{1x}| = a$, $|r_{1y}| = b$, $|r_{2x}| = c$, $|r_{2y}| = d$, otrzymuje się:

$$\pm M_A(\vec{P}_1) = \pm |P_{1y}| |r_{1x}| \pm |P_{1x}| |r_{1y}| = \pm 7 \cdot 0,9 \pm 6 \cdot 0,6 ;$$

$$\pm M_A(\vec{P}_2) = \pm |P_{2y}| |r_{2x}| \pm |P_{2x}| |r_{2y}| = \pm 6 \cdot 1,4 \pm 10 \cdot 0,5 .$$

Wykorzystując regułę (podaną na stronie 53) pozwalającą na określenie znaków – na podstawie kierunku obrotu ciała, względem punktu A , wymuszanego działającymi siłami – mamy:

$$\begin{aligned} \pm M_A(\vec{P}_1) &= +6,3 + 3,6 = 9,9 \text{ Nm} , \\ \pm M_A(\vec{P}_2) &= -8,4 - 5,0 = -13,4 \text{ Nm} , \\ \pm M_A(\vec{P}_1) \pm M_A(\vec{P}_2) &= 9,9 - 13,4 = -3,5 \text{ Nm} . \end{aligned}$$

Taki sam wynik otrzymuje się, używając pierwszej metody (wzór (2.50)). W tym przypadku należy najpierw określić znaki rzutów poszczególnych wektorów. Na podstawie rysunku 2.34 i danych wartości liczbowych znajdujemy:

$$\begin{aligned} r_{1x} = a = 0,9 ; \quad r_{1y} = b = 0,6 ; \\ r_{2x} = c = 1,4 ; \quad r_{2y} = -d = -0,5 ; \\ P_{1x} = -6 ; \quad P_{1y} = 7 ; \\ P_{2x} = -10 ; \quad P_{2y} = -6 . \end{aligned}$$

Po podstawieniu do (2.50) otrzymuje się:

$$\begin{aligned} \pm M_A(\vec{P}_1) &= P_{1y}r_{1x} - P_{1x}r_{1y} = 7 \cdot 0,9 - (-6) \cdot 0,6 = \\ &= 6,3 + 3,6 = 9,9 \text{ Nm} , \\ \pm M_A(\vec{P}_2) &= P_{2y}r_{2x} - P_{2x}r_{2y} = -6 \cdot 1,4 - (-10) \cdot (-0,5) = \\ &= -8,4 - 5,0 = -13,4 \text{ Nm} , \\ \pm M_A(\vec{P}_1) \pm M_A(\vec{P}_2) &= 9,9 - 13,4 = -3,5 \text{ Nm} . \end{aligned}$$

Wartość wektora sumy momentów sił \vec{P}_1 i \vec{P}_2 względem punktu A jest równa $3,5 \text{ Nm}$, a jego znak jest ujemny (działające siły usiłują obrócić ciało w prawo).
◇

2.4 Moment siły względem osi

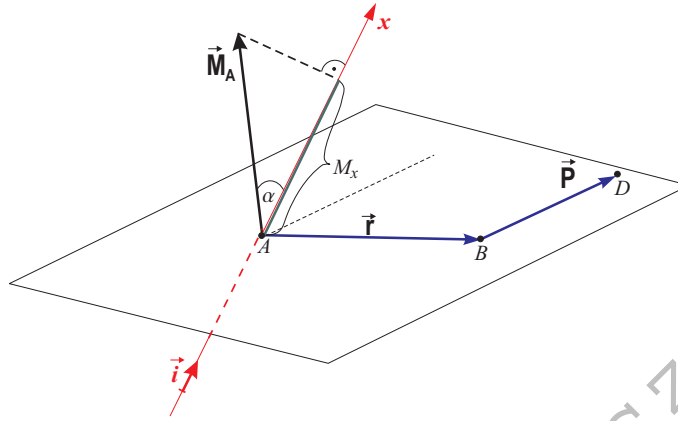
Oprócz pojęcia momentu siły względem punktu w mechanice wprowadza się pojęcie momentu siły względem osi. W odróżnieniu od momentu siły względem punktu (który jest wielkością wektorową) moment siły względem osi jest wielkością skalarną¹².

Na rys. 2.35 jest przedstawiony moment siły \vec{P} względem osi x . Jest on oznaczony symbolem M_x . Dodatkowo pokazany jest wektor \vec{M}_A oznaczający moment siły \vec{P} względem punktu A leżącego na osi x .

- **Moment siły względem osi jest równy rzutowi, na tę oś, wektora momentu siły względem dowolnego punktu leżącego na osi.**

¹²W niektórych pracach dotyczących mechaniki moment siły względem osi jest uważany za wektor.

$$M_x = M_A \cos \alpha, \quad (2.54)$$



Rysunek 2.35: Moment siły \vec{P} względem osi x (M_x)

Moment (M_x) siły względem osi x można przedstawić za pomocą iloczynu skalarnego wektora momentu siły (\vec{M}_A) względem dowolnie obranego na tej osi punktu (A) i wektora jednostkowego osi x (wersora \vec{i})

$$M_x = \vec{M}_A \cdot \vec{i}, \quad \text{gdzie } \vec{M}_A = \vec{r} \times \vec{P}. \quad (2.55)$$

Podobnie – dla osi y i z

$$\begin{aligned} M_y &= M_A \cos \beta = \vec{M}_A \cdot \vec{j}, \\ M_z &= M_A \cos \gamma = \vec{M}_A \cdot \vec{k}, \end{aligned} \quad (2.56)$$

przy czym β i γ oznaczają kąty skierowane pomiędzy osiami y i z a wektorem \vec{M}_A . Zależności (2.54) – (2.56) wynikają z własności iloczynu skalarnego (2.30).

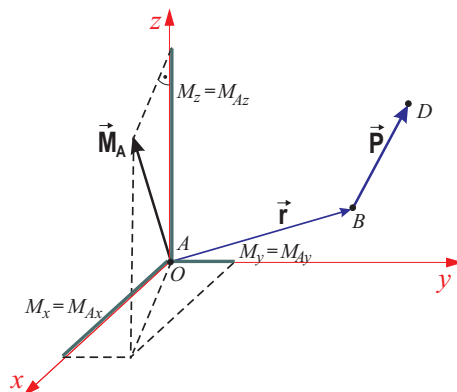
Znając moment siły względem dowolnego punktu A , wyrażony w postaci wektorowej wzorem (2.45)

$$\vec{M}_A = \vec{i}(r_y P_z - r_z P_y) + \vec{j}(r_z P_x - r_x P_z) + \vec{k}(r_x P_y - r_y P_x), \quad (2.57)$$

można wyznaczyć jego rzuty na osie układu współrzędnych xyz , w którym są określone współrzędne wektorów \vec{r} i \vec{P} (rys. 2.36). Mnożąc kolejno wektor \vec{M}_A przez \vec{i} , \vec{j} i \vec{k} , otrzymuje się

$$\begin{aligned} M_x &= \vec{M}_A \cdot \vec{i} = r_y P_z - r_z P_y, \\ M_y &= \vec{M}_A \cdot \vec{j} = r_z P_x - r_x P_z, \\ M_z &= \vec{M}_A \cdot \vec{k} = r_x P_y - r_y P_x. \end{aligned} \quad (2.58)$$

Wielkości określone we wzorze (2.58) oznaczają momenty siły \vec{P} odpowiednio względem osi x , y i z .



Rysunek 2.36: Moment siły \vec{P} względem punktu A oraz momenty tej siły względem osi x , y i z

2.5 Układy wektorów – redukcja układu wektorów

Układem wektorów nazywa się zbiór wektorów przedstawiających jedną wielkość fizyczną (na przykład zbiór sił działających na ciało).

W wielu przypadkach określony zbiór wektorów można zastąpić innym, równoważnym mu układem wektorów. Na ogół dąży się do uzyskania układu równoważnego – o jak najmniejszej liczbie wektorów. W takim przypadku mówi się o redukcji układu wektorów.

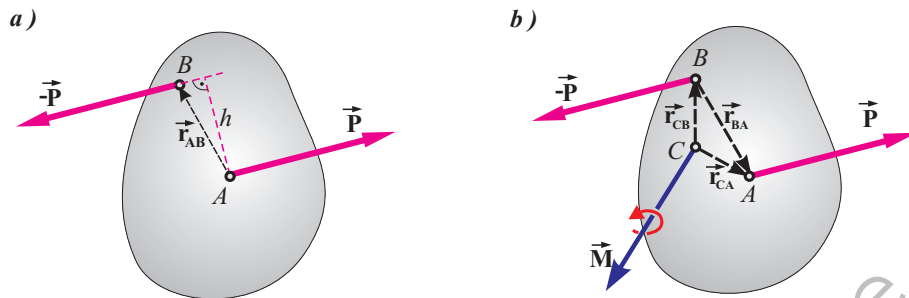
Układem wektorów równoważnym do danego układu jest taki układ wektorów, który wywołuje taki sam efekt. Na przykład układem sił równoważnym do zadanego układu sił działających na ciało jest taki układ, którego działanie wywołuje identyczny ruch ciała (albo identyczne reakcje podpór, albo identyczne deformacje) jak układ zadany.

W dalszym ciągu rozważań będzie mowa o równoważnych układach sił działających na ciała sztywne.

2.5.1 Para sił – moment pary sił

W mechanice wprowadza się pojęcia pary sił i momentu pary sił (rys. 2.37).

- Para sił to dwie siły równoległe, ale nie leżące na jednej prostej, o jednakowych wartościach oraz przeciwnych zwrotach (\vec{P} i $-\vec{P}$) – działające na (jedno) ciało sztywne.



Rysunek 2.37: Para sił (a) i wektor momentu pary sił (b)

Para sił działających na ciało sztywne usiłuje obracać ciało (i jeśli ciało ma możliwość ruchu, to obraca się pod działaniem pary sił).

- Jeśli na swobodne ciało sztywne działa para sił (dwie siły \vec{P} i $-\vec{P}$ nie leżące na jednej prostej), to ciało nie jest w równowadze.

Wielkością charakterystyczną dla pary sił jest moment pary sił.

- Momentem pary sił nazywa się wektor równy sumie momentów sił – stanowiących parę – względem dowolnego punktu.

Zgodnie z definicją moment pary sił jest określony wzorem

$$\vec{M}_C = \vec{r}_{CA} \times \vec{P} + \vec{r}_{CB} \times (-\vec{P}) . \quad (2.59)$$

Zależność (2.59) może być przekształcana w następujący sposób

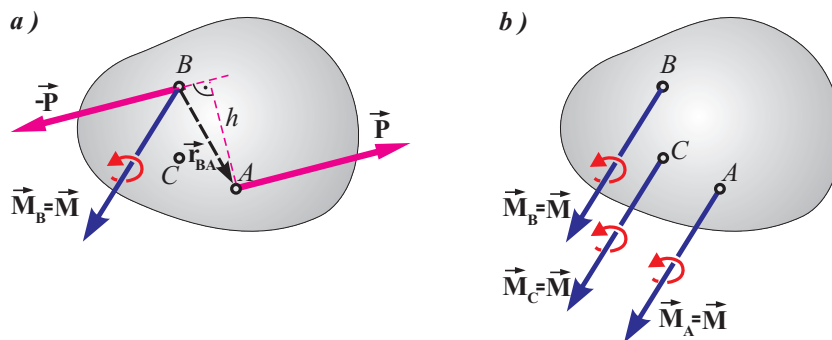
$$\vec{M}_C = \vec{r}_{CA} \times \vec{P} - \vec{r}_{CB} \times \vec{P} = (\vec{r}_{CA} - \vec{r}_{CB}) \times \vec{P} = \vec{r}_{BA} \times \vec{P} = \vec{M}_B . \quad (2.60)$$

Łatwo wykazać, że moment pary sił względem punktu A jest identyczny

$$\vec{M}_A = \vec{r}_{AB} \times (-\vec{P}) = -\vec{r}_{BA} \times (-\vec{P}) = \vec{r}_{BA} \times \vec{P} = \vec{M}_B . \quad (2.61)$$

Z podanych zależności wynika, że moment pary sił nie zależy od wyboru punktu, względem którego jest wyznaczony ($\vec{M}_C = \vec{M}_A = \vec{M}_B \equiv \vec{M}$). Oznacza to, że wektor momentu pary sił jest wektorem swobodnym – ale związanym z ciałem, do którego przyłożona jest para sił (rys. 2.38).

- Moment pary sił (\vec{M}) jest wektorem równoważnym parze sił (\vec{P} i $-\vec{P}$) działających na ciało sztywne.



Rysunek 2.38: Moment pary sił względem różnych punktów

Wartość, kierunek i zwrot wektora momentu pary sił określa się na podstawie reguł stosowanych dla wektorowego iloczynu wektorów. Wektor momentu pary sił jest prostopadły do płaszczyzny, w której leżą siły, jego zwrot wynika z reguły śruby prawoskrętnej (lub reguły prawej dłoni), a wartość wyznacza się jako

$$M = Ph \quad (2.62)$$

Odległość h jest nazywana ramieniem pary sił.

2.5.2 Wektor główny i moment główny układu sił

Na rysunku 2.39 jest przedstawione ciało sztywne obciążone układem sił nie leżących w jednej płaszczyźnie.

Dowolny układ wektorów jest określony przez:

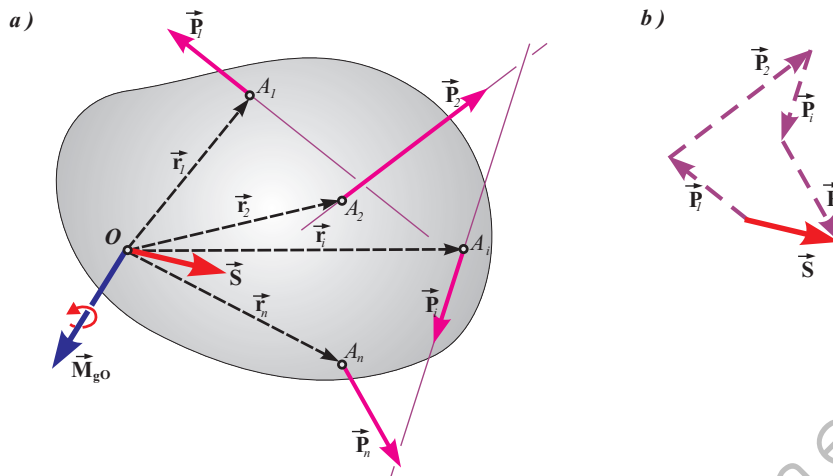
- wektor główny układu wektorów (\vec{S}),
- moment główny układu wektorów (\vec{M}_{gO}) względem punktu O .

- **Wektorem głównym (\vec{S}) układu n sił ($\vec{P}_i, i = 1 \dots n$) jest wektor swobodny, który jest sumą wszystkich sił należących do układu**

$$\vec{S} = \sum_{i=1}^n \vec{P}_i \quad (2.63)$$

- **Momentem głównym układu sił (\vec{M}_{gO}) nazywa się wektor równy sumie momentów – względem wybranego bieguna (O) – wszystkich sił ($\vec{P}_i, i = 1 \dots n$) należących do układu**

$$\vec{M}_{gO} = \sum_{i=1}^n \vec{M}_{Oi} = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{P}_i \quad (2.64)$$



Rysunek 2.39: Układ sił ($\vec{P}_i, i = 1 \dots n$) działających na ciało sztywne oraz jego wektor główny (\vec{S}) i moment główny (\vec{M}_{gO})

2.5.3 Redukcja układu sił

Układ sił działających na ciało sztywne można zastąpić innym, równoważnym mu układem sił, o ile wektory główne obu układów sił i ich momenty główne względem wspólnego, dowolnie wybranego bieguna są sobie równe.

Dowolny układ działających na ciało sztywne sił – związanych z prostymi (lub z punktami) – może być zastąpiony przez układ złożony z dwóch wektorów:

- wektora głównego układu sił (\vec{S}),
- momentu głównego układu sił względem dowolnego punktu (\vec{M}_{gO}).

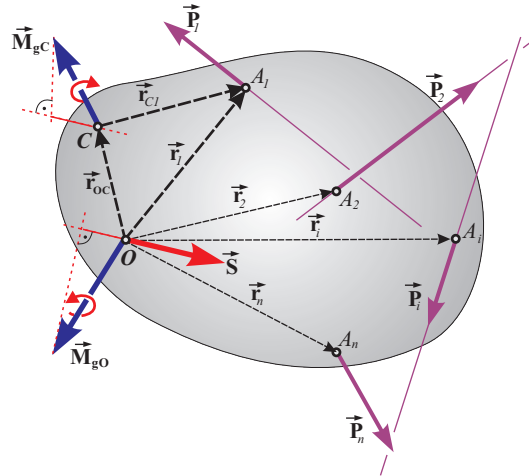
W szczególnych przypadkach każdy z tych wektorów może być równy zero. Na przykład dla pary sił \vec{P} i $-\vec{P}$ wektor główny jest równy zero ($\vec{S} = \vec{P} - \vec{P} = \vec{0}$). Dla układu sił, których kierunki działania przecinają się w jednym punkcie (O), moment główny względem tego punktu jest równy zero ($\vec{M}_{gO} = \vec{0}$).

Jeśli układ sił można zredukować do jednego wektora i jest nim wektor główny (\vec{S}), to taki wektor nazywa się *wektorem wypadkowym układu sił* (albo *wypadkową siłą*).

Wektor główny \vec{S} jest niezależny od położenia punktu przyjętego za bieguna do redukcji. Z tego względu wektor główny jest nazywany *niezmiennikiem układu wektorów*.

Jak wspomniano wcześniej, redukcji sił obciążających ciało sztywne można dokonać dla dowolnie obranego bieguna (O). Moment główny zależy od położenia punktu wybranego jako bieguna. Zależność pomiędzy momentami głównymi układu sił względem dwóch punktów (O) i (C) można wyprowadzić wykorzy-

stując wielkości pokazane na rys. 2.40.



Rysunek 2.40: Momenty główne układu sił ($\vec{P}_i, i = 1 \dots n$) względem bieguna O i innego punktu (C) obranego jako biegun

Moment główny układu sił względem punktu C (\vec{M}_{gC}) określa zależność

$$\vec{M}_{gC} = \sum_{i=1}^n \vec{M}_{Ci} = \sum_{i=1}^n \vec{r}_{Ci} \times \vec{P}_i. \quad (2.65)$$

Podstawiając $\vec{r}_{Ci} = \vec{r}_i - \vec{r}_{OC}$ (rys. 2.40), podobnie $\vec{r}_{Ci} = \vec{r}_i - \vec{r}_{OC}$, otrzymuje się

$$\vec{M}_{gC} = \sum_{i=1}^n (\vec{r}_i - \vec{r}_{OC}) \times \vec{P}_i = \sum_{i=1}^n (\vec{r}_i \times \vec{P}_i - \vec{r}_{OC} \times \vec{P}_i). \quad (2.66)$$

Występujące w zależności (2.66) wielkości można zastąpić przez moment główny względem punktu O oraz wektor główny:

$$\sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{P}_i = \vec{M}_{gO}, \quad \sum_{i=1}^n \vec{P}_i = \vec{S}. \quad (2.67)$$

Ostateczna postać równania (2.65) jest następująca

$$\vec{M}_{gC} = \vec{M}_{gO} - \vec{r}_{OC} \times \vec{S}. \quad (2.68)$$

Wyznamy jeszcze rzut wektora momentu głównego \vec{M}_{gC} na kierunek wektora głównego \vec{S} . Można to zrobić, mnożąc skalarnie równanie (2.68) przez

wektor \vec{S}

$$\vec{M}_{gC} \cdot \vec{S} = \vec{M}_{gO} \cdot \vec{S} - (\vec{r}_{OC} \times \vec{S}) \cdot \vec{S}. \quad (2.69)$$

Z uwagi na prostopadłość wektorów $(\vec{r}_{OC} \times \vec{S})$ i \vec{S} ich iloczyn skalarny jest wektorem zerowym $((\vec{r}_{OC} \times \vec{S}) \cdot \vec{S} = \vec{0})$. Zatem

$$\vec{M}_{gC} \cdot \vec{S} = \vec{M}_{gO} \cdot \vec{S}. \quad (2.70)$$

Taki rezultat oznacza, że rzut wektora momentu głównego na wektor główny ma wartość niezmienną, niezależną od wyboru bieguna ($\vec{M}_{gC} \cdot \vec{S} = const$). Z tego względu rzut wektora momentu głównego na wektor główny jest nazywany *niezmiennikiem układu wektorów*. Jest on drugim (obok wektora głównego) niezmiennikiem układu wektorów.

Redukcja pary sił

Wektor główny pary sił jest wektorem zerowym ($\vec{S} = \vec{P} - \vec{P} = \vec{0}$). Moment główny pary sił nie zależy od wyboru bieguna i jest równy – zgodnie z (2.60), (2.61) – momentowi pary sił

$$\vec{M} \equiv \vec{M}_A = \vec{M}_B = \vec{M}_C = \vec{r}_{BA} \times \vec{P}. \quad (2.71)$$

- **Dwa wektory stanowiące parę sił działających na ciało sztywne można zredukować do jednego wektora – momentu pary sił – o początku w dowolnym punkcie.**

Parę sił działających na ciało sztywne można zastąpić jednym wektorem równoważnym jej – wektorem momentu pary sił \vec{M} . Wektor momentu pary sił jest wektorem swobodnym, ale związanym z tym ciałem sztywnym, do którego jest przyłożona para sił.

Równoważność par sił

Jak wykazano w punkcie 2.5.3 dowolną parę sił działających na ciało sztywne można zredukować do wektora momentu pary sił, który jest wektorem swobodnym, ale związanym z ciałem obciążonym parą sił.

Zgodnie z określeniem wektora równoważnego (por. stronica 26), o równoważności wektorów swobodnych świadczy równość tych wektorów.

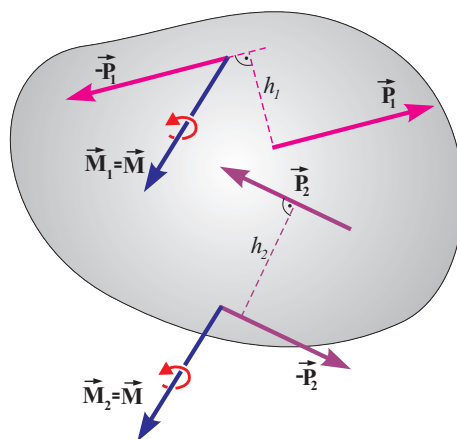
- **Pary sił działających na ciało sztywne są sobie równoważne wtedy, gdy wektory momentów tych par są sobie równe.**

Z równości wektorów momentów wynika, że warunkami równoważności par sił $(\vec{P}_1, -\vec{P}_1)$, $(\vec{P}_2, -\vec{P}_2)$, ... $(\vec{P}_n, -\vec{P}_n)$ działających na ciało sztywne są:

- równa wartość momentów $(M = P_1 h_1 = P_2 h_2 = \dots = P_n h_n)$,

- jednakowy kierunek wektorów momentów tych par, co oznacza, że pary sił muszą leżeć w płaszczyznach wzajemnie równoległych,
- jednakowy zwrot wektorów momentów, to znaczy, że pary sił muszą powodować jednakowy obrót ciała.

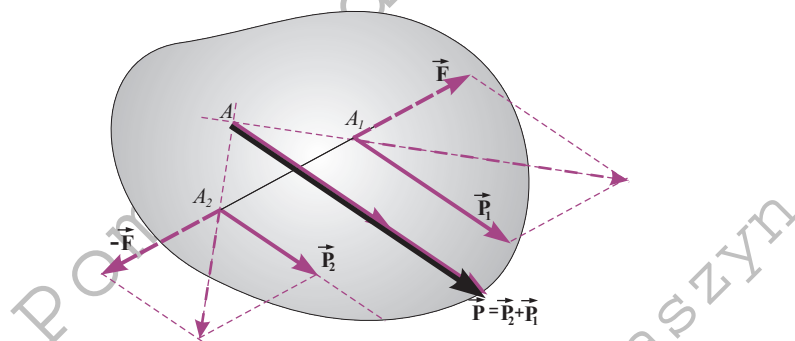
Na rysunku 2.41 pokazany jest przykład dwu równoważnych par sił.



Rysunek 2.41: Dwie równoważne pary sił działających na ciało sztywne

2.5.4 Redukcja układu sił równoległych

Rozpatrzmy dwie siły równoległe działające na ciało sztywne (rys. 2.42).



Rysunek 2.42: Siły równoległe działające na ciało sztywne

Przez dwie siły równoległe można poprowadzić płaszczyznę. Do zadanego układu sił (\vec{P}_1 i \vec{P}_2) dodajemy zerowy układ sił (\vec{F} i $-\vec{F}$) leżących w tej samej

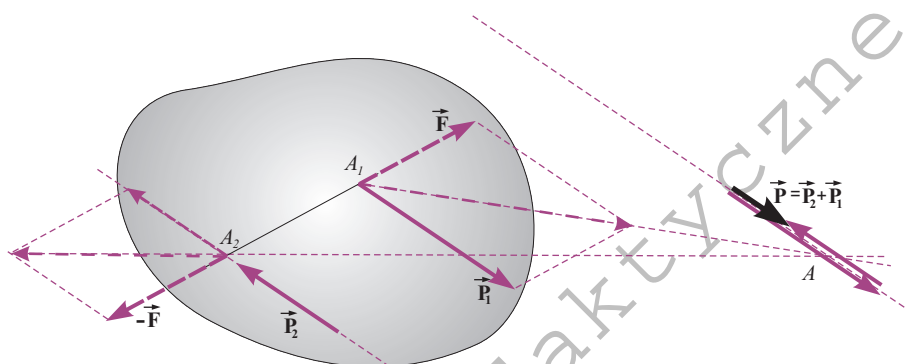
płaszczyźnie. Suma tych sił jest równa

$$\vec{P}_1 + \vec{F} + \vec{P}_2 - \vec{F} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 = \vec{P}. \quad (2.72)$$

Położenie prostej, wzdłuż której działa siła \vec{P} można określić stosując do sumowania wektorów regułę równoległoboku (trzykrotnie). Prosta ta znajduje się pomiędzy prostymi działania sił \vec{P}_1 i \vec{P}_2 – bliżej większej z nich.

Przypadek sił równoległych o przeciwnych zwrotach działających na ciało sztywne jest przedstawiony na rys. 2.43.

Postępując w podobny sposób jak poprzednio, można określić położenie prostej działania siły $\vec{P} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2$. W tym przypadku leży ona na zewnątrz sił – po stronie większej z nich.

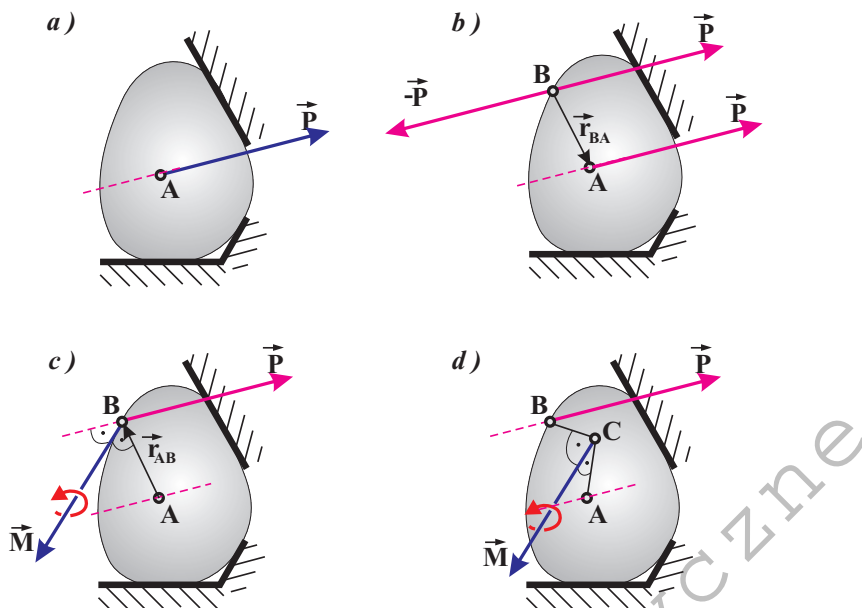


Rysunek 2.43: Siły równoległe o przeciwnych zwrotach działające na ciało sztywne

2.5.5 Równoważny układ wektorów dla siły związanej z prostą

Jako szczególny przypadek układu wektorów może być rozpatrywana siła działająca na ciało sztywne.

Na rys. 2.44a pokazana jest siła \vec{P} działająca na ciało sztywne i punkt A leżący na prostej, wzdłuż której działa siła. Przykładając w dowolnym punkcie (B) zerowy układ sił $\vec{P} - \vec{P} = \vec{0}$ (rys. 2.44b), można sprowadzić układ obciążeń do siły \vec{P} przyłożonej w punkcie B i pary sił $(-\vec{P}, \vec{P})$. Zastępując parę sił równoważnym jej wektorem momentu $\vec{M} = \vec{r}_{BA} \times \vec{P} = \vec{P} \times \vec{r}_{AB}$, otrzymuje się układ równoważny (rys. 2.44c). Ponieważ wektor momentu pary sił (\vec{M}) jest wektorem swobodnym, to można go przesunąć do dowolnego punktu, na przykład do punktu C (rys. 2.44d).



Rysunek 2.44: Układy wektorów równoważnych do siły związanej z prostą: a) siła działająca na ciało sztywne, b) dodany układ zerowy w punkcie B , c) siła i moment pary sił w punkcie B , d) siła w punkcie B i moment pary sił w dowolnym punkcie C

- Siłę \vec{P} działającą na ciało sztywne (to jest wektor związany z prostą) można zastąpić dwoma wektorami: siłą o tej samej wartości i kierunku, ale działającą wzdłuż prostej przesuniętej równoległe o wektor \vec{r}_{AB} oraz swobodnym (ale związanym z ciałem) wektorem momentu pary sił $\vec{M} = \vec{r}_{BA} \times \vec{P} = \vec{P} \times \vec{r}_{AB}$.

Równoważnym układem wektorów dla siły działającej na ciało sztywne i związanej z prostą są dwa wektory: siły działającej wzdłuż prostej równoległej do danej siły i momentu pary sił.

Podobnie można postąpić z siłą związaną z punktem, o ile działa ona na ciało sztywne¹³.

¹³W przypadku wektora związanego z punktem – jakim jest siła działająca na ciało odkształcalne – układ wektorów równoważny tej sile nie istnieje.

Pomoce dydaktyczne

Katedra Dynamiki Maszyn

Rozdział 3

MODELOWANIE WZAJEMNEGO ODDZIAŁYWANIA CIAŁ

Jak wspomniano we wprowadzeniu (punkt 1.4), w skład modelu układu mechanicznego wchodzi między innymi:

- *model oddziaływań wewnętrznych (lub powiązań)* pomiędzy ciałami należącymi do układu,
- *model oddziaływań zewnętrznych* obejmujących oddziaływanie otoczenia na rozpatrywany układ (to znaczy oddziaływanie innych ciał, które nie należą do rozpatrywanego układu).

Połączenia wewnątrz układu, jak i oddziaływania zewnętrzne (z otoczeniem) mogą być realizowane za pomocą różnego rodzaju rozwiązań konstrukcyjnych. W urządzeniach mechanicznych i konstrukcjach najczęściej wykorzystywane są:

- połączenia sztywne,
- przeguby walcowe (płaskie) i kuliste,
- współpracujące ze sobą powierzchnie,
- łożyska,
- liny, struny, nici, taśmy, ciągną,
- sprężyny i elementy sprężyste,
- tłumiki (amortyzatory).

Masa elementów łączących ciała jest pomijana. (Jeśli uwzględnia się masę elementu łączącego, to traktujemy go jako ciało.)

Ważnym pojęciem związanym ze wzajemnym oddziaływaniem ciał jest pojęcie więzów.

- **Więzami nazywa się takie oddziaływania, które ograniczają możliwości ruchu ciał należących do układu.**

Więzy mogą ograniczać położenia ciał albo położenia określonych punktów tych ciał, a także stanowić ograniczenia dla prędkości ciał lub punktów.

Nie wszystkie z wymienionych tu elementów łączących ciała nakładają takie ograniczenia na ruch ciała, o jakich jest mowa przy definiowaniu więzów. Na przykład elementy sprężyste i tłumiki nie ograniczają możliwości ruchu ciał należących do układu mechanicznego. Ich oddziaływanie powoduje powstawanie sił, które działają na ciała i wywołują zmiany ruchu, ale nie odbierają możliwości ruchu.

Oddziaływania zewnętrzne (pochodzące od ciał spoza układu) i wewnętrzne (to jest wzajemne działanie ciał należących do układu) rozpatruje się w identyczny sposób.

Można więc mówić o więzach zewnętrznych nałożonych na rozpatrywany układ oraz o więzach wewnętrznych, nałożonych na poszczególne ciała należące do układu. Jeśli analizowane jest zachowanie pojedynczego ciała sztywnego, to więzy wewnętrzne (powiązania) nie występują.

Dla uniknięcia nieporozumień należy wspomnieć o siłach wewnętrznych występujących w przekrojach rozpatrywanych ciał. Z uwagi na to, że rozpatrywane – w ramach mechaniki ogólnej – ciała są traktowane jako bryły sztywne siły wewnętrzne ciał nie mają wpływu na zachowanie układu. Wyznaczenie sił wewnętrznych w przekrojach ciał jest istotne wówczas, gdy zachodzi konieczność analizy odkształceń ciała czy naprężeń w ciele (tego rodzaju zagadnienia są tematem rozważań mechaniki ośrodków ciągłych – na przykład w ramach przedmiotu *wytrzymałość materiałów*).

Jednym z założeń przyjętych w mechanice jest poniższy aksjomat (por. punkt 1.3) dotyczący oswobodzenia od więzów.

- **Każde ciało nieswobodne można myślowo oswobodzić od więzów, zastępując przy tym ich działanie odpowiednimi reakcjami. Dalej rozpatrywać można ciało tak jak ciało swobodne, podlegające działaniu sił czynnych i reakcji więzów (sił biernych).**

W dalszej części tego rozdziału zostaną omówione najczęściej stosowane modele więzów oraz odpowiadające im reakcje. Ponadto podane będą modele tych elementów łączących ciała, które nie stanowią więzów (takie jak sprężyny, tłumiki) oraz określone będą siły ich oddziaływania.

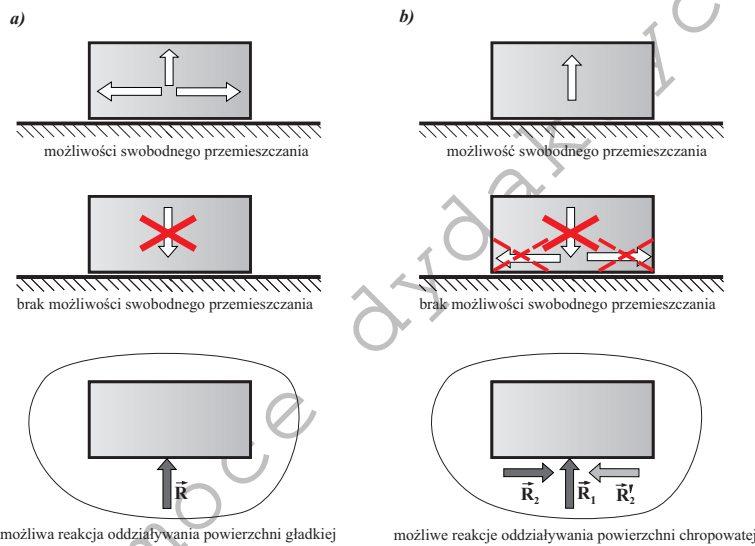
3.1 Reakcje więzów

Ideę wprowadzania reakcji więzów można przedstawić następująco:

ograniczenie możliwości względnego przemieszczenia \implies reakcja ,
 możliwość swobodnego względnego przemieszczenia \implies brak reakcji .

Przemieszczenia względne, o których tu mowa, oznaczają zarówno przemieszczenia liniowe (przesunięcia) określonego punktu ciała, jak i przemieszczenia kątowe (obroty) ciała względem innego ciała lub ostoj¹. Ilustracją idei wprowadzania reakcji więzów są rysunki 3.1 i 3.2.

Przytoczona idea wprowadzania reakcji jest rozumiana w taki sposób, że więzy, które przy działających obciążeniach uniemożliwiają lub ograniczają **przemieszczenie punktu**, w którym zachodzi kontakt ciała z otoczeniem (z innym ciałem), zastępuje się taką siłą, której działanie uniemożliwia lub ogranicza przemieszczenie punktu. Siłę, z jaką więzy oddziałują na ciało nazywa się **siłą reakcji więzów**.



Rysunek 3.1: Oddziaływanie powierzchni na ciało: a) powierzchnie gładkie, b) powierzchnie chropowate

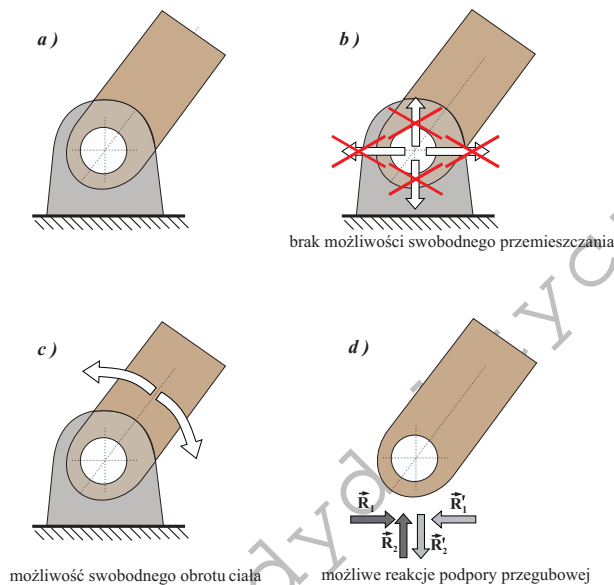
Więzy, które przy działających obciążeniach uniemożliwiają lub ograniczają **obrót ciała** wokół punktu, w którym zachodzi kontakt ciała z otoczeniem

¹ Ostoja nazywa się nieruchome ciało, połączone z analizowanym układem i oddziałujące na ten układ.

(z innym ciałem), zastępuje się parą sił o momencie, który uniemożliwia lub ogranicza obrót ciała. Moment pary sił oddziaływania więzów na ciało nazywa się **momentem reakcji więzów**.

Termin **reakcja więzów** jest używany zarówno dla określenia siły, jak i momentu reakcji więzów.

Należy dodać, że w niektórych przypadkach więzy eliminują możliwość ruchu tylko w pewnym zakresie obciążeń. Oznacza to, że siła reakcji lub moment reakcji więzów mogą osiągnąć ograniczoną wartość (wartość graniczną). Po przekroczeniu obciążeń granicznych ruch może wystąpić.

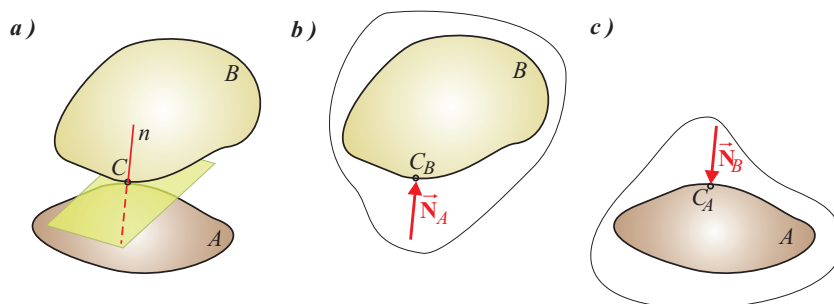


Rysunek 3.2: Oddziaływanie podpory przegubowej (przegub walcowy) na ciało – powierzchnie ciał idealnie gładkie

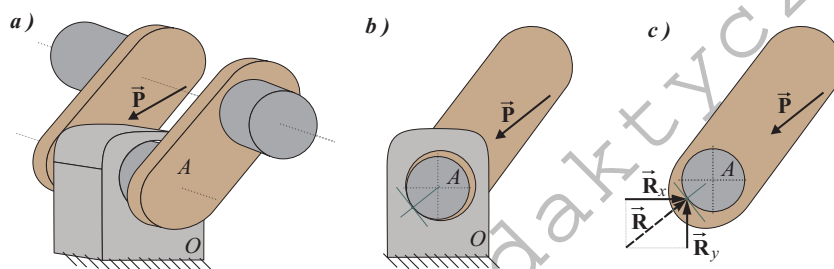
3.1.1 Przykłady oddziaływania ciał – reakcje więzów (modele idealne)

Model oddziaływania ciał stykających się w jednym punkcie jest pokazany na rys. 3.3. Jeśli stykające się ciała są dostatecznie gładkie, to można przyjąć, że siły wzajemnego oddziaływania pomiędzy ciałami mają kierunek normalnej (n) do płaszczyzny stycznej do powierzchni tych ciał, poprowadzonej w punkcie styczności. Zgodnie z postulatem odnoszącym się do działania i przeciwdziałania (punkt 1.3)

$$\vec{N}_B = -\vec{N}_A$$



Rysunek 3.3: Wzajemne oddziaływanie dwu ciał stykających się w punkcie – model idealny: a) płaszczyzna styczna do ciał w punkcie styku i prosta normalna do tej płaszczyzny, b) reakcja oddziaływania ciała A na ciało B , c) reakcja oddziaływania ciała B na ciało A



Rysunek 3.4: Model połączenia ciała (A) z ostoją (O) za pomocą idealnego łożyska ślizgowego i reakcje oddziaływania ostoi na ciało

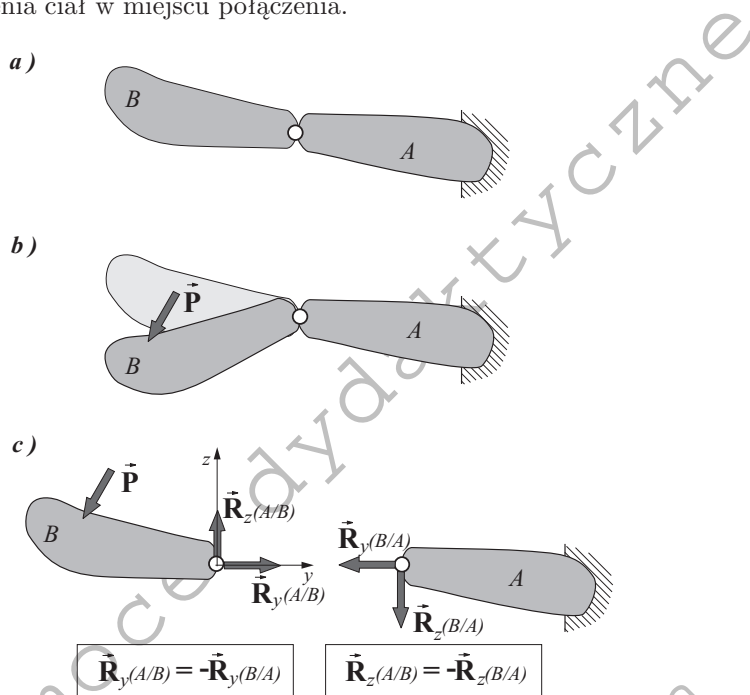
Proste łożysko ślizgowe jest pokazane na rys. 3.4. Kontakt pomiędzy ciałami następuje na powierzchniach walcowych – panwi łożyska i czopa wału. Tego rodzaju połączenie umożliwia obrót wału względem obudowy łożyska wokół osi pokrywającej się z osią łożyska, natomiast przemieszczenia wału w płaszczyźnie prostopadłej do tej osi są ograniczone (niemożliwe) – stąd często używa się określenia **łożysko poprzeczne**.

Jeśli współpracujące ze sobą elementy są dostatecznie gładkie, ich połączenie jest pasowane z luzem, a ponadto jest zapewnione odpowiednie smarowanie, to można przyjąć, że opory powstające przy obracaniu jednego ciała względem drugiego są niewielkie. Zakłada się, że w takim przypadku pominięcie małych oporów ruchu – przy modelowaniu połączenia – nie wprowadza istotnych różnic pomiędzy wynikami otrzymanymi z analizy modelu w porównaniu do rezultatów zmierzonych na rzeczywistym obiekcie. Założenia te znajdują potwierdzenie w praktyce. W związku z tym wprowadza się model idealny łożyska ślizgowego,

w którym powierzchnie ciał są doskonale gładkie, a opory ruchu nie występują.

Idealny model łożyska ślizgowego oraz siła reakcji jaka występuje przy tego rodzaju połączeniu ciał są pokazane na rys. 3.4. Z uwagi na to, że wartość, kierunek i zwrot reakcji może być różny, to siłę reakcji przedstawiamy w postaci składowych – wzajemnie do siebie prostopadłych.

Rysunek 3.5 ilustruje ideę wprowadzania reakcji w przypadku ciał połączonych idealnym przegubem walcowym. Brak możliwości względnego przemieszczenia połączonych ciał w punkcie połączenia oznacza konieczność wprowadzenia siły reakcji. Kierunek, zwrot i wartość siły reakcji będą zależne od obciążeń działających na ciała. Przy zmianie obciążenia zmianie ulega wartość, kierunek i zwrot reakcji. Zmiany zachodzą zawsze w taki sposób, by działające obciążenia zostały zrównoważone przez reakcje i by w konsekwencji nie doszło do przemieszczenia ciał w miejscu połączenia.

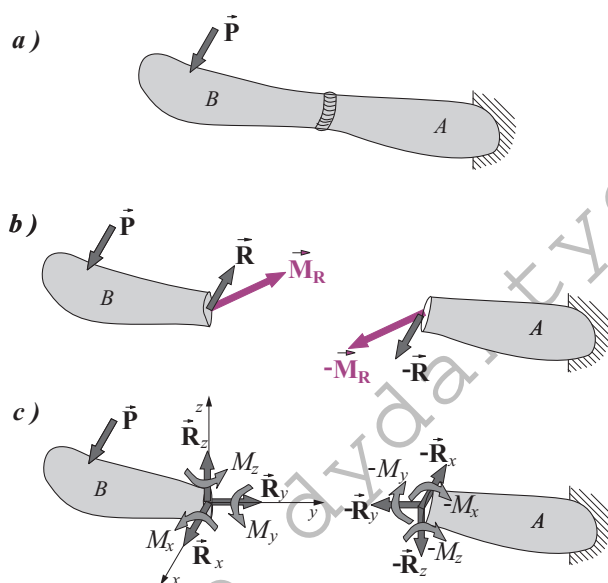


Rysunek 3.5: Model połączenia ciał (A i B) za pomocą idealnego przegubu walcowego: a) połączenie ciał za pomocą elementu walcowego, b) możliwy ruch ciał względem siebie – pod wpływem obciążenia, c) reakcje wzajemnego oddziaływania ciał A i B

Model sztywnego połączenia ciał jest przedstawiony na rys. 3.6. Ciała A i B tworzą – wobec połączenia ich spoiną – jedno ciało. Sztywne połączenie ciał nie pozwala na względne przemieszczanie się ciał w żadnym z trzech kierunków, ani

na obrót ciała względem siebie – co jest równoznaczne z ograniczeniem możliwości obrotu dookoła trzech osi x , y i z . Tego rodzaju ograniczenia względnych przemieszczeń powodują, że na powierzchni podziału ciał powstaną reakcje, które – po zredukowaniu ich do jednego punktu – można przedstawić w postaci siły \vec{R} (i $-\vec{R}$) oraz pary sił o momencie \vec{M}_R (i $-\vec{M}_R$), tak jak pokazano na rys. 3.6b. Z uwagi na to, że kierunki wektorów \vec{R} i \vec{M}_R mogą być różne wygodnie jest przedstawić je za pomocą trzech składowych siły reakcji i trzech momentów względem osi x , y oraz z (rys. 3.6c).

Jeśli rozpatruje się jedno ciało, to w dowolnym jego przekroju siły oddziaływania jednej części ciała na drugą (reakcje w tym przekroju) będą takie jak na rys. 3.6c.



Rysunek 3.6: Model idealnie sztywnego połączenia ciał (brak możliwości względnego przemieszczenia i brak możliwości względnego obrotu ciał) i reakcje wzajemnego oddziaływania ciała A i B

W analogiczny sposób, jak w omówionych tu przypadkach, modelowane są wzajemne oddziaływania ciał połączonych ze sobą różnego rodzaju elementami łączącymi.

Zestawienie modeli podstawowych sposobów podparcia i łączenia ciał są podane na stronicach 68 – 71.

3.2 Modelowanie zjawiska tarcia

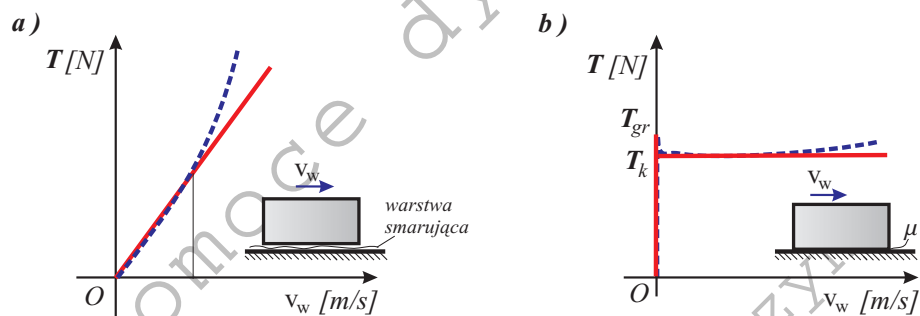
Model idealny oddziaływania stykających się ciał, w którym zakłada się, że przy przesuwaniu jednego ciała po powierzchni drugiego z nich nie pojawiają się siły przeciwdziałające temu ruchowi, nie pozwala na opis niektórych zjawisk z wystarczającą do celów praktycznych dokładnością. W wielu sytuacjach traktowanie powierzchni ciał jako idealnych może prowadzić do wyników sprzecznych z doświadczeniem lub z innymi prawami fizycznymi. (Na przykład pominięcie oporów ruchu elementów maszyny może prowadzić do zaprojektowania urządzenia o cechach *perpetum mobile*.)

Uwzględnienie wzajemnego oddziaływania pomiędzy rzeczywistymi ciałami będącymi względem siebie w ruchu jest kłopotliwe pod względem teoretycznym. Główną tego przyczyną są trudne do opisanego właściwości powierzchni ciał (niejednorodność, pofalowanie, chropowatość – powstające w wyniku różnych rodzajów obróbki mechanicznej). Wyjaśnienia wymagają także oddziaływania na poziomie mikro.

W budowie maszyn spotyka się różne rodzaje połączeń ruchomych pomiędzy ciałami:

- kontakt suchy,
- kontakt poprzez warstwę smaru,
- kontakt smarowany pod ciśnieniem – łożyska pneumatyczne, hydrostatyczne i hydrodynamiczne,
- kontakt poprzez elementy pośrednie – łożyska toczne,
- podpory magnetyczne.

Przykładowe przebiegi zmian sił tarcia (T) w zależności od prędkości ciała względem podłoża (v_w) zostały przedstawione na rys. 3.7.

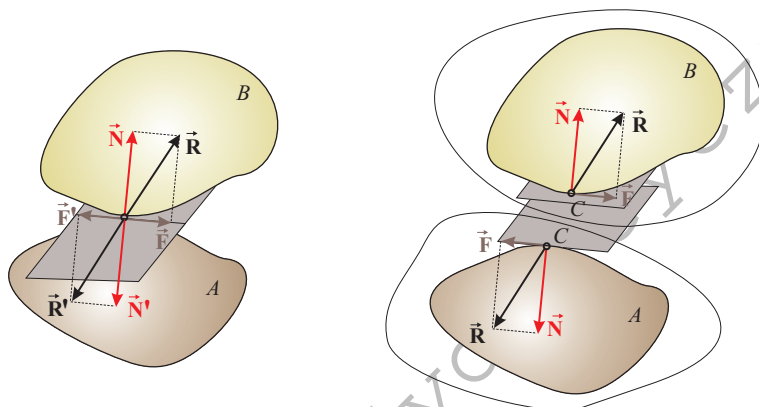


Rysunek 3.7: Rzeczywiste (linie przerywane) i przybliżone (linie ciągłe) zależności siły oporu (T) od względnej prędkości ciał (v_w) w przypadku tarcia wiśkotycznego (a) i tarcia suchego (b)

Jeśli pomiędzy ciałami znajduje się warstwa czynnika smarującego, to mówi się o tarcii wiskotycznej. Przy niezbyt dużych prędkościach względnych pomiędzy ciałami zakłada się, że opory ruchu są proporcjonalne do prędkości względnej (odcinek liniowy na rys. 3.7a). Przy dużych prędkościach względnych ciał przyjmuje się, że opory ruchu są zależne od kwadratu prędkości (fragment paraboli na rys. 3.7a).

Jeśli powierzchnie kontaktu nie są smarowane, siła tarcia (rys. 3.7b) może zmieniać się w zakresie² $(0, T_{gr})$ w przypadku, gdy ciało znajduje się w spoczynku. Podczas ruchu ciała siła tarcia jest bliska wartości T_k . W obliczeniach przyjmuje się zazwyczaj, że siła tarcia nie zależy od prędkości (nie zmienia się przy zmianie prędkości ciała).

Siły oddziaływania pomiędzy ciałami o powierzchniach chropowatych są pokazane na rys. 3.8.



Rysunek 3.8: Oddziaływanie dwu ciał – powierzchnie chropowate

3.2.1 Modelowanie zjawiska tarcia suchego

Istnieją różne teorie pozwalające na modelowanie wzajemnych oddziaływań ciał w miejscach ich kontaktu³. W przypadku, gdy kontakt ciał jest bezpośredni, bez warstwy smarnej (kontakt suchy lub tarcie suche), do wyjaśnienia zjawisk zachodzących pomiędzy ciałami stosuje się:

- klasyczną makroskopową teorię tarcia opartą na chropowatości powierzchni⁴,

²Reakcja podłoża jest zależna od obciążeń działających na ciało. W pewnym zakresie obciążeń siła tarcia jest w stanie utrzymywać ciało w równowadze.

³Zagadnienia związane z tarciami, zużyciem i smarowaniem są domeną trybologii.

⁴Pierwsze systematyczne badania dotyczące tarcia prowadził Leonardo da Vinci (1452-1519) i stwierdził, że: *siła tarcia jest zależna od obciążenia normalnego oraz, że siła tarcia nie zależy od wielkości powierzchni stykających się ciał*. Podane w roku 1699 przez G. Amonto-

- adhezyjną teorię tarcia (zaproponowaną przez Bowdena i Tabora),
 - molekularno-mechaniczną teorię tarcia (Kragielskiego),
 - teorie nanotrybologiczne (wyjaśniające zjawisko w skali nano)
- i inne, powstające współcześnie, teorie.

Siła oporu powstająca przy przesuwaniu ciała po powierzchni drugiego ciała, nazywana siłą tarcia (T), leży w płaszczyźnie stycznej do powierzchni ciała poprowadzonej w punkcie styku, a jej kierunek i zwrot określa wektor przeciwny do prędkości względnej punktu styku. (Jeśli ciało jest nieruchome, to zwrot siły tarcia jest przeciwny do zwrotu zamierzonej prędkości względnej punktu styku, a kierunek taki jak kierunek zamierzonej prędkości).

W klasycznym opisie zjawiska⁵ tarcia (da Vinci–Amontona–Coulomba), który dotyczy poruszającego się ciała, stwierdza się, że:

- **Siła tarcia (T) na powierzchni ciała jest proporcjonalna do obciążenia (N) o kierunku normalnej do powierzchni ciała.**

$$T = \mu_k N, \quad (3.1)$$

Współczynnik proporcjonalności (μ_k) jest nazywany kinetycznym współczynnikiem tarcia.

- **Siła tarcia jest niezależna od wielkości powierzchni kontaktu.** (Chodzi tu o nominalną powierzchnię, a nie rzeczywistą powierzchnię kontaktu zależną od stopnia nierówności.)
- **Siła tarcia jest niezależna od prędkości, z jaką porusza się ciało.**

Przy rozpatrywaniu równowagi ciał, wymienione założenia należy uzupełnić następującymi stwierdzeniami:

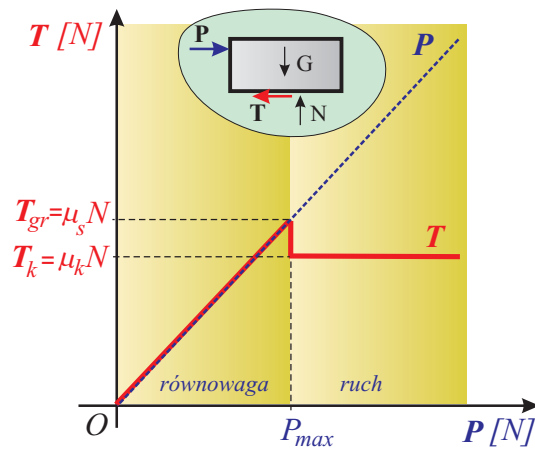
- Istnieje graniczna wartość siły tarcia (T_{gr}); jej wartość jest proporcjonalna do wartości składowej normalnej reakcji (N), a współczynnik proporcjonalności jest nazywany współczynnikiem tarcia statycznego (μ_s).
- Wartość współczynnika tarcia μ_s nie zależy od wielkości powierzchni styku ciał, a jedynie od rodzaju materiałów i stanu powierzchni.

Przebieg zmian siły tarcia (T) w zależności od wartości poziomej siły P działającej na ciało jest pokazany na rys. 3.9. Odpowiada on opisowi zjawiska tarcia podanemu przez da Vinci–Amontona–Eulera–Coulomba.

Przyłożona do ciała siła \vec{P} , o nieznaczonej wartości, nie spowoduje ruchu ciała. Jej działanie będzie równoważone przez siłę tarcia ($\vec{T} = -\vec{P}$). Innymi

na prawa tarcia były podobnie sformułowane. L. Euler (1707–1783) wprowadził rozróżnienie pomiędzy tarcie kinetycznym, a tarcie statycznym. Obserwacje dokonane przez Ch.A. Coulomba (1736–1806) pozwoliły na sformułowanie wniosku, że *siła tarcia jest niezależna od prędkości z jaką porusza się ciało*. Coulomb stwierdził też, że siła tarcia jest sumą dwóch składników ($T = T_0 + \mu N$), przy czym jeden z nich (T_0) jest niezależny od obciążenia, ani od stanu powierzchni.

⁵Używając terminu *prawa tarcia* należy mieć na uwadze fakt, że są to "prawa" empiryczne, które nie wyjaśniają zjawiska, ani nie są częścią szerszej teorii.



Rysunek 3.9: Zmiany wartości siły tarcia w zależności od wartości siły P w przypadku tarcia suchego

słowy, położeniu równowagi ($T \leq T_{gr}$) wartość siły tarcia jest równa wartości obciążenia ($T = P$). Wzrost obciążenia spowoduje wzrost siły tarcia; będzie to następować aż do momentu, gdy $P = T_{gr} = \mu_s N$. Dalszy wzrost siły P ($P > \mu_s N$) wymusi ruch ciała w kierunku zgodnym z kierunkiem siły \vec{P} . Największą wartość siły P , przy której ciało jest jeszcze w równowadze oznacza się jako P_{max} . W czasie ruchu ciała siła tarcia zachowuje stałą wartość ($T = T_k$), przy czym ta wartość jest zazwyczaj mniejsza od T_{gr} .

Podstawowe zależności wynikające z klasycznej teorii tarcia mają więc postać:

– w położeniu równowagi ciała

$$T \leq T_{gr}, \quad T_{gr} = \mu_s N, \quad \mu_s = \operatorname{tg} \rho, \quad (3.2)$$

– podczas ruchu ciała

$$T = T_k = \mu_k N, \quad (3.3)$$

przy czym:

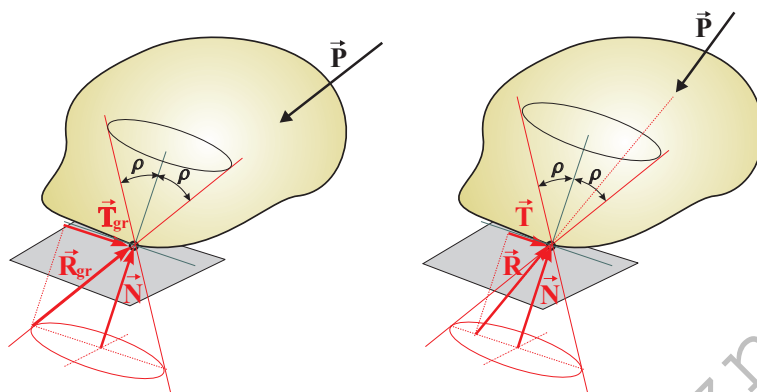
T_{gr} – siła tarcia w przypadku granicznym (tarcie rozwinięte),

μ_s – współczynnik tarcia statycznego (oznaczany też jako μ),

μ_k – współczynnik tarcia kinetycznego (dla większości materiałów $\mu_k < \mu_s$),

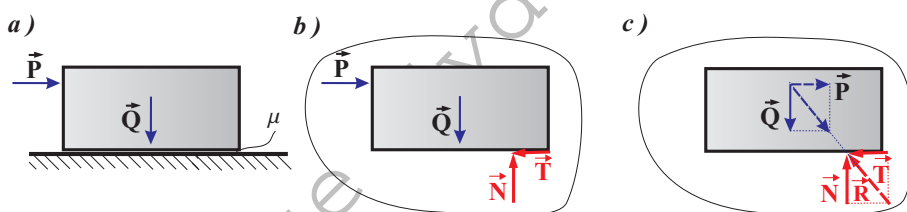
ρ – kąt odchylenia siły reakcji (\vec{R}) od kierunku składowej normalnej (\vec{N}) przy tarcu rozwiniętym ($T = T_{gr}$) – nazywany kątem tarcia (rys. 3.10).

Stożkiem tarcia nazywa się powierzchnię stożkową, której tworzącymi są proste o kierunkach sił reakcji (\vec{R}) powstających przy obciążeniu ciała siłami działającymi w różnych kierunkach (rys. 3.10).



Rysunek 3.10: Stożek tarcia – tarcie rozwinięte (T_{gr}) i nierozwinięte (T)

Na rysunku 3.11a jest pokazane ciało spoczywające na chropowatej powierzchni, a obok to samo ciało po uwolnieniu od więzów i zastąpieniu więzów siłami reakcji (\vec{T} i \vec{N}). Rysunek 3.11c ilustruje sposób określenia punktu przyłożenia reakcji.⁶



Rysunek 3.11: Reakcje podłoża, punkt przyłożenia reakcji

⁶Należy dodać, że w wielu przypadkach określenie punktu przyłożenia sił reakcji nie jest konieczne.

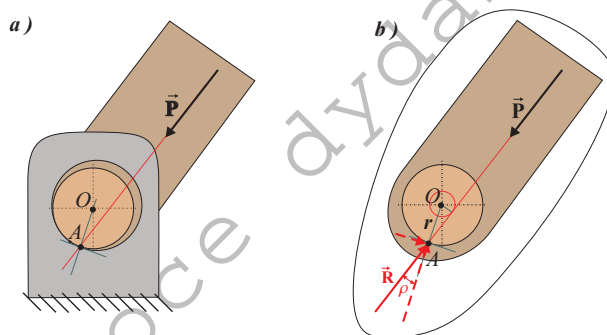
Tabela 1. Przykładowe wartości współczynników tarcia suchego: statycznego (μ_s) i kinetycznego (μ_k)

Materiały współpracujących ciał	μ_s	μ_k
stal – stal	0,15	0,10
stal – żeliwo	0,18	0,16
stal – brąz	0,18	0,16
żeliwo – żeliwo	0,45	0,20
brąz – żeliwo	0,21	0,18
metal – drewno	0,5 – 0,6	0,2 – 0,5
drewno – drewno	0,6 – 0,7	0,2 – 0,4
stal – lód	0,03	0,02

3.2.2 Modelowanie tarcia w łożyskach ślizgowych

Omówione w punkcie 3.1.1 modele więzów idealnych nie pozwalają na uwzględnienie zjawisk wywołanych tarcie występujących w rzeczywistych urządzeniach i maszynach. Uwzględnienie tarcia jest możliwe np. przy wykorzystaniu klasycznego opisu zjawiska tarcia.

Reakcje oddziaływania pomiędzy elementami łożyska ślizgowego (panwią łożyska i czopem wału) są przedstawione na rys. 3.12 i rys. 3.13.



Rysunek 3.12: Łożysko ślizgowe i reakcje oddziaływania łożyska na wał

Moment siły reakcji – przy uwzględnieniu tarcia w łożysku (rys. 3.12)

$$M_o(R) = R r \sin \rho \quad (3.4)$$

gdzie r – promień czopa wału.

Przy założeniu, że mamy do czynienia z tarcie suchym, można skorzystać z zależności $T = \mu N$. Dla małych współczynników tarcia μ (dla małych kątów

tarcia ρ) można przyjąć w przybliżeniu $\sin \rho \cong \operatorname{tg} \rho = \mu$ – wówczas

$$M_o(R) \cong R r \operatorname{tg} \rho = R r \mu . \quad (3.5)$$

Wprowadzając wielkość r_t nazywaną promieniem tarcia

$$r_t = r \sin \rho \cong r \operatorname{tg} \rho = r \mu , \quad (3.6)$$

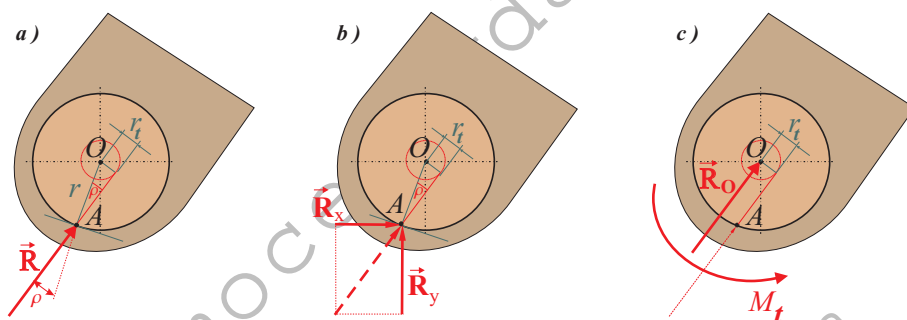
otrzymuje się zależność, która określa wartość momentu sił reakcji względem punktu O o postaci

$$M_o(R) = R r_t . \quad (3.7)$$

Reakcję oddziaływania łożyska na wał, to jest siłę $\vec{\mathbf{R}}$ działającą w punkcie A , można zastąpić równoważnym jej układem obciążeń w postaci siły $\vec{\mathbf{R}}_o = \vec{\mathbf{R}}$ i pary sił, których moment ma wartość $M_t = M_o(R)$. Siła $\vec{\mathbf{R}}_o$ ma taką samą wartość i kierunek jak $\vec{\mathbf{R}}$, ale działa wzdłuż prostej przechodzącej przez punkt O . Zatem oddziaływania łożyska na wał można przedstawić w postaci obciążeń (rys. 3.13c):

$$M_t = M_o(R) = R r \sin \rho \cong R r_t , \quad (3.8)$$

$$R_o = R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \quad (3.9)$$



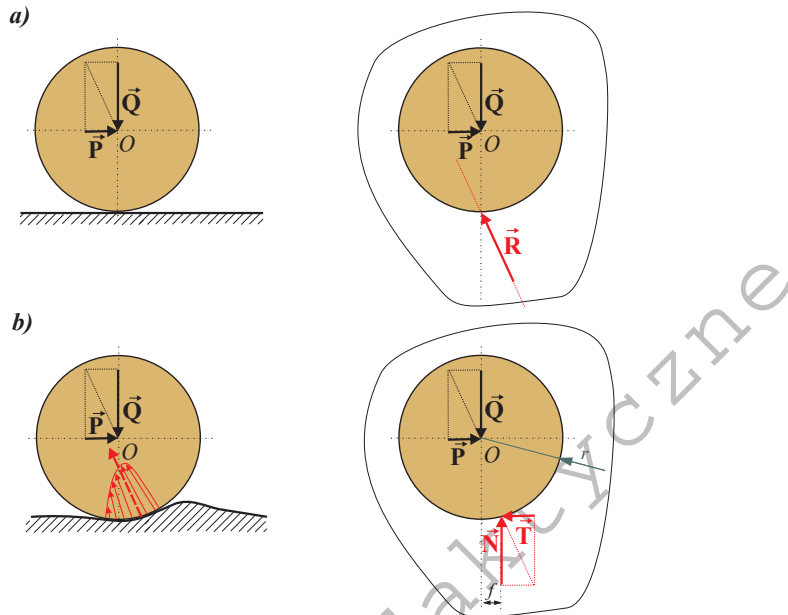
Rysunek 3.13: Różne sposoby przedstawiania reakcji łożyska ślizgowego

W łożyskach ślizgowych powszechnie stosowane są czynniki smarujące. Często smarowanie odbywa się pod ciśnieniem. W takich przypadkach omawiany tu model nie może być wykorzystywany⁷ (np. zależność (3.8) jest prawdziwa jedynie w przypadku tarcia suchego).

⁷Obliczenia łożysk ślizgowych z filmem smarującym są omawiane na zajęciach z podstaw konstrukcji maszyn.

3.2.3 Modelowanie oporu toczenia

Na rysunku 3.14 są pokazane dwa modele, które mogą być użyte przy rozpatrywaniu równowagi i ruchu koła stykającego się z poziomą powierzchnią.



Rysunek 3.14: Toczenie walca: a) podłoże sztywne (dla $P \neq 0$ równowaga jest niemożliwa), b) oddziaływanie podłoża odkształcalnego

Założenie modelu ciała (koła) w postaci bryły sztywnej oraz traktowanie podłoża jako idealnie sztywnego nie pozwala na uwzględnienie oporu, który występuje przy toczeniu ciał. W przypadku kontaktu idealnie sztywnych ciał reakcja podłoża jest przyłożona w jednym punkcie (rys. 3.14a). Przy rozpatrywaniu toczenia sztywnego walca reakcję należy rozłożyć wzdłuż linii – tworzącej walca stykającej się z podłożem.

Przyjęcie, że podłoże jest odkształcalne (rys. 3.14b) umożliwia wprowadzenie oporu toczenia. Rozkład sił reakcji na pewnym obszarze koła powoduje, że wypadkowa sił normalnych reakcji podłoża działa wzdłuż prostej, która jest przesunięta względem środka koła.

Wartość przesunięcia składowej normalnej reakcji (f) jest określana na drodze doświadczalnej (tabela 2). Kierunek przesunięcia jest taki, jak kierunek ruchu koła lub jak kierunek zamierzonego ruchu koła – w przypadku, gdy ciało znajduje się w położeniu równowagi.

Moment oporu toczenia (M_f) jest to moment składowej normalnej siły re-

akcji podłoża względem środka krążka (punktu O na rys. 3.14). Określa go zależność

$$M_f = M_o(\vec{N}) = N f \quad , \quad (3.10)$$

gdzie f – ramię oporu tocznego.

Zamiast wartości przesunięcia składowej normalnej reakcji czasami wprowadza się bezwymiarowy współczynnik oporu toczenia f_b

$$f_b = \frac{f}{r} \quad , \quad (3.11)$$

gdzie r – promień koła.

Moment oporu toczenia można więc przedstawić jako

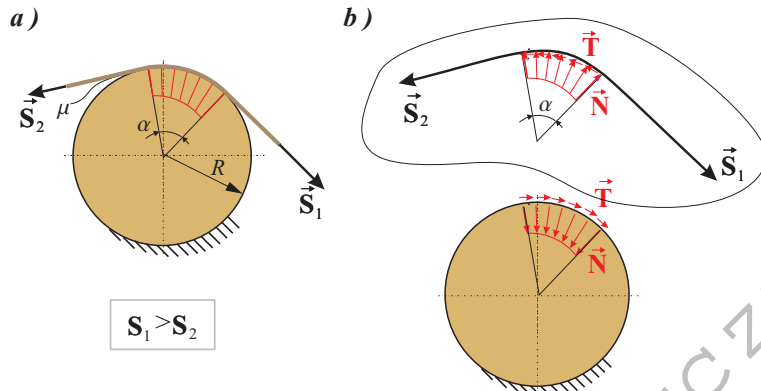
$$M_f = N f = N f_b r \quad . \quad (3.12)$$

Tabela 2. Wartości bezwymiarowego współczynnika oporu toczenia (f_b)

Nawierzchnia	Sam. osobowy	Sam. ciężarowy
	f_b	f_b
gładki asfalt	0,012	0,010
gładki beton	0,014	0,012
kostka średnia	0,020	0,018
droga polna	0,05 – 0,14	
suchy piasek	0,15 – 0,3	

3.2.4 Tarcie ciągna o powierzchnię walcową

Ze szczególnym rodzajem oddziaływania ciał mamy do czynienia w przypadku kontaktu wiotkiej taśmy z powierzchnią walcową ciała. Siły wzajemnego oddziaływania pomiędzy taśmą i ciałem są pokazane na rys. 3.15.



Rysunek 3.15: Wzajemne oddziaływanie taśmy i ciała przy uwzględnieniu sił tarcia

Zależność pomiędzy siłami po obu stronach ciągła, opasującego ciało ograniczone powierzchnią walcową, określa wzór podany przez Eulera

$$S_1 = S_2 e^{\mu\alpha}, \quad S_1 > S_2, \quad (3.13)$$

gdzie e jest podstawą logarytmu naturalnego⁸, μ jest współczynnikiem tarcia pomiędzy taśmą i ciałem, a α oznacza kąt opasania ciała taśmą (wyrażony w radianach).

Wyprowadzenie wzoru (3.13) jest przedstawione na stronach 111–113.

W przypadku, gdy $S_2 > S_1$ obowiązuje analogiczna do wzoru (3.13) zależność

$$S_2 = S_1 e^{\mu\alpha}. \quad (3.14)$$

⁸Liczba e jest liczbą niewymierną, określoną jako granica funkcji

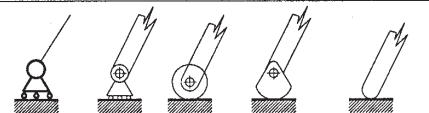
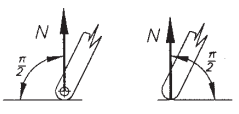

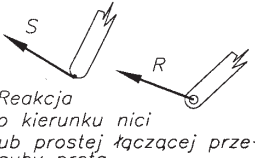
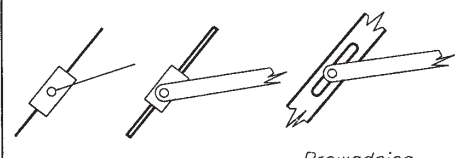
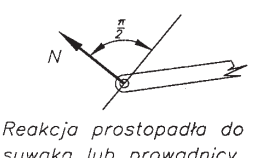
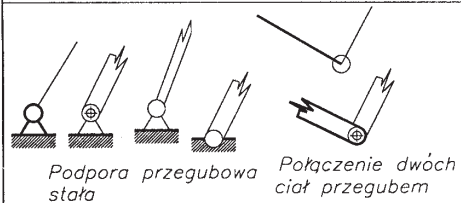
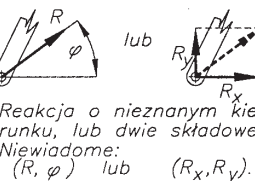
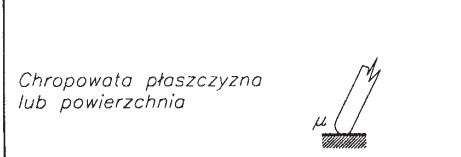
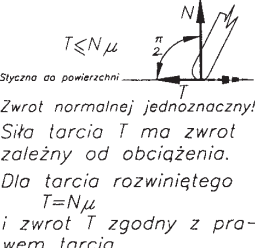
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e = 2,718\dots$$

Liczba e jest podstawą logarytmu naturalnego ($\ln x \equiv \log_e x$).

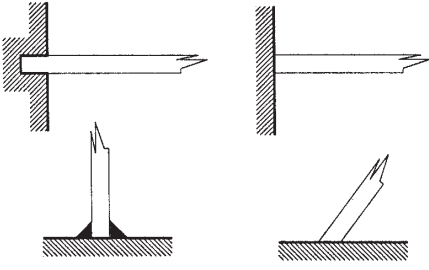
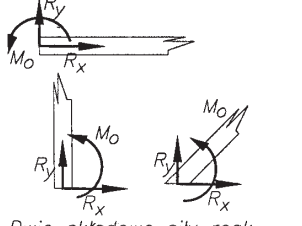
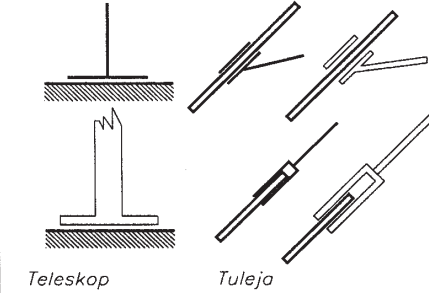
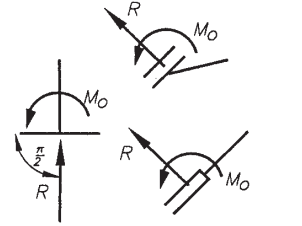
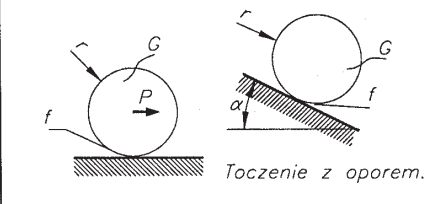

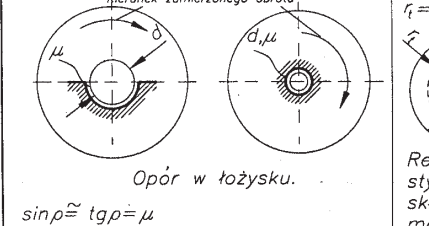
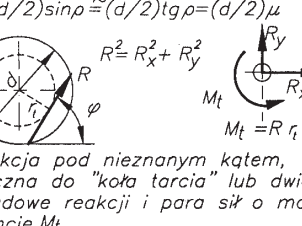
3.3 Więzy i reakcje więzów – zestawienie

W tablicach pokazanych na rysunkach⁹ 3.16 – 3.19 przedstawione są różne sposoby wzajemnych oddziaływań pomiędzy ciałami (wynikające ze sposobu połączenia ciał) oraz siły reakcji odpowiadające tym oddziaływaniom. Liczba niewiadomych oznacza liczbę wielkości (takich jak: siła, składowe siły, kąt, moment pary sił), które muszą być wyznaczone przy wyznaczaniu reakcji.

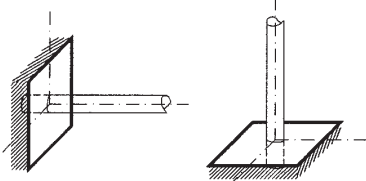
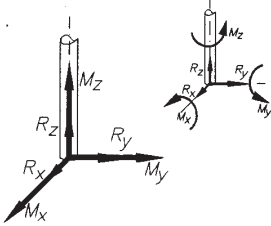
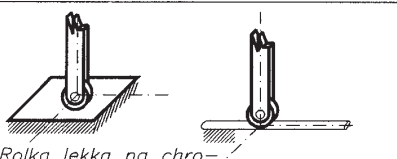
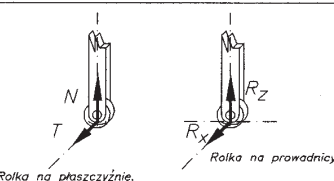
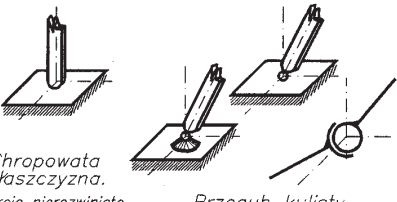
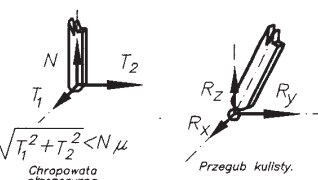

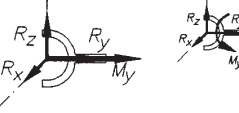
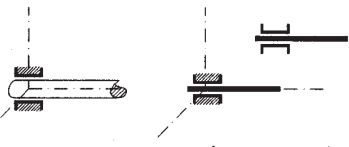
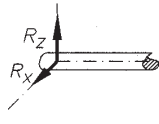
⁹Rysunki przedstawiające podstawowe rodzaje więzów, oraz reakcje ich oddziaływania na ciało zamieszczone zostały za zgodą ich autora – Bogumiła Mianowskiego.

PŁASKIE UKŁADY SIŁ		
SCHEMAT WIĘZÓW	REAKCJE WIĘZÓW	LICZBA NIEWIADOMYCH
 <p>Podpora przesuwna Rolka Biegun Gładka płaszczyzna (lekka i bez oporów)</p>	 <p>Reakcja prostopadła do płaszczyzny</p>	1
 <p>Niść wiotka i lekka Lekki pręt zakończony przegubowo</p>	 <p>Reakcja o kierunku nici lub prostej łączącej przegubowo</p>	1
 <p>Wózek Prowadnica</p>	 <p>Reakcja prostopadła do suwaka lub prowadnicy</p>	1
 <p>Podpora przegubowa stała Połączenie dwóch ciał przegubem</p>	 <p>Reakcja o nieznanym kierunku, lub dwie składowe. Niewiadome: (R, φ) lub (R_x, R_y).</p>	2
 <p>Chropowata płaszczyzna lub powierzchnia</p>	 <p>$T \leq N\mu$ Styczna do powierzchni Zwrot normalnej jednoznaczny! Siła tarcia T ma zwrot zależny od obciążenia. Dla tarcia rozwiniętego $T = N\mu$ i zwrot T zgodny z prądem tarcia.</p>	2 (dla $T < N\mu$) lub 1 (dla $T = N\mu$)

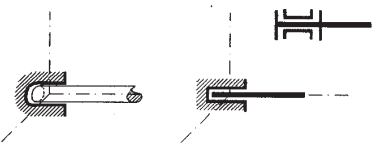
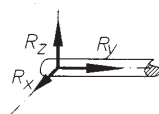
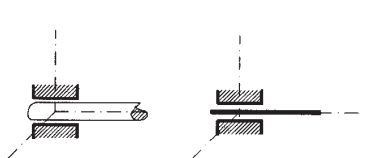
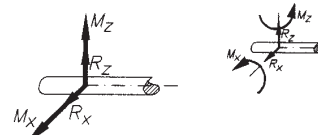
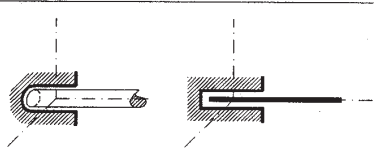
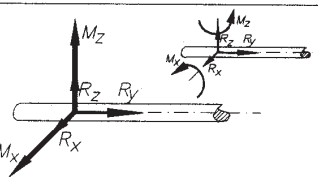
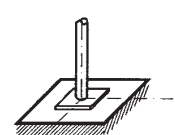
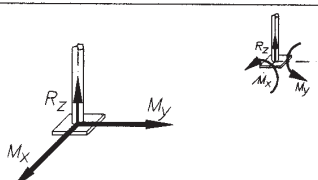
Rysunek 3.16: Rodzaje więzów i ich reakcje – układy płaskie

PŁASKIE UKŁADY SIŁ c.d.		
SCHEMAT WIĘZÓW	REAKCJE WIĘZÓW	LICZBA NIEWIADOMYCH
 <p>Zamurowanie, utwierdzenie.</p>	 <p>Dwie składowe siły reakcji i para sił reprezentowana (przedstawiona) momentem pary.</p>	3
 <p>Teleskop Tuleja</p>	 <p>Reakcja normalna i para sił przedstawiona momentem pary.</p>	2
 <p>Toczenie z oporem.</p>	 <p>Reakcja normalna przesunięta o "f" i siła tarcia, zwykle nierozwinięta.</p>	2
 <p>Kierunek zamierzanego obrotu</p> <p>Opór w łożysku.</p> <p>$\sin \rho \approx \operatorname{tg} \rho = \mu$</p>	 <p>$r_t = (d/2) \sin \rho \approx (d/2) \operatorname{tg} \rho = (d/2) \mu$</p> <p>$R^2 = R_x^2 + R_y^2$</p> <p>$M_t = R r_t$</p> <p>Reakcja pod nieznanym kątem, styczna do "koła tarcia" lub dwie składowe reakcji i para sił o momencie M_t</p>	2

Rysunek 3.17: Rodzaje więzów i ich reakcje – układy płaskie (cd.)

PRZESTRZENNE UKŁADY SIŁ		
SCHEMAT WIĘZÓW	REAKCJE WIĘZÓW	LICZBA NIEWIADOMYCH
 <p>Utwierdzenie, zamurowanie w przestrzeni.</p>	 <p>Trzy składowe siły reakcji oraz trzy składowe momenty pary sił.</p>	6
 <p>Rolka lekka na chropowatej powierzchni. Tarcie nierozwinięte. Rolka lekka na przewodnicy.</p>	 <p>Dwie składowe siły reakcji.</p>	2
 <p>Chropowata płaszczyzna. Tarcie nierozwinięte. Przegub kulisty.</p>	 <p>Trzy składowe siły reakcji.</p>	3
 <p>Przegub uniwersalny (Cardana).</p>	 <p>Trzy składowe siły i para sił.</p>	4
 <p>Łożysko promieniowe (poprzeczne) - krotkie.</p>	 <p>Dwie składowe siły w płaszczyźnie prostopadłej do osi wału.</p>	2

Rysunek 3.18: Rodzaje więzów i ich reakcje - układy przestrzenne

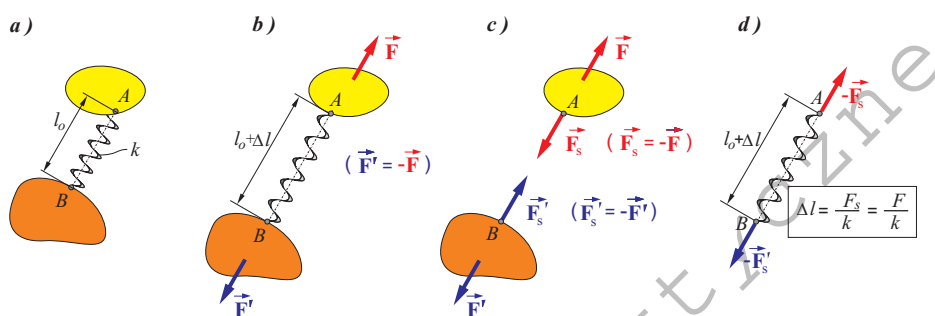
PRZESTRZENNE UKŁADY SIŁ c.d.		
SCHEMAT WIĘZÓW	REAKCJE WIĘZÓW	LICZBA NIEWIADOMYCH
 <p>Łożysko promieniowo-osiowe, (poprzeczno-wzdłużne)-krótkie.</p>	 <p>Trzy składowe siły reakcji.</p>	3
 <p>Łożysko promieniowe (poprzeczne)-długie.</p>	 <p>Dwie składowe siły reakcji oraz dwie składowe momentu pary sił.</p>	4
 <p>Łożysko promieniowo-osiowe, (poprzeczno-wzdłużne)-długie.</p>	 <p>Trzy składowe siły reakcji oraz dwie składowe momentu pary sił.</p>	5
 <p>Teleskop</p>	 <p>Siła reakcji o kierunku normalnej oraz dwie składowe momentu pary sił.</p>	3

Rysunek 3.19: Rodzaje więzów i ich reakcje - układy przestrzenne (cd.)

3.4 Oddziaływanie elementów sprężystych

Jak wspomniano wcześniej, ciała mogą być poddane działaniu reakcji więzów – to jest takich oddziaływań, które nakładają ograniczenia na położenia (albo prędkości) układu, jak też oddziaływań, które nie narzucają takich ograniczeń. Do tej drugiej grupy należą elementy sprężyste oraz elementy tłumiące (tłumiki). Przykładem takiego elementu jest sprężyna walcowa.

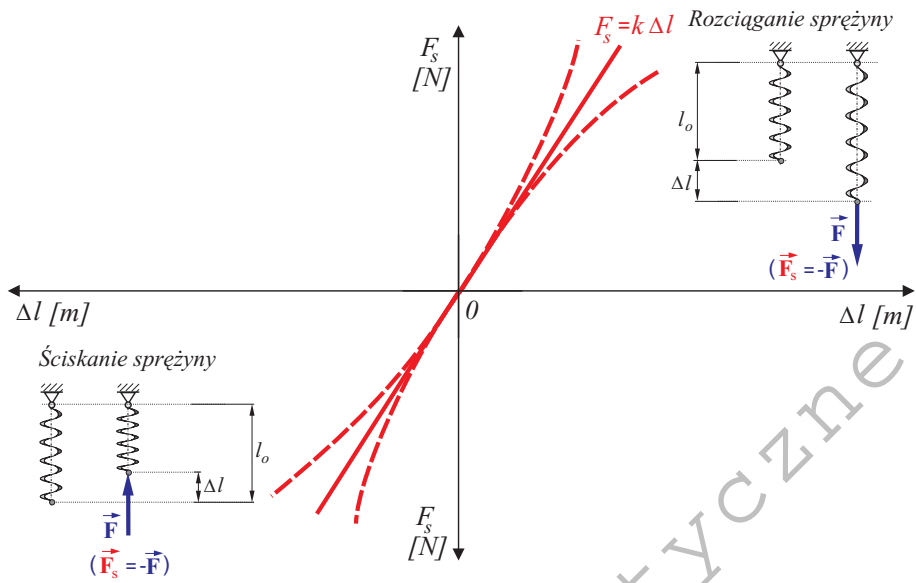
Siłę oddziaływania sprężyny (lub innego elementu o właściwościach sprężystych) na ciało nazywa się siłą sprężystości (\vec{F}_s). Jej kierunek pokrywa się z kierunkiem osi sprężyny (rys. 3.20), a zwrot jest przeciwny do wektora względnego przemieszczenia końców sprężyny.



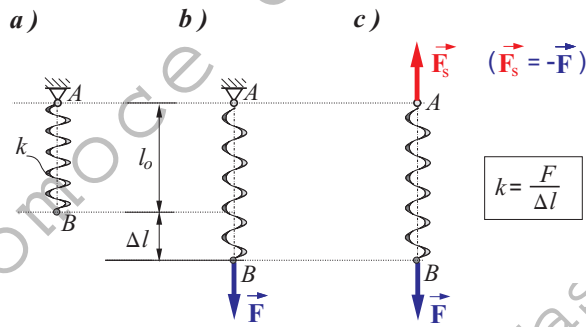
Rysunek 3.20: Ciała połączone sprężyną (a), wydłużenie sprężyny przy działaniu obciążeń (b), siły oddziaływania sprężyny na ciała (c), obciążenia i wydłużenie sprężyny (d)

Wydłużenie (skrócenie) sprężyny – oznaczone na rys. 3.20 jako Δl – zależy od obciążenia jej końców i od sztywności sprężyny. Jeśli wydłużenie jest proporcjonalne do obciążenia, wówczas sprężynę nazywa się liniową (albo o liniowej charakterystyce). Typowe charakterystyki sprężyn zostały pokazane na rys. 3.21.

Współczynnik k określający własności sprężyny o liniowej charakterystyce nosi nazwę *stała sprężyny* (*sztywność sprężyny* albo *współczynnik sprężystości*). Współczynnik ten można wyznaczyć na podstawie pomiaru wydłużeń dla zadanych obciążeń sprężyny (rys. 3.22). W przypadku sprężyny, której charakterystyka jest linią prostą współczynnik k jest równy współczynnikowi kierunkowemu tej prostej ($k = \frac{F}{\Delta l}$), to jest tangensowi kąta nachylenia prostej.



Rysunek 3.21: Przykładowe charakterystyki sprężyn



Rysunek 3.22: Sposób wyznaczania współczynnika sztywności sprężyny ($k = \frac{F}{\Delta l}$)

Rozdział 4

STATYKA

Jeśli ciało pozostaje w spoczynku względem układu odniesienia przez dowolnie długi czas, to mówimy wówczas, że ciało znajduje się w położeniu równowagi względem tego układu (lub krótko – w równowadze).

Statyka – to część mechaniki, w której analizuje się położenia równowagi punktów materialnych, układów punktów materialnych, ciał sztywnych oraz układów złożonych z punktów materialnych i ciał sztywnych. Analiza położenia równowagi może polegać na wyznaczeniu położenia (albo położenia), w których układ pozostaje w spoczynku pod działaniem zadanych sił zewnętrznych i przy nałożonych na ten układ ograniczeniach (więzach). Badanie położenia równowagi często polega na wyznaczeniu sił reakcji oddziaływania więzów – przy zadanym położeniu równowagi (lub w wyznaczonym położeniu równowagi). Ważnym zagadnieniem statyki jest też wyznaczanie sił wewnętrznych w układzie – zarówno sił wzajemnego oddziaływania pomiędzy ciałami, jak i sił przekrojowych (w wybranych przekrojach ciał).

4.1 Równowaga swobodnego punktu materialnego

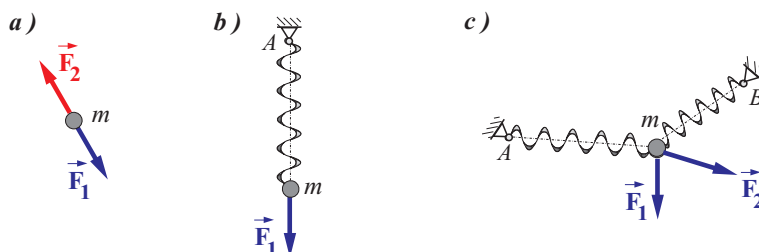
Swobodnym punktem materialnym nazywa się punkt, którego położenie (ani prędkość) nie podlega żadnym ograniczeniom (rys. 4.1). Zachowanie punktu (spoczynek, ruch) zależy jedynie od sił zewnętrznych (czynnych oraz sił sprężystości) działających na punkt.

Równania równowagi swobodnego punktu materialnego wynikają z II prawa dynamiki Newtona

$$m\vec{a} = \vec{F}, \quad (4.1)$$

gdzie:

m – masa punktu,
 \vec{a} – przyspieszenie punktu,
 $\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$ – suma sił zewnętrznych działających na punkt materialny
 (wypadkowa sił zewnętrznych czynnych i sił sprężystości).



Rysunek 4.1: Swobodny punkt materialny – przykłady

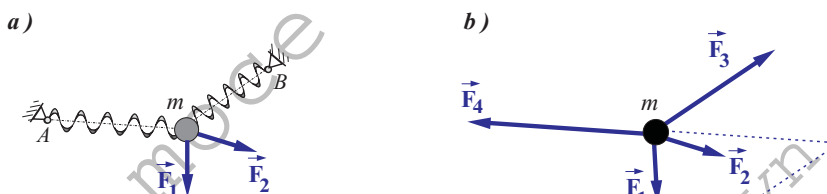
Punkt materialny znajduje się w spoczynku, jeśli jego prędkość jest równa zero ($\vec{v} = \vec{0}$), a także przyspieszenie jest równe zero. Ruch takiego punktu może być wywołany przez siły (\vec{F}_i) działające na punkt. Zgodnie z (4.1) przyspieszenie punktu można określić na podstawie zależności

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}. \quad (4.2)$$

W przypadku, gdy

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{0}, \quad (4.3)$$

przyspieszenie punktu jest równe zero ($\vec{a} = \vec{0}$).



Rysunek 4.2: Swobodny punkt materialny i siły zewnętrzne działające na punkt (ich wypadkowa $\vec{F} = \vec{0}$ i przyspieszenie punktu $\vec{a} = \vec{0}$)

Pod wpływem sił spełniających warunek (4.3) nieruchomy punkt materialny pozostanie w spoczynku (rys. 4.2) – mówimy wówczas, że punkt znajduje się w położeniu równowagi (lub krótko – w równowadze).

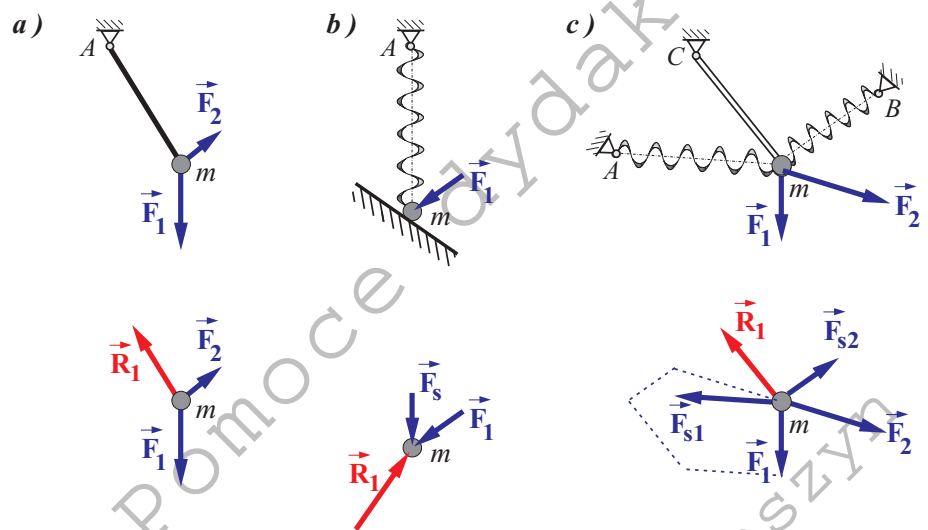
Z warunku równowagi (4.3) wynikają równania równowagi swobodnego punktu materialnego:

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0, \quad \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0, \quad \sum_{i=1}^n F_{iz} = 0. \quad (4.4)$$

4.2 Równowaga nieswobodnego punktu materialnego

Nieswobodnym punktem materialnym nazywa się punkt, którego ruch (a także jego położenie równowagi) podlega określonym ograniczeniom (rys. 4.3). Nałożone ograniczenia są nazywane więzami. Zachowanie punktu (spoczynek, ruch) zależy zarówno od sił zewnętrznych czynnych i sił sprężystości działających na punkt, jak i oddziaływania więzów. Oddziaływania więzów są przedstawiane w postaci sił reakcji (siły zewnętrzne bierne). Podstawowe rodzaje więzów i odpowiadające im siły reakcji zostały przedstawione w punkcie 3.3.

Na nieswobodny punkt materialny, prócz sił zewnętrznych czynnych i sił sprężystości, działają więc siły reakcji więzów.



Rysunek 4.3: Przykłady nieswobodnych punktów materialnych oraz siły działające na te punkty

Jeśli na punkt działa n sił zewnętrznych i sił sprężystości oraz r sił reakcji,

to można je zsumować i zastąpić siłami wypadkowymi:

$$\vec{\mathbf{F}} = \sum_{i=1}^n \vec{\mathbf{F}}_i, \quad (4.5)$$

$$\vec{\mathbf{R}} = \sum_{j=1}^r \vec{\mathbf{R}}_j, \quad (4.6)$$

gdzie:

$\vec{\mathbf{F}}_i$ – siły zewnętrzne czynne i siły sprężystości,

$\vec{\mathbf{R}}_j$ – siły zewnętrzne bierne, zwane reakcjami – wynikające z oddziaływań więzów.

Drugie prawo dynamiki dla punktu materialnego obciążonego siłą $\vec{\mathbf{P}} = \vec{\mathbf{F}} + \vec{\mathbf{R}}$, to znaczy w przypadku działania na punkt sił zewnętrznych czynnych i sił reakcji, można przedstawić jako

$$m\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{F}} + \vec{\mathbf{R}}, \quad (4.7)$$

gdzie:

m – masa punktu,

$\vec{\mathbf{a}}$ – przyspieszenie punktu (w położeniu równowagi $\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{0}}$),

$\vec{\mathbf{F}}$ – wypadkowa sił zewnętrznych czynnych i sił sprężystości,

$\vec{\mathbf{R}}$ – wypadkowa sił reakcji.

Punkt materialny znajdujący się w spoczynku (jego prędkość jest równa zero $\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{0}}$) będzie pozostawał w spoczynku, jeśli spełniony będzie warunek $\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{0}}$. Zgodnie z (4.7) oraz (4.5) i (4.6) przyspieszenie będzie równe zero ($\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{0}}$) wówczas, gdy

$$\sum_{i=1}^n \vec{\mathbf{F}}_i + \sum_{j=1}^r \vec{\mathbf{R}}_j = \vec{\mathbf{0}}. \quad (4.8)$$

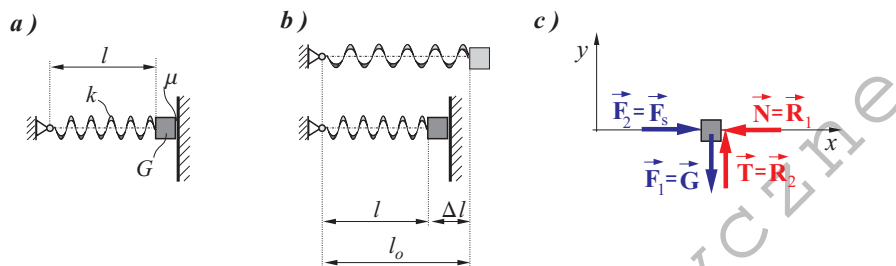
Spełnienie warunku, by suma wektorów była równa zero zapewnia zerową wartość rzutów tych wektorów na trzy nierównoległe i nie leżące w jednej płaszczyźnie osie:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n F_{ix} + \sum_{j=1}^r R_{jx} &= 0, \\ \sum_{i=1}^n F_{iy} + \sum_{j=1}^r R_{jy} &= 0, \\ \sum_{i=1}^n F_{iz} + \sum_{j=1}^r R_{jz} &= 0. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Równania (4.9) są nazywane równaniami równowagi nieswobodnego punktu materialnego.

PRZYKŁAD 4.2.6

Kostka o ciężarze G jest dociskana przez sprężynę do pionowej płaszczyzny. Współczynnik tarcia pomiędzy kostką a płaszczyzną jest równy μ . Wyznaczyć początkową długość sprężyny (l_0), o współczynniku sztywności k , która jest konieczna do utrzymania kostki w równowadze, w położeniu pokazanym na rysunku 4.4a. Wymiary kostki pominąć. Dane: $k = 5000 \text{ N/m}$; $G = 20 \text{ N}$; $l = 0,1 \text{ m}$; $\mu = 0,3$.



Rysunek 4.4: Równowaga nieswobodnego punktu materialnego

ROZWIĄZANIE

Zakładamy, że modelem kostki jest punkt materialny. Przy rozpatrywaniu równowagi dowolnego ciała albo punktu materialnego należy uwzględnić wszystkie działające nań siły: czynne i bierne (rys. 4.4c). Siłami czynnymi w analizowanym przypadku są siła ciężkości kostki (\vec{G}) oraz siła sprężysta (\vec{F}_s). Wartość siły oddziaływania sprężyny na kostkę określa zależność

$$F_s = k \Delta l = k (l_0 - l) ,$$

w której $\Delta l = l_0 - l$ oznacza wstępne ugięcie (skrócenie) sprężyny w trakcie montażu układu (rys. 4.4b). Kierunek tej siły pokrywa się z kierunkiem osi sprężyny, a zwrot jest przeciwny do przemieszczenia końca sprężyny przy jej napinaniu.

Uwalniając układ od więzów i zastępując działanie więzów odpowiednimi reakcjami, otrzymujemy pozostałe siły obciążające kostkę (\vec{N} – siła normalna do powierzchni, z którą styka się kostka, zwrócona od powierzchni do ciała oraz \vec{T} – siła tarcia, styczna do powierzchni styku i o zwrocie przeciwdziałającym zsuwaniu się kostki).

Na rysunku podane zostały podwójne oznaczenia sił. Wskazują one wyraźnie do jakiej kategorii sił należą poszczególne obciążenia.

Na podstawie równań równowagi (4.9) (symboliczne oznaczenia sił użyte w tych równaniach odnoszą się do następujących wielkości: $F_{1x} = 0$, $F_{1y} = -G$,

$F_{2x} = F_s, F_{2y} = 0, R_{1x} = -N, R_{1y} = 0, R_{2x} = 0, R_{2y} = T$) otrzymuje się:

$$\begin{aligned}F_s - N &= 0, \\T - G &= 0.\end{aligned}$$

Trzecie równanie układu (4.9) prowadzi do tożsamości $0 = 0$ (gdyż $F_{1z} = F_{2z} = R_{1z} = R_{2z} = 0$) i zostało pominięte.

Wobec trzech wielkości niewiadomych występujących w równaniach równowagi rozpatrywanego punktu materialnego, do rozwiązania zadania konieczne jest jeszcze trzecie równanie. Jest nim zależność

$$T = \mu N,$$

określająca graniczną wartość siły tarcia.

Po rozwiązaniu równań otrzymuje się

$$l_0 = l + \frac{G}{\mu k} = 0,113 \text{ m} . \quad \diamond$$

4.3 Szczególne przypadki równowagi ciała sztywnego

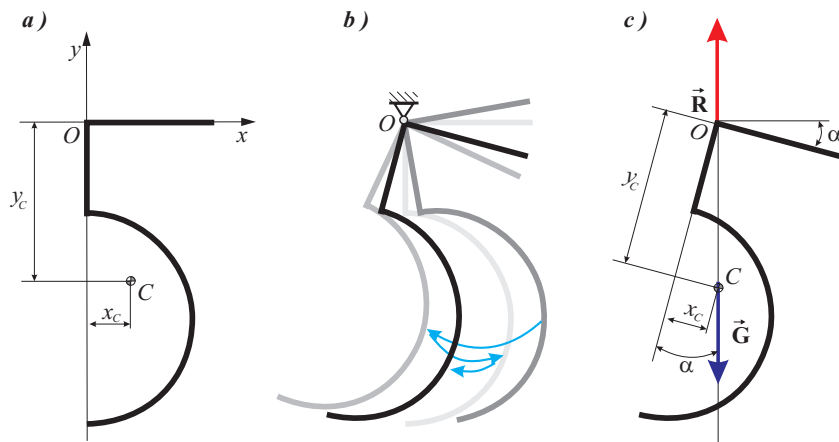
Niektóre zadania dotyczące równowagi ciała sztywnego mogą być rozwiązywane na bazie podstawowych założeń mechaniki (por. rozdział 1.3). Takie przypadki zostaną przedstawione w tym rozdziale. Rozdział następny obejmuje warunki równowagi ciała w przypadku ogólnym i umożliwia analizę położenia równowagi ciała obciążonego dowolnym układem sił.

4.3.1 Równowaga ciała sztywnego obciążonego dwiema siłami

Zgodnie z podstawowymi założeniami przyjmowanymi w mechanice (założenie VII) równowaga ciała sztywnego obciążonego dwiema siłami jest możliwa tylko wtedy, gdy siły działają wzdłuż jednej prostej, są przeciwnie zwrócone i mają te same wartości liczbowe.

PRZYKŁAD 4.3.7

Znając współrzędne x_C, y_C punktu przyłożenia siły ciężkości zakrzywionego pręta (rys. 4.5a), należy określić położenie równowagi pręta, gdy zostanie on zawieszony w sposób pokazany na rys. 4.5b.



Rysunek 4.5: Przykład pręta zawieszonoego na przegubie walcowym

ROZWIĄZANIE

Ponieważ siła ciężkości (\vec{G}) ma kierunek pionowy, to równowaga będzie możliwa tylko wtedy, gdy reakcja podpory (\vec{R}) będzie miała kierunek pionowy. Ponadto obie siły muszą leżeć na jednej prostej. Dodatkowo ich wartości muszą być równe ($R = G$). Położenie równowagi pręta jest pokazane na rys. 4.5c. Kąt α można wyznaczyć z zależności

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{x_c}{y_c} . \quad \diamond$$

4.3.2 Równowaga ciała sztywnego obciążonego trzema siłami

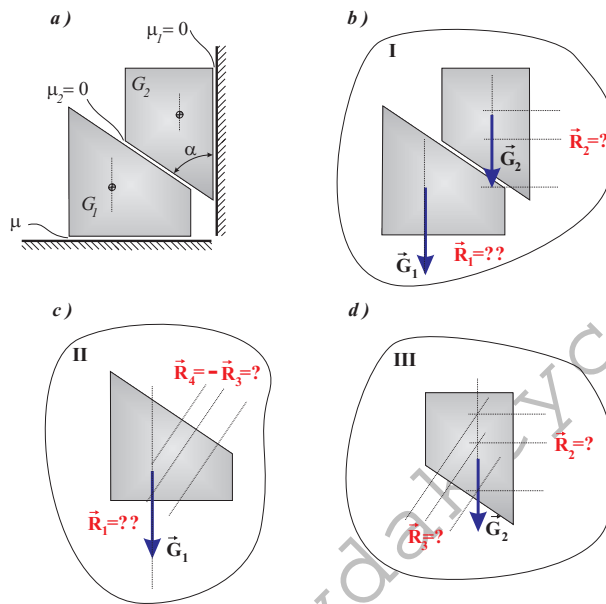
- Jeżeli na ciało sztywne działają trzy siły nierównoległe, to pozostaje ono w równowadze wtedy i tylko wtedy, gdy siły przecinają się w jednym punkcie, a suma dwu z tych sił jest wektorem przeciwnym do trzeciej i leży na tej samej prostej.

Podane tu sformułowanie *twierdzenia o trzech siłach* nie wymaga dowodu. (Układ sił sprowadza się do dwu sił, pod działaniem których ciało jest w równowadze.) Z twierdzenia o trzech siłach wynika poniższy wniosek.

Jeśli na ciało sztywne pozostające w spoczynku działa dowolna liczba sił, ale są one przyłożone w trzech punktach ciała, to taki układ sił daje się sprowadzić do układu sił zbieżnych.

PRZYKŁAD 4.3.8

Ciała o ciężarach G_1 i G_2 (rys. 4.6a) są nieruchome (znajdują się w położeniu równowagi). Wyznaczyć reakcje oddziaływania powierzchni, z którymi stykają się ciała oraz siły wzajemnego oddziaływania pomiędzy ciałami przy założeniu, że ani na powierzchni pionowej, ani na powierzchni kontaktu ciał nie występują siły tarcia ($\mu_1 = \mu_2 = 0$).

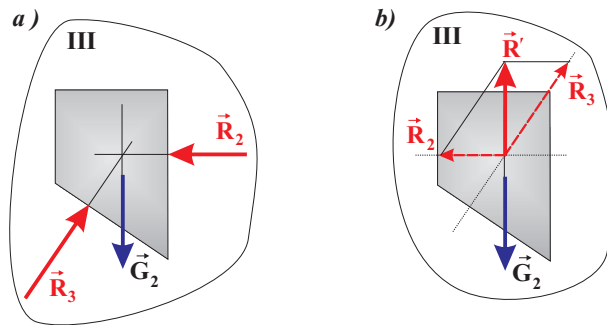


Rysunek 4.6: Ciała obciążone układami sił zbieżnych

ROZWIĄZANIE

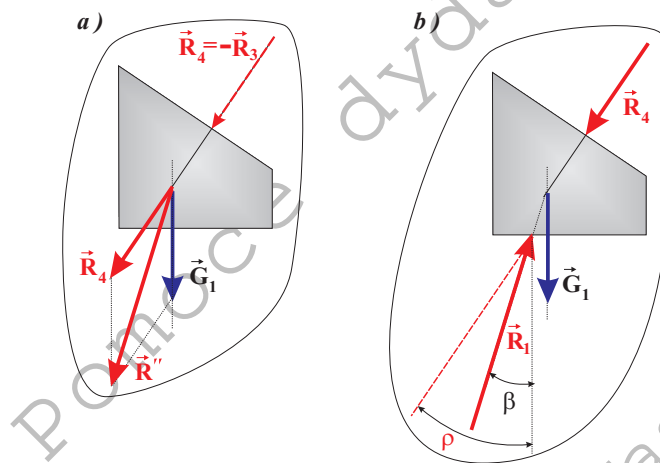
Uwolnienie całego układu od więzów (układ "I" – rys. 4.6a) i wprowadzenie reakcji jest w pierwszej fazie rozwiązywania niemożliwe, gdyż nieznaną jest kierunek reakcji podłoża (\vec{R}_1). Kierunek reakcji pionowej ściany jest – z uwagi na brak tarcia – prostopadły do jej płaszczyzny. Warto zwrócić uwagę, że położenie prostej, wzdłuż której działa reakcja \vec{R}_2 nie jest określone (na rysunku pokazano kilka prostych, które mogą być liniami działania \vec{R}_2).

Podział układu na dwa podukłady ("II" i "III") umożliwia rozwiązanie problemu (rys. 4.7). Dla podukładu "III" kierunek reakcji \vec{R}_3 jest prostopadły do powierzchni kontaktu ciał z uwagi na brak tarcia na tej powierzchni ($\mu_2 = 0$). Znając kierunki działania sił \vec{R}_2 i \vec{R}_3 i wiedząc, że ich suma (\vec{R}') jest wektorem przeciwnym do \vec{G}_2 można – konstruując odpowiedni równoległobok – wyznaczyć wartości (długości) sił reakcji.



Rysunek 4.7: Równowaga ciała obciążonego trzema siłami ($\vec{R}_2 + \vec{R}_3 = -\vec{G}_2$)

Wracając do podukładu "II" (rys. 4.8) można wyznaczyć pozostałe reakcje. Zgodnie z założeniem o działaniu i przeciwdziałaniu (założenie VI) reakcja \vec{R}_4 będzie wektorem przeciwnym do \vec{R}_3 ($\vec{R}_4 = -\vec{R}_3$). Suma sił \vec{R}_4 i \vec{G}_1 ($\vec{R}'' = \vec{R}_4 + \vec{G}_1$) jest wektorem przeciwnym do trzeciej siły działającej na rozpatrywane ciało. Zatem $\vec{R}_4 = -\vec{R}'' = -\vec{R}_4 - \vec{G}_1$.



Rysunek 4.8: Równowaga ciała obciążonego trzema siłami ($\vec{R}_4 + \vec{G}_1 = -\vec{R}_1$)

Warunki równowagi układu można przedstawić – w postaci wektorowej –

jako:

$$\begin{aligned}\vec{R}_2 + \vec{R}_3 + \vec{G}_2 &= \vec{0}, \\ \vec{R}_1 + \vec{R}_4 + \vec{G}_1 &= \vec{0}, \\ \vec{R}_4 &= -\vec{R}_3.\end{aligned}$$

Na zakończenie przypomnimy, że równowaga ciała jest możliwa pod warunkiem, że $\beta \leq \rho$, gdzie $\operatorname{tg} \rho = \mu$. \diamond

4.4 Warunki równowagi układu punktów materialnych

Przy rozpatrywaniu układu punktów materialnych można rozpatrywać oddzielnie swobodne i nieswobodne układy punktów. Różnica między nimi polega na występowaniu sił reakcji więzów (dla układów nieswobodnych) lub braku oddziaływań więzów (dla układów swobodnych). Zarówno w układach swobodnych, jak i nieswobodnych występują siły wzajemnego oddziaływania pomiędzy punktami układu – siły wewnętrzne.

Analizę równowagi układu punktów materialnych rozpoczniemy od klasyfikacji sił występujących w takich układach. Siły zewnętrzne czynne i siły reakcji występowały już wcześniej, przy omawianiu równowagi swobodnego i nieswobodnego punktu materialnego. Informacje dotyczące tych sił zostaną tu zrekapitulowane.

4.4.1 Siły wewnętrzne i siły zewnętrzne

Siłami wewnętrznymi nazywa się siły wzajemnego oddziaływania pomiędzy punktami należącymi do układu materialnego¹. Symbol \vec{W}_{ij} oznacza siłę, z jaką punkt i działa na punkt j .

Przypomnimy, że do układu materialnego zalicza się tylko te punkty, pomiędzy którymi zachodzą wzajemne oddziaływania. Siły wewnętrzne występują więc w każdym układzie punktów materialnych. Mogą to być siły wynikające z bezpośrednich oddziaływań pomiędzy punktami (siły kontaktowe) lub z oddziaływań pośrednich – poprzez elementy sprężyste, tłumiki. Liczba sił wewnętrznych działających na poszczególne punkty może być różna, gdyż punkt nie musi oddziaływać na wszystkie pozostałe (ale musi oddziaływać przynajmniej na jeden punkt). Wypadkowe sił wewnętrznych działających na punkt i są dalej oznaczone symbolem \vec{W}_i .

Wypadkowa sił wewnętrznych \vec{W}_i działających na punkt i , a pochodzących od oddziaływania wszystkich pozostałych punktów układu, może być przedsta-

¹Taki sam charakter mają siły wzajemnego oddziaływania pomiędzy ciałami (i punktami materialnymi) stanowiącymi układ mechaniczny.

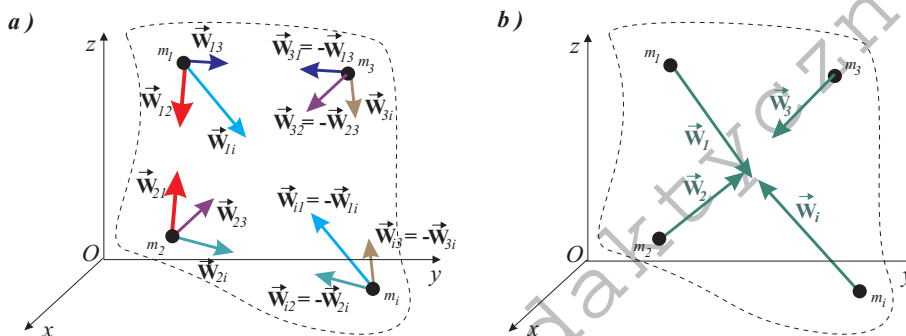
wiona w postaci sumy wektorów

$$\vec{W}_i = \vec{W}_{i1} + \vec{W}_{i2} + \dots + \vec{W}_{in} = \sum_{j=1}^n \vec{W}_{ij}. \quad (4.10)$$

\vec{W}_{ij} oznacza siłę oddziaływania punktu i na punkt j , przy czym $\vec{W}_{ij} = -\vec{W}_{ji}$ ($\vec{W}_{ii} = \vec{0}$). Istotne jest to, że suma wszystkich sił wewnętrznych działających na układ punktów materialnych jest równa zeru

$$\sum_{i=1}^n \vec{W}_i = \vec{0}. \quad (4.11)$$

Można to wykazać rozpatrując siły wzajemnego oddziaływania pomiędzy punktami \vec{W}_{ij} (rys. 4.9).

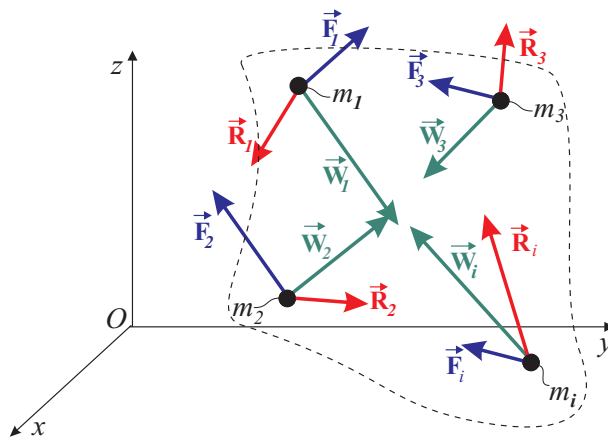


Rysunek 4.9: Siły wewnętrzne: a) wzajemnego oddziaływania pomiędzy punktami (\vec{W}_{ij}); b) wypadkowe sił wewnętrznych działających na poszczególne punkty (\vec{W}_i)

Swobodny układ punktów materialnych (rys. 4.10) jest ponadto obciążony siłami zewnętrznymi czynnymi (\vec{F}_i), wywołanymi oddziaływaniem ciał (lub punktów materialnych) nie należących do rozpatrywanego układu. Mogą one wynikać z oddziaływań bezpośrednich lub pośrednich. Istotne jest to, że siły czynne nie nakładają ograniczeń na położenia (ani na prędkości) rozpatrywanego układu.

W przypadku nieswobodnego układu punktów materialnych mamy jeszcze do czynienia z siłami zewnętrznymi, ograniczającymi położenia (albo prędkości) punktów analizowanego układu. Siły te są nazywane reakcjami więzów (\vec{R}_i).

Na każdy punkt materialny może działać dowolna liczba sił. W takim przypadku wygodnie jest zastąpić działające siły wypadkowymi. Wielkości \vec{F}_i, \vec{R}_i oznaczają wektory wypadkowe wszystkich sił zewnętrznych działających na punkt i (rys. 4.10).



Rysunek 4.10: Siły zewnętrzne (\vec{F}_i, \vec{R}_i) i wewnętrzne (\vec{W}_i) działające na układ punktów materialnych

4.4.2 Warunki równowagi nieswobodnego układu punktów materialnych

Układ n punktów materialnych będzie pozostawał w spoczynku, jeśli spełnione będą warunki równowagi dla każdego punktu z osobna, to znaczy:

$$\vec{F}_i + \vec{W}_i + \vec{R}_i = \vec{0}, \quad (i = 1, \dots, n). \quad (4.12)$$

Korzystanie z tych równań może być kłopotliwe (w przypadku dużej liczby punktów materialnych w układzie zachodzi konieczność rozwiązania dużej liczby równań). Zsumowanie wszystkich n -równań (4.12) prowadzi do zależności

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i + \sum_{i=1}^n \vec{W}_i + \sum_{i=1}^n \vec{R}_i = \vec{0}, \quad (4.13)$$

która – po wykorzystaniu (4.11) – sprowadza się do

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i + \sum_{i=1}^n \vec{R}_i = \vec{0}. \quad (4.14)$$

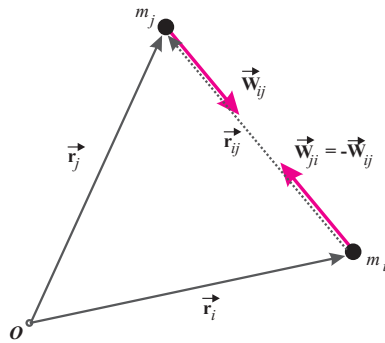
Warunek (4.14) oznacza zerowy wektor główny (\vec{S}) sił zewnętrznych (czynnych i biernych) działających na układ punktów.

Drugim warunkiem, jaki muszą spełniać siły działające na układ punktów materialnych jest zerowy moment główny (\vec{M}_{g_0}) sił zewnętrznych względem dowolnego bieguna.

$$\sum_{i=1}^n (\vec{r}_i \times \vec{F}_i) + \sum_{i=1}^n (\vec{r}_i \times \vec{R}_i) = \vec{0}. \quad (4.15)$$

Warunek ten można udowodnić, mnożąc każde z równań (4.12) przez wektor \vec{r}_i (lewostronny iloczyn wektorowy), a następnie dodając wszystkie równania.

Ważne jest jeszcze stwierdzenie, że suma momentów sił wewnętrznych układu materialnego względem dowolnego bieguna jest równa zero. Można to udowodnić, rozpatrując siły wzajemnego oddziaływania dwóch dowolnych punktów (i oraz j) układu (rys. 4.11).



Rysunek 4.11: Wyznaczanie sumy momentów sił wewnętrznych względem bieguna O

Sumując momenty sił \vec{W}_{ij} i \vec{W}_{ji} względem bieguna O

$$\vec{M}_O(\vec{W}_{ij}) + \vec{M}_O(\vec{W}_{ji}) = \vec{r}_i \times \vec{W}_{ij} + \vec{r}_j \times \vec{W}_{ji}, \quad (4.16)$$

po wykorzystaniu związków:

$$\vec{W}_{ji} = -\vec{W}_{ij}, \quad \vec{r}_j = \vec{r}_i + \vec{r}_{ij}, \quad (4.17)$$

można napisać

$$\begin{aligned} \vec{M}_O(\vec{W}_{ij}) + \vec{M}_O(\vec{W}_{ji}) &= \vec{r}_i \times \vec{W}_{ij} + (\vec{r}_i + \vec{r}_{ij}) \times (-\vec{W}_{ij}) = \\ &= -\vec{r}_{ij} \times \vec{W}_{ij} = \vec{0}, \end{aligned} \quad (4.18)$$

gdyż wektory \vec{r}_{ij} i \vec{W}_{ij} mają jednakowe kierunki.

Sumując momenty pochodzące od wszystkich sił wewnętrznych \vec{W}_{ij} , przy czym sumowanie to może odbywać się parami $(\vec{W}_{ij}, \vec{W}_{ji})$, otrzymuje się

$$\sum_{i=1}^n \vec{M}_O(\vec{W}_i) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\vec{M}_O(\vec{W}_{ij}) + \vec{M}_O(\vec{W}_{ji})) = \vec{0}. \quad (4.19)$$

Wynika stąd, że suma momentów sił wewnętrznych układu materialnego względem dowolnego bieguna jest równa zero.

Warunki równowagi nieswobodnego układu punktów materialnych sprowadzają się do:

$$\vec{S} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i + \sum_{i=1}^n \vec{R}_i = \vec{0}, \quad (4.20)$$

$$\vec{M}_{\mathbf{g}_O} = \sum_{i=1}^n (\vec{r}_i \times \vec{F}_i) + \sum_{i=1}^n (\vec{r}_i \times \vec{R}_i) = \vec{0}. \quad (4.21)$$

Używając oznaczenia $\vec{P}_i = \vec{F}_i + \vec{R}_i$ równania te można zapisać jako:

$$\vec{S} = \sum_{i=1}^n \vec{P}_i = \vec{0}, \quad (4.22)$$

$$\vec{M}_{\mathbf{g}_O} = \sum_{i=1}^n (\vec{r}_i \times \vec{P}_i) = \vec{0}. \quad (4.23)$$

Tym dwóm równaniom wektorowym odpowiada sześć równań równowagi w postaci skalarnej – ich postać jest określona wzorami:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n P_{ix} &= 0, \\ \sum_{i=1}^n P_{iy} &= 0, \\ \sum_{i=1}^n P_{iz} &= 0, \\ \sum_{i=1}^n M_{ix} &= \sum_{i=1}^n (y_i P_{iz} - z_i P_{iy}) = 0, \\ \sum_{i=1}^n M_{iy} &= \sum_{i=1}^n (z_i P_{ix} - x_i P_{iz}) = 0, \\ \sum_{i=1}^n M_{iz} &= \sum_{i=1}^n (x_i P_{iy} - y_i P_{ix}) = 0. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Podane równania są warunkami koniecznymi, jakie muszą być spełnione dla zapewnienia równowagi układu punktów materialnych. Nie są to jednak warunki wystarczające. (Mimo, że będą one spełnione punkty układu mogą poruszać się względem siebie.)

Warunki te są warunkami wystarczającymi istnienia równowagi układu punktów materialnych w przypadku, gdy odległości pomiędzy punktami pozostają niezmiennie (ma to miejsce w przypadku ciała sztywnego).

4.5 Równania równowagi ciała sztywnego

Ciało sztywne może być traktowane jako układ nieskończenie wielu punktów materialnych ($n \rightarrow \infty$), których wzajemne odległości nie ulegają zmianie. Oznacza to, że równania równowagi układu punktów materialnych (4.22) i (4.23) (albo równania w postaci skalarnej (4.24)) mogą być wykorzystywane przy rozpatrywaniu równowagi ciała sztywnego. Dla ciała sztywnego są one warunkami koniecznymi i wystarczającymi na to, by ciało było w równowadze.

Należy jedynie zwrócić tu uwagę na sposób numerowania sił. W przypadku układu punktów materialnych ich liczba (n) określała również liczbę sił działających na układ. Na każdy punkt materialny działała jedna (wypadkowa) siła zewnętrzna, jedna (wypadkowa) siła wewnętrzna i jedna (wypadkowa) siła reakcji więzów.

Dla ciała sztywnego wygodniejsze jest przyjęcie odmiennego sposobu numerowania sił. Symbol n w przypadku ciała sztywnego oznaczać będzie liczbę wszystkich sił zewnętrznych i sił reakcji działających na ciało. Liczbę sił czynnych oznaczymy symbolem n_F , a liczbę sił reakcji przez n_R .

Układ sił czynnych \vec{F}_i ($i = 1 \dots n_F$), działających na ciało sztywne, można w takim przypadku przedstawić jako: $\vec{P}_1 = \vec{F}_1, \vec{P}_2 = \vec{F}_2, \dots, \vec{P}_{n_F} = \vec{F}_{n_F}$, a siły reakcji \vec{R}_j ($j = 1 \dots n_R$) oznaczyć: $\vec{P}_{n_F+1} = \vec{R}_1, \dots, \vec{P}_{n_F+n_R} = \vec{R}_{n_R}$. Należy tu dodać, że suma wszystkich sił wewnętrznych dla ciała sztywnego jest równa zero (gdyż $\vec{W}_{ij} = -\vec{W}_{ji}$).

Równania równowagi ciała sztywnego mogą być również wyprowadzone na podstawie informacji zawartych w punkcie 2.5.3, dotyczących redukcji sił działających na ciało sztywne.

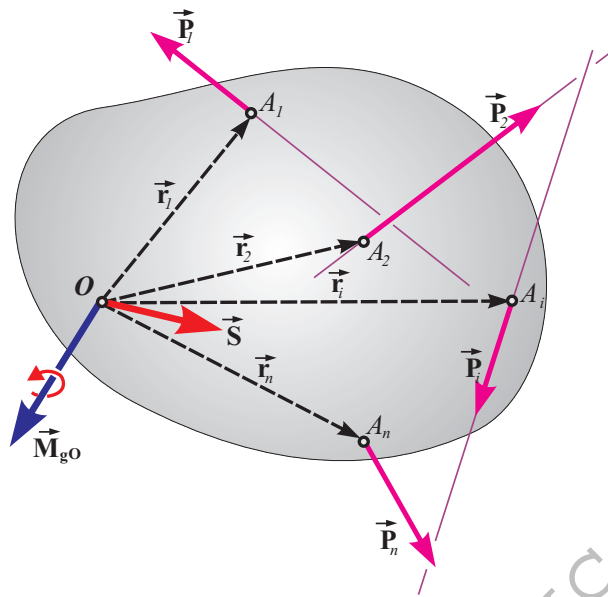
Na podstawie przyjętych aksjomatów (por. punkt 1.3) każde ciało nieswobodne można rozpatrywać tak jak ciało swobodne, pod warunkiem, że działanie więzów zostanie zastąpione odpowiednimi reakcjami.

Przeprowadzając redukcję sił czynnych i sił reakcji, to jest wyznaczając wektor główny i moment główny wszystkich sił działających na ciało sztywne (rys. 4.12), na podstawie wzorów (2.63) i (2.64), otrzymuje się

$$\vec{S} = \sum_{i=1}^n \vec{P}_i, \quad (4.25)$$

oraz

$$\vec{M}_{gO} = \sum_{i=1}^n \vec{M}_{Oi} = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{P}_i. \quad (4.26)$$



Rysunek 4.12: Układ sił ($\vec{P}_i, i = 1 \dots n$) działających na ciało sztywne oraz jego wektor główny (\vec{S}) i moment główny (\vec{M}_{gO})

Oznacza to, że siły działające na ciało zostały zastąpione równoważnym im układem obciążeń w postaci jednej siły \vec{S} i jednej pary sił o momencie równym \vec{M}_{gO} .

Równowaga ciała obciążonego jedną siłą jest możliwa tylko wtedy, gdy siła działająca na ciało jest wektorem równym zero ($\vec{S} = \vec{0}$).

Pod działaniem pary sił swobodne ciało sztywne nie jest w równowadze (wynika to ze stwierdzenia zawartego w punkcie 2.5.1), a więc równowaga ciała będzie możliwa jedynie w przypadku, gdy $\vec{M}_{gO} = \vec{0}$.

Można zatem stwierdzić, że warunkiem równowagi ciała sztywnego jest zerowa wartość wektora głównego sił i zerowa wartość momentu głównego sił wyznaczonego dla dowolnego bieguna O

$$\vec{S} = \sum_{i=1}^n \vec{P}_i = \vec{0}, \quad (4.27)$$

$$\vec{M}_{gO} = \sum_{i=1}^n \vec{M}_{O_i} = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{P}_i = \vec{0}. \quad (4.28)$$

Są to więc identyczne równania równowagi jak równania wyprowadzone na podstawie analizy równowagi układu punktów materialnych.

Otrzymane wyniki można podsumować formułując twierdzenie.

- **Warunkiem równowagi ciała sztywnego jest zerowa wartość wektora głównego i zerowa wartość wektora momentu głównego wszystkich sił czynnych i sił reakcji działających na to ciało.**

Ciało sztywne znajduje się w położeniu równowagi, jeśli siły czynne i siły reakcji spełniają równania:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n P_{ix} &= 0, \\ \sum_{i=1}^n P_{iy} &= 0, \\ \sum_{i=1}^n P_{iz} &= 0, \\ \sum_{i=1}^n M_{ix} &= \sum_{i=1}^n (y_i P_{iz} - z_i P_{iy}) = 0, \\ \sum_{i=1}^n M_{iy} &= \sum_{i=1}^n (z_i P_{ix} - x_i P_{iz}) = 0, \\ \sum_{i=1}^n M_{iz} &= \sum_{i=1}^n (x_i P_{iy} - y_i P_{ix}) = 0.\end{aligned}\tag{4.29}$$

4.6 Rozwiązywanie zadań statyki

Rozwiązywanie zadań statyki polega na wyznaczeniu:

- położenia, w którym układ znajduje się w równowadze,
- niewiadomych sił działających na układ w położeniu równowagi.

Niewiadomymi siłami są zazwyczaj reakcje oddziaływania więzów lub siły wzajemnego oddziaływania pomiędzy ciałami należącymi do układu.

Na podstawie zależności wynikających z mechaniki ogólnej – odnoszącej się wyłącznie do ciał sztywnych – można rozwiązać tylko zadania **statycznie wyznaczalne**. Zadanie jest statycznie wyznaczalne o ile liczba niewiadomych sił jest równa liczbie równań², jakie można napisać dla rozpatrywanego układu.

Całkowita liczba równań jest sumą liczby równań równowagi oraz liczby dodatkowych zależności określających siły działające na rozpatrywany układ. Są to związki pomiędzy:

²Równania statyki stanowią układ równań liniowych ze względu na siły. Otrzymany układ równań musi być oznaczony.

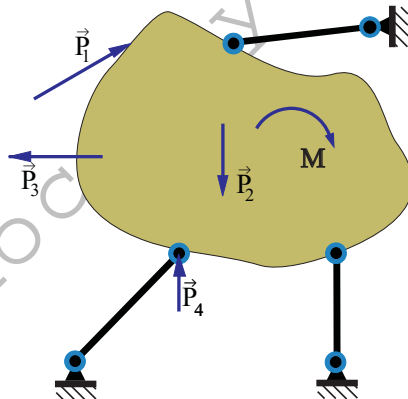
- siłą tarcia granicznego³ a reakcją normalną ($T_{gr} = \mu N$),
- siłami działającymi na taśmę opasującą ciało ($S_1 = S_2 e^{\mu \alpha}$),
- siłą sprężystości a odkształceniem sprężyny ($F_s = k \Delta l$).

Jeśli liczba niewiadomych sił przekracza liczbę równań, to zadanie jest statycznie niewyznaczalne (tego rodzaju zagadnienia mogą być rozwiązane na podstawie analizy odkształceń układu). W przeciwnym przypadku – gdy liczba niewiadomych sił jest mniejsza od liczby równań równowagi – układ staje się mechanizmem, to znaczy porusza się pod wpływem działających sił (równowaga układu jest możliwa dla szczególnego układu sił).

Rozpatrywane układy mogą się składać z jednego ciała sztywnego (układy proste) lub z wielu ciał sztywnych (układy złożone). Przy rozpatrywaniu tych układów istotne jest zwrócenie uwagi na fakt, że równania równowagi są warunkami koniecznymi i wystarczającymi w przypadku ciała sztywnego. Dla układu złożonego z ciał sztywnych (połączonych ze sobą elementami dopuszczającymi względne przemieszczenia) równania równowagi są jedynie warunkami koniecznymi równowagi.

4.6.1 Układy proste

Na rysunku 4.13 jest przedstawione ciało sztywne znajdujące się w równowadze. (Jest to płyta utrzymywana w położeniu równowagi za pomocą trzech lekkich prętów zakończonych przegubami. Płytę obciążono czterema siłami i parą sił o znanym momencie.) Zadanie polega na wyznaczeniu sił w prętach.

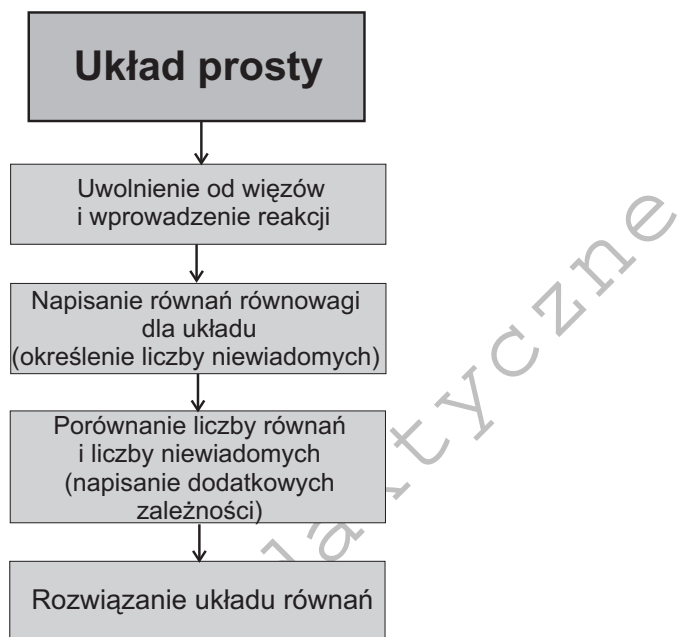


Rysunek 4.13: Przykład prostego układu mechanicznego

³W zagadnieniach statyki wartość współczynnika tarcia μ przyjmuje się równą wartości statycznego współczynnika tarcia μ_s ($\mu = \mu_s$).

Sposób rozwiązania zadania można przedstawić w postaci algorytmu przedstawionego na rys. 4.14.

Korzystając z przedstawionego algorytmu można rozwiązywać zadania dotyczące równowagi prostych (zawierających jedno ciało sztywne) układów mechanicznych. Zamieszczony dalej przykład jest ilustracją zastosowania tego algorytmu w praktycznych obliczeniach.



Rysunek 4.14: Algorytm rozwiązywania zadań ze statyki – dla układów prostych (jedno ciało)

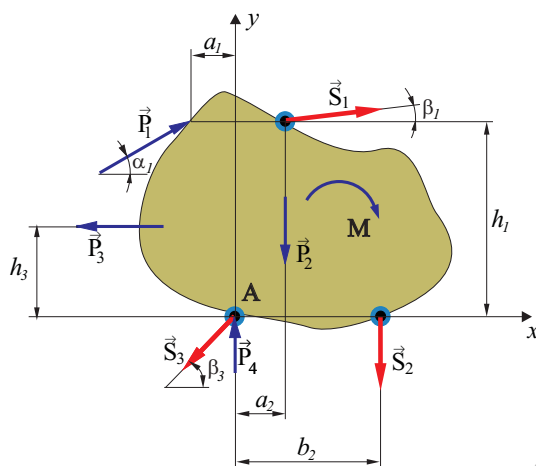
PRZYKŁAD 4.6.9

Wyznaczyć siły w lekkich prętach utrzymujących ciało przedstawione na rys. 4.13 w położeniu równowagi. Dane wartości sił: $P_1 = 100 \text{ N}$; $P_2 = 80 \text{ N}$; $P_3 = 90 \text{ N}$; $P_4 = 60 \text{ N}$; wartość momentu pary sił $M = 300 \text{ Nm}$ oraz wymiary: $a_1 = 0,5 \text{ m}$; $a_2 = 0,6 \text{ m}$; $b_2 = 1,5 \text{ m}$; $h_1 = 2,0 \text{ m}$; $h_3 = 1,1 \text{ m}$ i kąty: $\alpha_1 = 30^\circ$; $\beta_1 = 20^\circ$; $\beta_3 = 40^\circ$.

ROZWIĄZANIE

Uwolnienie układu od więzów polega na zastąpieniu prętów siłami reakcji, przedstawiającymi oddziaływanie prętów na ciało. Siły te mają kierunki takie jak pręty, a ich zwroty mogą być przyjęte w dowolny sposób. Na rysunku 4.15

są pokazane wszystkie obciążenia zewnętrzne (czynne i bierne) działające na rozpatrywane ciało sztywne.



Rysunek 4.15: Obciążenia czynne i siły reakcji działające na ciało sztywne

Spośród sześciu równań równowagi ciała sztywnego (4.29) dla układu sił działających w jednej płaszczyźnie wykorzystuje się trzy równania (pozostałe równania sprowadzają się do tożsamości $0 = 0$). Dla układu sił leżących w płaszczyźnie xy są to: równania rzutów sił na osie x i y oraz równanie momentów względem osi⁴ z . Początek układu współrzędnych można przyjąć w dowolnym punkcie – w tym przypadku został on umieszczony w punkcie A (rys. 4.15).

Rozpatrywane ciało będzie w równowadze, o ile spełnione będą równania:

$$\sum_{i=1}^n P_{ix} = 0 \Rightarrow P_1 \cos \alpha_1 - P_3 + S_1 \cos \beta_1 - S_3 \cos \beta_3 = 0 ,$$

$$\sum_{i=1}^n P_{iy} = 0 \Rightarrow P_1 \sin \alpha_1 - P_2 + P_4 + S_1 \sin \beta_1 - S_2 - S_3 \sin \beta_3 = 0 ,$$

$$\sum_{i=1}^n M_{iz} = 0 \Rightarrow -(P_1 \cos \alpha_1)h_1 - (P_1 \sin \alpha_1)a_1 - P_2 a_2 + P_3 h_3 + \\ -(S_1 \cos \beta_1)h_1 + (S_1 \sin \beta_1)a_2 - S_2 b_2 - M = 0 .$$

W tych równaniach niewiadomymi wielkościami są siły: S_1 , S_2 , S_3 . Rozwiązanie układu trzech równań pozwala na wyznaczenie trzech niewiadomych reakcji oddziaływania prętów na ciało.

⁴Osie układu współrzędnych mogą być obrane w sposób dowolny, ale nie mogą być do siebie równoległe. Wygodne jest jednak użycie prostokątnego układu współrzędnych.

Otrzymany układ równań można przedstawić za pomocą macierzy jako

$$\begin{bmatrix} \cos \beta_1 & 0 & -\cos \beta_3 \\ \sin \beta_1 & -1 & -\sin \beta_3 \\ -h_1 \cos \beta_1 + a_2 \sin \beta_1 & -b_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -P_1 \cos \alpha_1 + P_3 \\ -P_1 \sin \alpha_1 + P_2 - P_4 \\ P_1 h_1 \cos \alpha_1 + P_1 a_1 \sin \alpha_1 + P_2 a_2 - P_3 h_3 + M \end{bmatrix}.$$

Rozwiązanie tych równań w postaci ogólnej jest kłopotliwe, a wynik rozwiązania skomplikowany. Po podstawieniu wartości liczbowych otrzymuje się

$$\begin{bmatrix} 0.9396 & 0 & -0.7660 \\ 0.3420 & -1 & -0.6428 \\ -1.6742 & -1.5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.3975 \\ -30. \\ 447.2051 \end{bmatrix}.$$

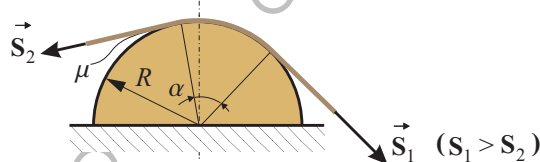
Rozwiązanie powyższego układu równań jest proste i prowadzi do następujących wyników: $S_1 = -494,28 \text{ N}$; $S_2 = 253,53 \text{ N}$; $S_3 = -610,76 \text{ N}$.

Ujemne wartości sił S_1 i S_3 oznaczają, że zwroty tych sił są przeciwne do założonych na rys. 4.15. \diamond

PRZYKŁAD 4.6.10

Napisać równania równowagi dla wycinka taśmy opasującej nieruchome ciało o kształcie walca (rys. 4.16). Kąt opasania ciała wynosi α , a współczynnik tarcia pomiędzy ciałem a taśmą jest równy μ .

Korzystając z równań równowagi dla nieskończenie małego wycinka taśmy określić zależność pomiędzy wartościami sił S_1 i S_2 przyłożonych na końcach taśmy.



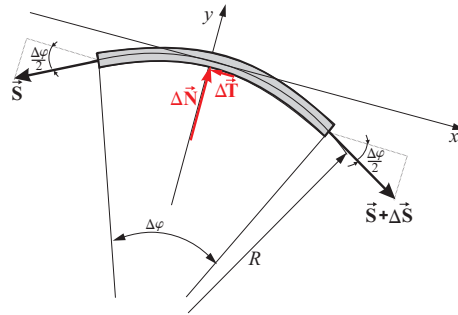
Rysunek 4.16: Taśma opasująca fragment ciała o kształcie walca

ROZWIĄZANIE

Przy wyprowadzaniu wzoru (3.13) należy określić siły działające na elementarny odcinek taśmy i rozpatrzeć równania równowagi takiego ciała.

Siły działające na nieskończenie mały odcinek taśmy są widoczne na rys. 4.17.

Spośród sześciu równań równowagi ciała sztywnego (4.29) wykorzystujemy tu jedynie dwa równania: rzutów sił na osie x i y . (Przy założeniu, że układ sił



Rysunek 4.17: Siły działające na element taśmy

działających na element taśmy jest układem sił zbieżnych i leżących w płaszczyźnie xy pozostałe równania sprowadzają się do tożsamości $0 = 0$.) Równowaga ciała będzie więc zapewniona, jeśli spełnione będą równania:

$$\sum_{i=1}^n P_{ix} = 0 \Rightarrow -S \cos \frac{\Delta\varphi}{2} - \Delta T + (S + \Delta S) \cos \frac{\Delta\varphi}{2} = 0, \quad (4.30)$$

$$\sum_{i=1}^n P_{iy} = 0 \Rightarrow -S \sin \frac{\Delta\varphi}{2} + \Delta N - (S + \Delta S) \sin \frac{\Delta\varphi}{2} = 0. \quad (4.31)$$

Wobec założenia nieskończenie małych wymiarów ciała ($\Delta\varphi \rightarrow 0$) można przyjąć, że $\cos \frac{\Delta\varphi}{2} \cong 1$ oraz $\sin \frac{\Delta\varphi}{2} \cong \frac{\Delta\varphi}{2}$. Równania (4.30) i (4.31) sprowadzają się zatem do:

$$-S - \Delta T + S + \Delta S = 0, \quad (4.32)$$

$$-S \frac{\Delta\varphi}{2} + \Delta N - S \frac{\Delta\varphi}{2} - \Delta S \frac{\Delta\varphi}{2} = 0, \quad (4.33)$$

skąd – po pominięciu iloczynu $\Delta S \frac{\Delta\varphi}{2}$, który jest wielkością o jeden rząd mniejszą od pozostałych składników równania – otrzymuje się:

$$\Delta T = \Delta S, \quad \Delta N = S \Delta\varphi. \quad (4.34)$$

Używając klasycznego modelu tarcia można wykorzystać zależność pomiędzy siłą tarcia i obciążeniem normalnym $\Delta T = \mu \Delta N$. Prowadzi to do równania

$$\frac{\Delta S}{\Delta\varphi} = \mu S. \quad (4.35)$$

Granica wyrażenia stojącego po lewej stronie równania przy $\Delta\varphi \rightarrow 0$ jest pochodną siły S względem kąta φ

$$\lim_{\Delta\varphi \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta\varphi} = \frac{dS}{d\varphi} . \quad (4.36)$$

Zatem

$$\frac{dS}{d\varphi} = \mu S \quad (4.37)$$

lub

$$\frac{dS}{S} = \mu d\varphi . \quad (4.38)$$

Rozwiązaniem tego równania (całką ogólną równania (4.38)) jest

$$\ln S(\varphi) = \mu\varphi + c . \quad (4.39)$$

Korzystając z warunków brzegowych (por. rys. 3.15):

$$\varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad S(0) = S_2 , \quad (4.40)$$

$$\varphi = \alpha \quad \Rightarrow \quad S(\alpha) = S_1 , \quad (4.41)$$

można wyznaczyć stałą c , która będzie równa $c = \ln S_1$ oraz określić zależność pomiędzy wartościami sił S_1 i S_2 jako

$$\ln \frac{S_2}{S_1} = \mu\alpha \quad (4.42)$$

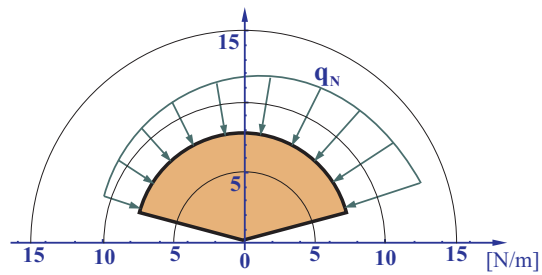
lub w postaci

$$S_2 = S_1 e^{\mu\alpha} . \quad (4.43)$$

Na wykresie przedstawionym na rys. 4.18 widoczny jest rozkład sił normalnych, z jakimi taśma oddziałuje na ciało. Został on przedstawiony jako obciążenie ciągle q_N – nierównomiernie rozłożone na obszarze kontaktu taśmy z ciałem. Obciążenie $q_N(\varphi)$ zostało wyznaczone jako

$$q_N(\varphi) = \frac{dN}{R d\varphi} = \frac{S_1}{R} e^{\mu\varphi} , \quad (4.44)$$

przy czym R oznacza promień ciała (rys. 3.15, rys. 4.17). \diamond

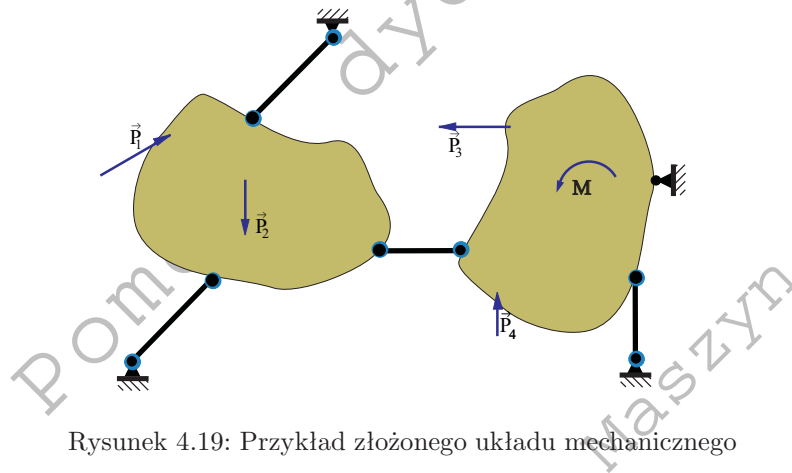


Rysunek 4.18: Rozkład nacisków pomiędzy taśmą a krążkiem

4.6.2 Układy złożone

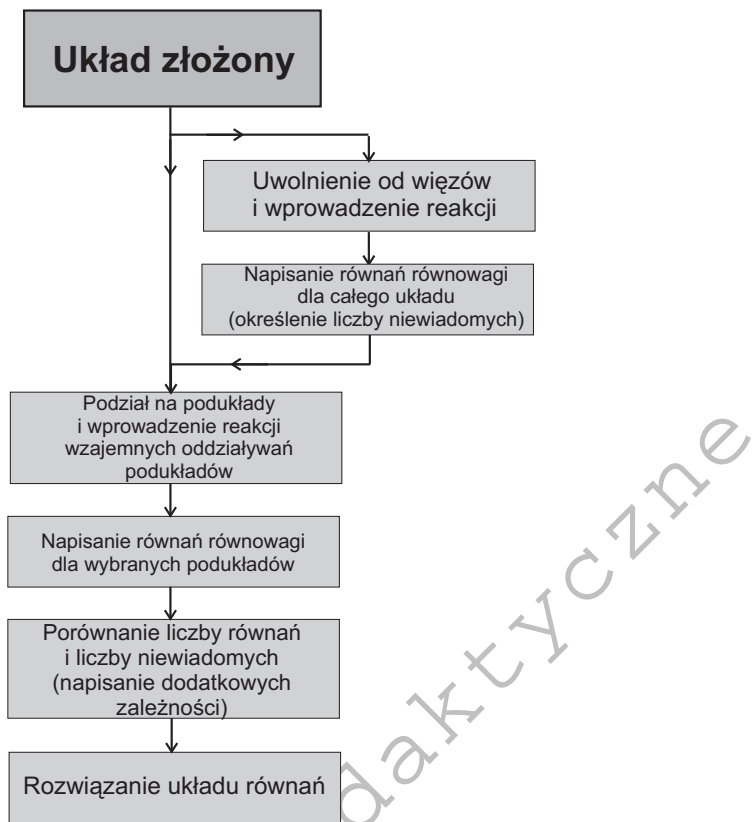
Dla układu złożonego z ciał sztywnych (połączonych ze sobą elementami dopuszczającymi względne przemieszczenia czy obroty) równania równowagi są jedynie warunkami koniecznymi równowagi. W związku z tym przy analizie układów złożonych zazwyczaj konieczny jest podział układu na podukłady i rozpatrywanie równowagi pojedynczych ciał sztywnych. Dla każdego ciała sztywnego równania równowagi są warunkami koniecznymi i wystarczającymi dla istnienia równowagi.

Na rysunku 4.19 pokazany jest przykład układu złożonego – zawierającego więcej niż jedno ciało sztywne.



Rysunek 4.19: Przykład złożonego układu mechanicznego

Sposób rozwiązania tego rodzaju zadań ilustruje algorytm zamieszczony na rysunku 4.20.



Rysunek 4.20: Algorytm rozwiązywania zadań ze statyki – dla układów złożonych z wielu ciał

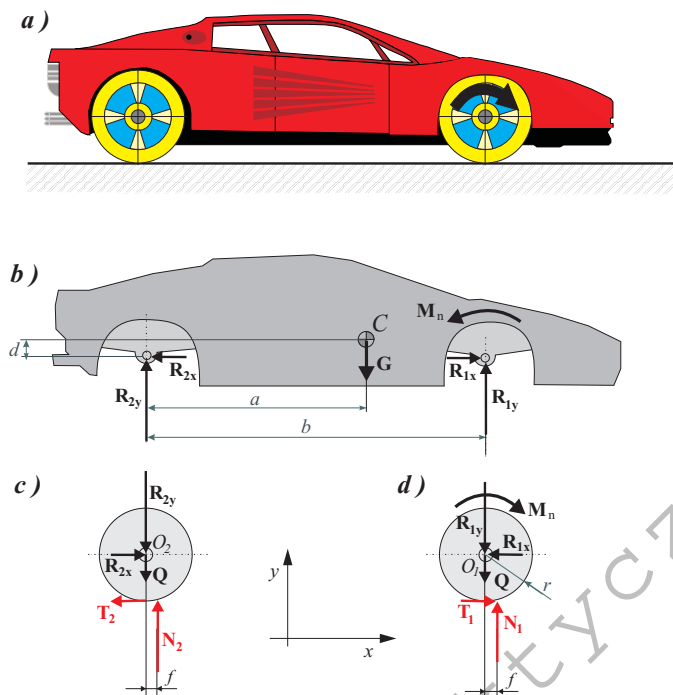
PRZYKŁAD 4.6.11

Wyznaczyć wartość momentu, napędzającego przednie koła samochodu, niezbędną do wywołania jego ruchu. Dane: masa samochodu ($m_s = 1000$ kg), masa koła ($m_k = 5$ kg), podstawowe wymiary ($a = 2,5$ m; $b = 3$ m; $d = 0,5$ m; $r = 0,3$ m), współczynnik tarcia ($\mu = 0,3$), opór toczenia ($f = 0,02$ m).

ROZWIĄZANIE

Zgodnie z podanym algorytmem rozwiązanie zadania można rozpocząć od uwolnienia od więzów i rozpatrzenia równowagi całego układu. Bardziej przejrzysty sposób rozwiązania uzyskuje się jednak, rozpatrując oddzielnie równowagę każdego z ciał należących do układu.

Na rys. 4.21 jest pokazany płaski (dwuwymiarowy) model samochodu oraz podział modelu na podukłady proste (na ciała sztywne).



Rysunek 4.21: Model pojazdu z napędem na przednie koła: a) analizowany układ, b) obciążenia działające na nadwozie i podwozie, c) siły działające na tylne koło (bierne), d) siły działające na koło przednie (napędzane)

Zaznaczone są siły i momenty par działające na poszczególne ciała. Pochodzą one od obciążeń zewnętrznych (\vec{G} , \vec{Q}), wzajemnego oddziaływania ciał (\vec{R}_{1x} , \vec{R}_{1y} , \vec{R}_{2x} , \vec{R}_{2y}), reakcji podłoża (\vec{N}_1 , \vec{T}_1 , \vec{N}_2 , \vec{T}_2)⁵.

Ponieważ dane zawierają informację dotyczącą oporu toczenia, to reakcje normalne podłoża (\vec{N}_1 i \vec{N}_2) leżą na prostych przesuniętych względem środków kół o wartość f w kierunku jazdy.

Warto też zwrócić uwagę na sposób wprowadzenia momentu napędzającego M_n . Dla rozpatrywanego układu jest to obciążenie wewnętrzne – przedstawiające działanie wału silnika na koła napędzane z jednej strony, a z drugiej strony korpusu silnika na podwozie (dzięki temu silnik może pozostawać w położeniu równowagi).

Dla każdego z podukładów przedstawionych na rys. 4.21 można napisać trzy równania równowagi, ponieważ działające obciążenia są siłami lub parami sił

⁵ Jeśli wartości sił Q_1 i Q_2 przyjmiemy jako podwójny ciężar koła ($Q_1 = Q_2 = 2m_k g$), to otrzymamy wyniki dla samochodu na czterech kołach.

leżącymi w jednej płaszczyźnie (stanowią płaski, niezbieżny układ sił).

Dla poszczególnych ciał otrzymuje się równania o postaci⁶:

– dla nadwozia-podwozia

$$\sum P_x : -R_{2x} + R_{1x} = 0 ,$$

$$\sum P_y : R_{2y} - G + R_{1y} = 0 ,$$

$$\sum M_C : -R_{2y} a - R_{2x} d + R_{1y} (b - a) + R_{1x} d + M_n = 0 ,$$

– dla tylnego koła

$$\sum P_x : R_{2x} - T_2 = 0 ,$$

$$\sum P_y : -R_{2y} - Q + N_2 = 0 ,$$

$$\sum M_{O_2} : -T_2 r + N_2 f = 0 ,$$

– dla przedniego koła

$$\sum P_x : -R_{1x} + T_1 = 0 ,$$

$$\sum P_y : -R_{1y} - Q + N_1 = 0 ,$$

$$\sum M_{O_1} : -M_n + T_1 r + N_1 f = 0 .$$

Rozwiązanie układu dziewięciu równań równowagi prowadzi do zależności:

$$M_n = f (G + 2Q) ,$$

$$N_2 = \frac{-aG + bG + fG + bQ + 2fQ}{b} ,$$

$$N_1 = \frac{aG - fG + bQ - 2fQ}{b} ,$$

$$T_1 = \frac{f(-aG + bG + fG + bQ + 2fQ)}{br} ,$$

$$T_2 = \frac{f(-aG + bG + fG + bQ + 2fQ)}{br} ,$$

⁶Symbole $\sum P_x$; ... $\sum M_{O_1}$: wskazują na sposób, w jaki otrzymano poszczególne równania równowagi.

$$R_{1x} = \frac{f(-aG+bG+fG+bQ+2fQ)}{br},$$

$$R_{1y} = \frac{aG-fG-2fQ}{b},$$

$$R_{2x} = \frac{f(-aG+bG+fG+bQ+2fQ)}{br},$$

$$R_{2y} = \frac{-aG+bG+fG+2fQ}{b}.$$

Wyniki rozwiązania dla zadanych wartości parametrów modelu są następujące⁷: $M_n = 200,12 \text{ Nm}$; $N_2 = 1799,81 \text{ N}$; $N_1 = 8206,39 \text{ N}$; $T_1 = 119,99 \text{ N}$; $T_2 = 119,99 \text{ N}$; $R_{1x} = 119,99 \text{ N}$; $R_{2x} = 119,99 \text{ N}$; $R_{1y} = 8108,29 \text{ N}$; $R_{2y} = 1701,71 \text{ N}$.

Dodatkowo zostały wyznaczone graniczne wartości sił tarcia: $T_{1gr} = \mu N_1 = 3282,56 \text{ N}$ oraz $T_{2gr} = \mu N_2 = 719,92 \text{ N}$. Jak wynika z rozwiązania dla zadanych wartości parametrów poślizg pomiędzy kołami a podłożem nie wystąpi, gdyż $T_1 < T_{1gr}$ i $T_2 < T_{2gr}$. \diamond

4.7 Redukcja równoległego układu sił – środek ciężkości

Dowolny układ sił związanych z punktami lub z prostymi może być zastąpiony przez układ składający się z wektora głównego i momentu głównego. Redukcja układu sił została omówiona w punkcie 2.5.3. Przypomnijmy, że dwa układy wektorów są równoważne, jeśli wektor główny (\vec{S}) i moment główny względem dowolnie obranego bieguna (\vec{M}_{gO}) są dla obu układów wektorów równe.

Wyznamy wektor główny i moment główny równoległego układu sił pokazanego na rys. 4.22.

Wektor główny jest sumą wszystkich wektorów należących do układu, to znaczy

$$\vec{S} = \sum_{i=1}^n \vec{G}_i, \quad (4.45)$$

(w przypadku sił ciężkości będziemy również używać oznaczenia $\vec{G} \equiv \vec{S}$).

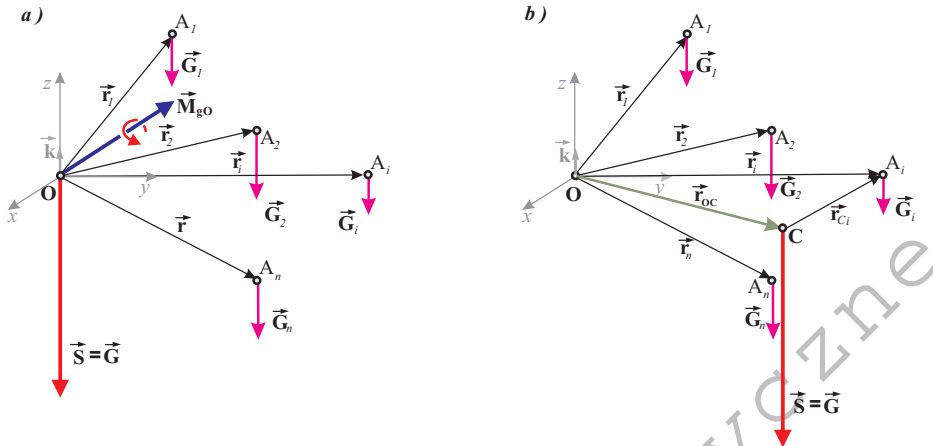
Moment główny układu sił względem dowolnie obranego punktu O określa zależność (2.64)

$$\vec{M}_{gO} = \sum_{i=1}^n \vec{M}_{O_i} = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{G}_i, \quad (4.46)$$

⁷Otrzymane rezultaty należy podzielić przez dwa, o ile wyniki otrzymane dla modelu płaskiego będziemy odnosić do pojazdu na czterech kołach.

a moment główny względem innego bieguna (punktu C) – zgodnie z (2.68) – można wyrazić jako

$$\vec{M}_{gC} = \vec{M}_{gO} - \vec{r}_{Oc} \times \vec{S}. \quad (4.47)$$



Rysunek 4.22: Redukcja układu sił równoległych: a) do wektora głównego i momentu głównego, b) do siły wypadkowej

Dla układu sił równoległych można znaleźć taki punkt C , dla którego

$$\vec{M}_{gC} = \vec{0}. \quad (4.48)$$

Układ wektorów zredukowany do punktu C , dla którego jest spełniony warunek (4.48) sprowadza się do jednego wektora – wektora głównego \vec{S} . (Jeśli układ wektorów daje się sprowadzić do jednego wektora i jest nim wektor główny \vec{S} , to taki wektor nazywany jest wektorem wypadkowym lub siłą wypadkową – w przypadku redukcji układu sił.)

- **Środek układu wektorów równoległych jest to punkt, do którego jest przyłożony wektor wypadkowy układu wektorów równoległych - równoważny temu układowi wektorów.**

Punkt C , do którego zredukowany jest układ sił równoległych jest nazywany *środkiem równoległego układu sił*. W przypadku, gdy rozpatrywanym układem wektorów są siły ciężkości (\vec{G}_i) punkt C , w którym przyłożona jest wypadkowa tych sił $\vec{G} = \sum_{i=1}^n \vec{G}_i$ nosi nazwę *środka ciężkości*.

W celu określenia położenia środka ciężkości układu złożonego z n punktów (o ciężarach \vec{G}_i) poszczególne wektory przedstawia się w postaci

$$\vec{G}_i = -G_i \vec{k}, \quad (4.49)$$

gdzie \vec{k} jest wektorem jednostkowym pionowej osi z , a G_i oznacza wartość siły ciężkości punktu materialnego i .

Wektor główny \vec{S} jest w takim przypadku określony przez

$$\vec{S} = \sum_{i=1}^n \vec{G}_i = -\left(\sum_{i=1}^n G_i\right) \vec{k}, \quad (4.50)$$

a moment główny względem punktu C jako

$$\vec{M}_{gO} = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{G}_i = -\left(\sum_{i=1}^n \vec{r}_i G_i\right) \times \vec{k} = -\left(\sum_{i=1}^n G_i \vec{r}_i\right) \times \vec{k}. \quad (4.51)$$

Po podstawieniu (4.50) i (4.51) do (4.47) i wykorzystaniu (4.48) otrzymuje się

$$\vec{M}_{gC} = -\left(\sum_{i=1}^n G_i \vec{r}_i\right) \times \vec{k} + \vec{r}_{OC} \times \left(\sum_{i=1}^n G_i\right) \vec{k} = \vec{0} \quad (4.52)$$

lub

$$\left(-\left(\sum_{i=1}^n G_i \vec{r}_i\right) + \left(\sum_{i=1}^n G_i\right) \vec{r}_{OC}\right) \times \vec{k} = \vec{0}. \quad (4.53)$$

Równanie (4.53) jest spełnione w dwóch przypadkach: gdy wektor określony wyrażeniem ujętym w nawiasy jest równy zero i gdy ma on kierunek działających sił (wersora \vec{k})⁸. Z warunku

$$-\left(\sum_{i=1}^n G_i \vec{r}_i\right) + \left(\sum_{i=1}^n G_i\right) \vec{r}_{OC} = \vec{0} \quad (4.54)$$

otrzymuje się równanie

$$\left(\sum_{i=1}^n G_i\right) \vec{r}_{OC} = \sum_{i=1}^n G_i \vec{r}_i. \quad (4.55)$$

Zatem, położenie środka ciężkości układu złożonego z n punktów (w których przyłożone są siły \vec{G}_i) określa zależność

$$\vec{r}_{OC} = \frac{\sum_{i=1}^n G_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n G_i} = \frac{\sum_{i=1}^n G_i \vec{r}_i}{G}. \quad (4.56)$$

⁸Taka sytuacja ma miejsce wówczas, gdy wszystkie siły G_i leżą na wspólnej prostej przechodzącej przez punkty O i C .

Oznaczając współrzędne wektora \vec{r}_{OC} jako (x_c, y_c, z_c) , a współrzędne wektorów \vec{r}_i jako (x_i, y_i, z_i) , równanie (4.56) można przedstawić w postaci skalarnej jako:

$$\begin{aligned} x_c &= \frac{\sum_{i=1}^n G_i x_i}{\sum_{i=1}^n G_i}, \\ y_c &= \frac{\sum_{i=1}^n G_i y_i}{\sum_{i=1}^n G_i}, \\ z_c &= \frac{\sum_{i=1}^n G_i z_i}{\sum_{i=1}^n G_i}. \end{aligned} \quad (4.57)$$

Wyrażenia zawarte w licznikach tych ułamków noszą nazwę momentów statycznych ciężaru ciała względem odpowiednich płaszczyzn układu współrzędnych Oxyz. (Używa się oznaczeń: $S_x = \sum_{i=1}^n G_i x_i$ – dla momentu statycznego względem płaszczyzny yz ; $S_y = \sum_{i=1}^n G_i y_i$ – dla momentu statycznego względem płaszczyzny xz ; $S_z = \sum_{i=1}^n G_i z_i$ – dla momentu statycznego względem płaszczyzny xy .)

4.7.1 Położenie środka ciężkości ciała

Położenie środka ciężkości ciała można określić w analogiczny sposób. Przyjmując, że liczba punktów zmierza do nieskończoności ($n \rightarrow \infty$), a ciężar każdego z nich $G_i = \gamma \Delta V_i$, przy czym ΔV_i oznacza objętość elementarnego wycinka ciała, a γ jego ciężar właściwy⁹, otrzymuje się:

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \gamma \Delta V_i x_i}{\sum_{i=1}^{\infty} \gamma \Delta V_i}, \quad (4.58)$$

$$y_c = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \gamma \Delta V_i y_i}{\sum_{i=1}^{\infty} \gamma \Delta V_i}, \quad (4.59)$$

⁹Ciężar właściwy ciała określony jest zależnością $\gamma = \rho g$, gdzie ρ oznacza masę właściwą ciała, a g przyspieszenie grawitacyjne.

$$z_c = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \gamma \Delta V_i z_i}{\sum_{i=1}^{\infty} \gamma \Delta V_i} . \quad (4.60)$$

Przechodząc do granicy (dla $\Delta V_i \rightarrow 0$) symbol sumowania zastępuje się symbolem całkowania – stąd położenie środka ciężkości dla ciała określają zależności:

$$\begin{aligned} x_c &= \frac{\int_V \gamma x dV}{\int_V \gamma dV} = \frac{\int x dG}{G} , \\ y_c &= \frac{\int_V \gamma y dV}{\int_V \gamma dV} = \frac{\int y dG}{G} , \\ z_c &= \frac{\int_V \gamma z dV}{\int_V \gamma dV} = \frac{\int z dG}{G} . \end{aligned} \quad (4.61)$$

Położenie środka ciężkości wybranych linii, figur płaskich i brył

Przy wyznaczaniu położenia środków ciężkości ciał jednorodnych przydatne są poniższe twierdzenia.

- I. Jeśli ciało ma płaszczyznę symetrii, to środek ciężkości leży w tej płaszczyźnie.
- II. Jeśli ciało ma dwie płaszczyzny symetrii, to środek ciężkości leży na linii ich przecięcia.
- III. Jeśli ciało ma trzy płaszczyzny symetrii, to środek ciężkości leży w punkcie przecięcia się tych płaszczyzn.
- IV. Moment statyczny dowolnego ciała względem płaszczyzny przechodzącej przez środek ciężkości tego ciała jest równy zero.

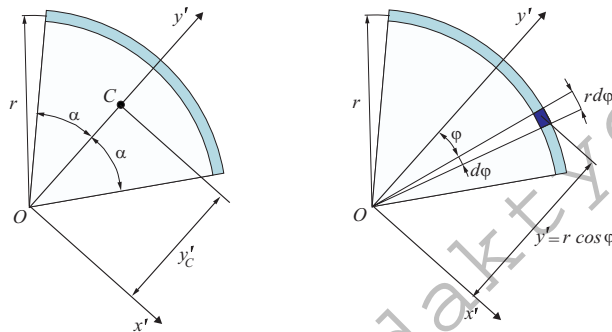
Przykładowo, na podstawie twierdzenia III, można określić położenie środka ciężkości jednorodnych ciał o kształcie kuli, walca, prostopadłościanu.

Na podstawie wzorów (4.61) wyznacza się położenie środka ciężkości jednorodnych ciał o dowolnych kształtach. Ponieważ całkowanie wykonywane jest po obszarze całego ciała, to obliczenia sprowadzają się do wyznaczenia wartości całek potrójnych.

W wielu przypadkach – ze względów praktycznych – ciała klasyfikuje się jako jedno-, dwu- i trójwymiarowe. Jeśli wszystkie trzy wymiary (w trzech wzajemnie prostopadłych kierunkach) mają porównywalne wartości, to ciało traktuje się jako trójwymiarowe (bryła).

W przypadku, gdy jeden z wymiarów ma wartość wielokrotnie mniejszą od pozostałych, to ciało można uważać za dwuwymiarowe (powłoka, figura płaska). Podobnie ciało, którego jeden z wymiarów ma stałą wartość (np. stałą grubość) można rozpatrywać tak, jak ciało dwuwymiarowe.

Ciało, którego wymiary przekroju poprzecznego są niewielkie w porównaniu z długością traktuje się jako jednowymiarowe (linia). Dla ciał jednowymiarowych wyznaczenie położenia środka ciężkości na podstawie wzorów (4.61) nie jest trudne. Analogiczna sytuacja zachodzi dla ciała o jednakowych wymiarach przekroju poprzecznego na całej długości ciała.



Rysunek 4.23: Wyznaczanie położenia środka ciężkości łuku okręgu (linii)

Położenia środka ciężkości łuku okręgu (rys. 4.23) można określić na podstawie wzoru (4.61). Po wyznaczeniu całkowitego ciężaru linii oraz jej długości:

$$G = \gamma AL, \quad L = 2\alpha r, \quad (4.62)$$

a następnie ciężaru i długości nieskończenie małego elementu linii:

$$dG = \gamma AdL, \quad dL = rd\varphi \quad (4.63)$$

oraz współrzędnej y' określającej położenie takiego elementu, otrzymuje się

$$\begin{aligned} y'_c &= \frac{\int y' dG}{G} = \frac{\gamma A \int y' dL}{\gamma AL} = \frac{1}{L} \int_{-\alpha}^{\alpha} r \cos \varphi r d\varphi = \\ &= \frac{1}{2\alpha r} r^2 \sin \varphi \Big|_{-\alpha}^{\alpha} = \frac{r \sin \alpha}{\alpha}. \end{aligned} \quad (4.64)$$

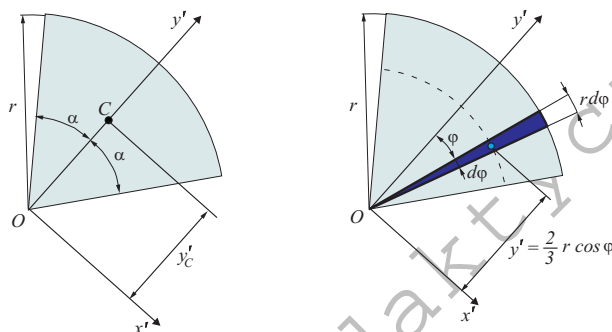
Zatem – dla łuku okręgu

$$y'_C = \frac{r \sin \alpha}{\alpha} \quad (4.65)$$

W podobny sposób wyznacza się położenia środka ciężkości wycinka koła (rys. 4.24). W tym przypadku dokonuje się podziału na nieskończenie wiele trójkątów i korzysta z faktu, że środek ciężkości elementarnego trójkąta znajduje się w odległości $\frac{2}{3}r$ od środka okręgu.

Po wykonaniu całkowania otrzymuje się

$$y'_C = \frac{2}{3} \frac{r \sin \alpha}{\alpha} \quad (4.66)$$



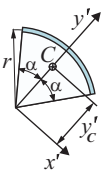
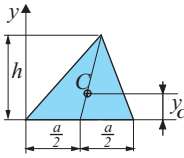
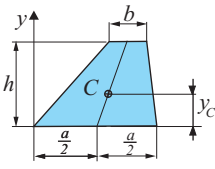
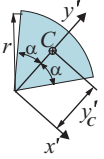
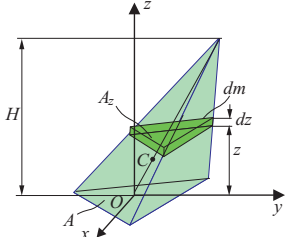
Rysunek 4.24: Wyznaczanie położenia środka ciężkości wycinka kołowego

Znajomość położenia środka ciężkości dla elementarnych ciał pozwala na wyznaczenie środka ciężkości ciał o bardziej skomplikowanych kształtach¹⁰.

Dla ciał o skomplikowanych kształtach położenie środka ciężkości wyznacza się w kilku etapach:

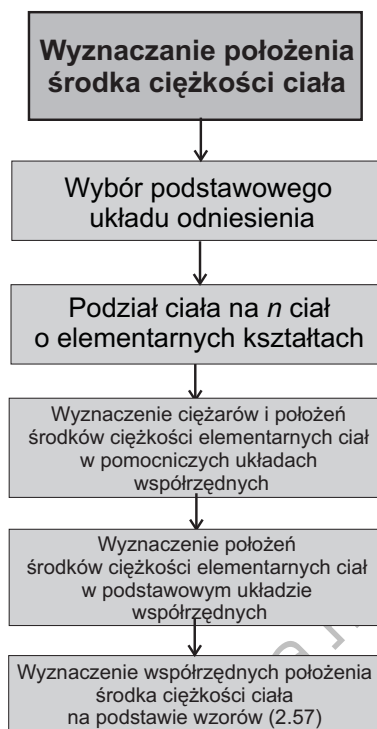
- podział ciała na proste elementy, których położenia środków ciężkości są znane lub dają się łatwo obliczyć,
- obliczenia momentów statycznych poszczególnych elementów względem płaszczyzn przyjętego układu współrzędnych,
- obliczenia wzorów współrzędnych środka ciężkości na podstawie wzorów (4.60).

¹⁰Określenie położenia środka ciężkości ciał jest możliwe na drodze doświadczalnej. Eksperyment polega na zawieszaniu ciała zamocowanego w jednym punkcie i wyznaczaniu pionowej prostej przechodzącej przez punkt zawieszenia. Środek ciężkości leży w punkcie przecięcia takich prostych.

Nazwa	Oznaczenia	Współrzędne środka ciężkości
Odcinek linii (łuk okręgu)		$y'_c = \frac{r \sin \alpha}{\alpha}$
Powierzchnia o kształcie trójkąta		$y_c = \frac{h}{3}$
Powierzchnia o kształcie trapezu		$y_c = \frac{a+2b}{a+b} \cdot \frac{h}{3}$
Powierzchnia o kształcie wycinka koła		$y'_c = \frac{2}{3} \frac{r \sin \alpha}{\alpha}$
Ostrosłup		$z_c = \frac{H}{4}$

Rysunek 4.25: Współrzędne położenia środka ciężkości jednorodnych ciał o elementarnych kształtach

Sposób wyznaczania środka ciężkości ciała o złożonych kształtach jest przedstawiony schematycznie na rys. 4.26.



Rysunek 4.26: Algorytm wyznaczania położenia środka ciężkości ciała o złożonym kształcie

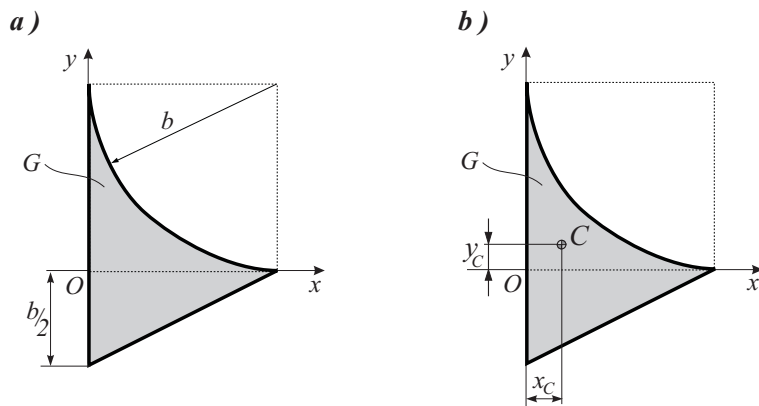
PRZYKŁAD 4.7.12

Wyznaczyć położenie środka ciężkości cienkiej jednorodnej płyty o ciężarze G i kształcie przedstawionym na rys. 4.27. Dane $b = 0,5 \text{ m}$.

ROZWIĄZANIE

Postępujemy zgodnie z przytoczonym algorytmem.

1. Wybieramy podstawowy układ współrzędnych xy w sposób pokazany na rys. 4.27b. (Położenie początku układu współrzędnych i kierunki osi mogą być wybrane dowolnie).
2. Dzielimy płytę na trzy ($n = 3$) elementarne ciała (rys. 4.28a-c), z których można otrzymać płytę o zadanym kształcie. (Odejmując od kwadratu wycinek koła i dodając trójkąt uzyskuje się płytę o zadanym kształcie.)



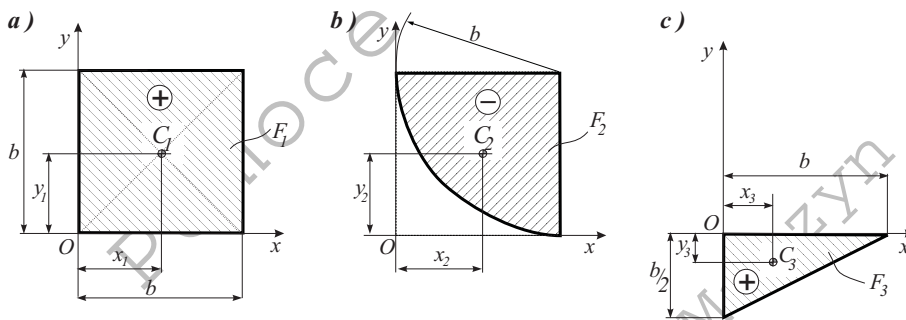
Rysunek 4.27: Zadany kształt i wymiary płyty (a) oraz podstawowy układ współrzędnych przyjęty do obliczeń (b)

Ciężary elementarnych ciał są wprost proporcjonalne do wielkości pola powierzchni każdego tych z ciał:

$$G_1 = \rho g h F_1, \quad G_2 = \rho g h F_2, \quad G_3 = \rho g h F_3,$$

gdzie ρ oznacza gęstość materiału z jakiego wykonana jest płyta, g przyspieszenie ziemskie, h grubość płyty, a F_1 , F_2 i F_3 pola powierzchni elementarnych ciał. Ciężar całej płyty można przedstawić w formie

$$G = G_1 - G_2 + G_3 = \rho g h (F_1 - F_2 + F_3).$$

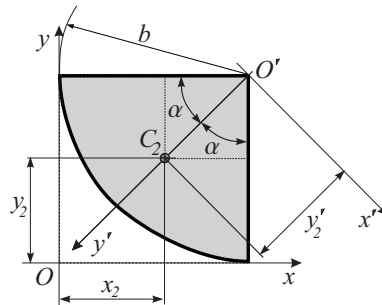


Rysunek 4.28: Podział płyty na elementarne ciała

3. Określenie współrzędnych środków ciężkości ciał o powierzchniach F_1 i F_3 nie wymaga żadnych dodatkowych obliczeń. Dla wycinka koła wprowadza-

dzamy pomocniczy układ współrzędnych $(x'y')$. W takim układzie współrzędnych (rys. 4.29) można wyznaczyć położenie środka wycinka koła na podstawie wzoru (4.66)

$$y'_2 = \frac{2r \sin \alpha}{3\alpha} = \frac{2b \sin \frac{\pi}{4}}{3 \cdot \frac{\pi}{4}} = \frac{4 \cdot 2b\sqrt{2}}{3\pi \cdot 2} = \frac{4\sqrt{2}b}{3\pi}.$$



Rysunek 4.29: Pomocniczy układ współrzędnych $x'y'$ dla wycinka koła

4. Wyznaczenie współrzędnych położenia środków ciężkości elementarnych ciał w podstawowym układzie odniesienia:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{b}{2}, & y_1 &= \frac{b}{2}, \\ x_2 &= b - y'_2 \sin \alpha = b - \frac{4\sqrt{2}b}{3\pi} \frac{\sqrt{2}}{2} = b - \frac{4b}{3\pi}, \\ y_2 &= b - y'_2 \cos \alpha = b - \frac{4\sqrt{2}b}{3\pi} \frac{\sqrt{2}}{2} = b - \frac{4b}{3\pi}, \\ x_3 &= \frac{b}{3}, & y_3 &= -\frac{1}{3} \frac{b}{2} = -\frac{b}{6}. \end{aligned}$$

5. Wyznaczenie współrzędnych położenia środka ciężkości ciała (na podstawie wzorów (4.60)):

$$\begin{aligned} x_c &= \frac{\sum_{i=1}^3 G_i x_i}{\sum_{i=1}^3 G_i} = \frac{\rho gh (F_1 x_1 - F_2 x_2 + F_3 x_3)}{\rho gh (F_1 - F_2 + F_3)} \\ y_c &= \frac{\sum_{i=1}^3 G_i y_i}{\sum_{i=1}^3 G_i} = \frac{\rho gh (F_1 y_1 - F_2 y_2 + F_3 y_3)}{\rho gh (F_1 - F_2 + F_3)}. \end{aligned}$$

Podstawiając:

$$F_1 = b^2, \quad F_2 = \frac{1}{4} \pi b^2, \quad F_3 = \frac{1}{2} b \frac{b}{2} = \frac{b^2}{4},$$

otrzymuje się

$$x_c = \frac{b^2 \frac{b}{2} - \frac{1}{4} \pi b^2 (b - \frac{4}{3} \frac{b}{\pi}) + \frac{b^2}{4} \frac{b}{3}}{b^2 - \frac{1}{4} \pi b^2 + \frac{b^2}{4}} = \frac{b (11 - 3 \pi)}{3 (5 - \pi)},$$

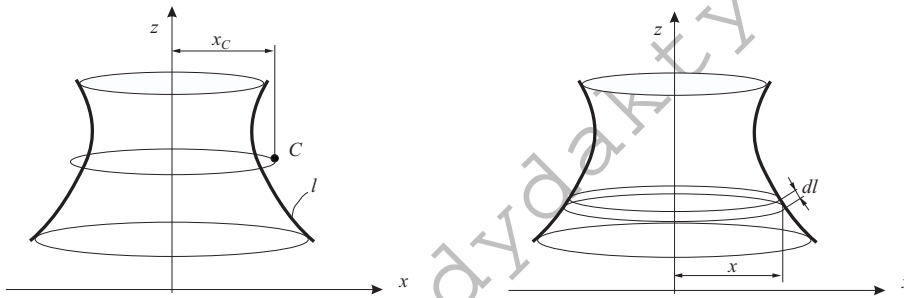
$$y_c = \frac{b^2 \frac{b}{2} - \frac{1}{4} \pi b^2 (b - \frac{4}{3} \frac{b}{\pi}) + \frac{b^2}{4} (-\frac{b}{6})}{b^2 - \frac{1}{4} \pi b^2 + \frac{b^2}{4}} = \frac{b (19 - 6 \pi)}{6 (5 - \pi)}.$$

Dla $b = 0,5 \text{ m}$ współrzędne środka masy płyty są odpowiednio równe:

$$x_c = 0,1413 \text{ m}, \quad y_c = 0,0067 \text{ m}. \quad \diamond$$

4.7.2 Twierdzenia Guldina-Pappusa

Pole powierzchni dla powierzchni otrzymanej poprzez obrót linii (płaskiej



Rysunek 4.30: Wyznaczanie pola – dla powierzchni osiowosymetrycznej (obrotowej)

i nie przecinającej osi obrotu) można określić na podstawie położenia środka ciężkości linii (x_c) na podstawie zależności:

$$F = \alpha x_c L, \quad (4.67)$$

przy czym:

L – oznacza długość linii,

α – kąt o jaki została obrócona linia wokół osi z .

Dla jednego pełnego obrotu linii ($\alpha = 2\pi$) otrzymuje się (*I twierdzenie Guldina-Pappusa*)

$$F = 2\pi x_c L. \quad (4.68)$$

Dowód prawdziwości tego twierdzenia polega na wykorzystaniu zależności:

$$dF = dl \alpha x, \quad F = \alpha \int_0^L x dl, \quad \int_0^L x dl = x_c L. \quad (4.69)$$

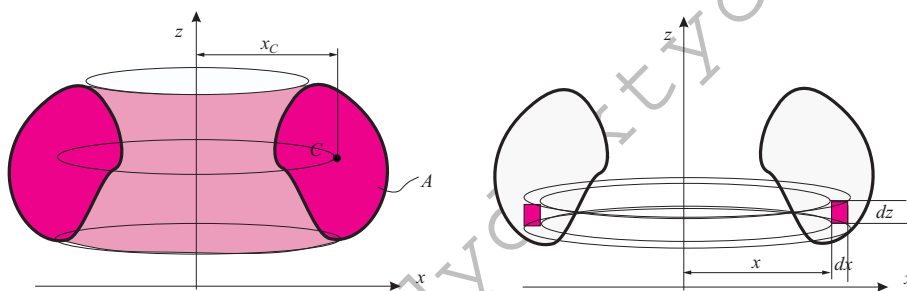
Objętość bryły otrzymanej poprzez obrót figury (płaskiej i nieprzecinającej osi obrotu) można określić na podstawie położenia środka ciężkości tej figury (x_c) z zależności

$$V = \alpha x_c A, \quad (4.70)$$

w której A – oznacza pole powierzchni figury płaskiej.

Dla jednego pełnego obrotu figury ($\alpha = 2\pi$) otrzymuje się (*II twierdzenie Guldina-Pappusa*)

$$V = 2\pi x_c A. \quad (4.71)$$



Rysunek 4.31: Wyznaczanie objętości – dla bryły osiowosymetrycznej (obrotowej)

Rozdział 5

KINEMATYKA

Kinematyka jest częścią mechaniki dotyczącą opisu ruchu ciał, bez wnikania w przyczyny powodujące ruch.

Ruchem nazywa się zmiany położenia ciała (punktu) względem innego ciała (albo punktu) – zwanego układem odniesienia¹. Opis ruchu ciała może być dokonany względem dowolnego układu odniesienia – również względem ruchomego układu lub ciała.

5.1 Funkcje wektorowe

Podstawowe działania dotyczące rachunku wektorowego zostały omówione wcześniej. Dotyczyły one wielkości wektorowych takich, jak siła, moment siły względem punktu, moment pary sił. W zagadnieniach statyki wektory rzadko podlegały zmianom w czasie.

Przy rozpatrywaniu ruchu – to jest w zagadnieniach kinematyki i dynamiki – wielkości wektorowe są najczęściej zależne od czasu (t), a jedynie w szczególnych przypadkach pozostają stałe. Dotyczy to zarówno wektorów, które określają ruch – takich jak prędkość i przyspieszenie, jak też wielkości określających obciążenia (siły często są funkcjami czasu). W dynamice wprowadza się ponadto inne wielkości wektorowe charakteryzujące ruch ciała – na przykład pęd, moment pędu.

Zmiany wielkości wektorowej w czasie mogą wynikać ze zmian długości wektora, zmian kierunku wektora i zmiany jego zwrotu. Wektor zmienia się w czasie, jeśli przynajmniej jedna z tych wielkości (wartość, kierunek, zwrot) ulega zmianie².

¹Mówienie o ruchu bez wskazania układu odniesienia nie ma sensu – ciało może być w ruchu względem pewnego układu odniesienia i jednocześnie pozostawać nieruchome względem innego układu odniesienia.

²Zmiany samego zwrotu wektora – bez zmiany jego wartości w zagadnieniach mechaniki występują dość rzadko.

Jeśli określona zostanie funkcja, która opisuje zmiany wielkości wektorowej w czasie, to taką funkcję będziemy nazywać *funkcją wektorową*. Istotną kwestią będzie sposób różniczkowania funkcji wektorowych. Pochodna funkcji wektorowej tym różni się od pochodnej funkcji skalarnej, że, prócz informacji o zmianie wartości funkcji, musi zawierać informacje o zmianach kierunku wektora.

5.1.1 Pochodne elementarnych funkcji skalarnych

Dla przypomnienia podana jest definicja pochodnej funkcji skalarnej i pochodne kilku elementarnych funkcji skalarnych (zmiennej niezależnej³ t)

$$\frac{df}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta f(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} . \quad (5.1)$$

Pochodną względem czasu dowolnej funkcji oznacza się też kropką umieszczoną nad symbolem tej funkcji

$$\frac{df}{dt} \equiv \dot{f} . \quad (5.2)$$

	$f(t)$	$\frac{df}{dt} \equiv \dot{f}$
1.	a	0
2.	t	1
3.	t^2	$2t$
4.	t^n	$n t^{n-1}$
5.	$\frac{1}{t}$	$-\frac{1}{t^2}$
6.	$\sin t$	$\cos t$
7.	$\cos t$	$-\sin t$
8.	$\ln t $	$\frac{1}{t}$
9.	e^t	e^t
10.	a^t	$a^t \ln a$

Podstawowe wzory dotyczące różniczkowania określają:

– pochodne sumy i różnicy funkcji $f(t)$ i $g(t)$

$$\frac{d}{dt}(f(t) \pm g(t)) = \frac{df}{dt} \pm \frac{dg}{dt} \equiv \dot{f} \pm \dot{g} , \quad (5.3)$$

– pochodne iloczynu funkcji $f(t)$ i $g(t)$

$$\frac{d}{dt}(f(t) g(t)) = \frac{df}{dt} g + f \frac{dg}{dt} \equiv \dot{f} g + f \dot{g} , \quad (5.4)$$

³W matematyce posługujemy się zmienną niezależną x , w mechanice zmienną niezależną najczęściej jest czas (t).

– pochodne iloczynu funkcji $f(t)$ i stałej c

$$\frac{d}{dt}(c f(t)) = c \frac{df}{dt} \equiv c \dot{f}, \quad (5.5)$$

– pochodne ilorazu funkcji $f(t)$ i $g(t)$

$$\frac{d}{dt} \frac{f(t)}{g(t)} = \frac{\dot{f}g - f\dot{g}}{g^2}, \quad (5.6)$$

– pochodne funkcji złożonej $y = f(u)$ i $u = g(t)$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{df}{du} \frac{dg}{dt} \equiv \frac{df}{du} \dot{g}. \quad (5.7)$$

5.1.2 Funkcja wektorowa

Wektory, których wartości, kierunki i zwroty są zależne od czasu (t) będą nazywane funkcjami wektorowymi.

- Jeśli wektor \vec{a} jest określony dla parametru t (t należy do przedziału $t \in (0, t_k)$), to $\vec{a}(t)$ nazywamy funkcją wektorową skalarnego parametru t w przedziale $(0, t_k)$.

Graficzne przedstawienie funkcji wektorowej

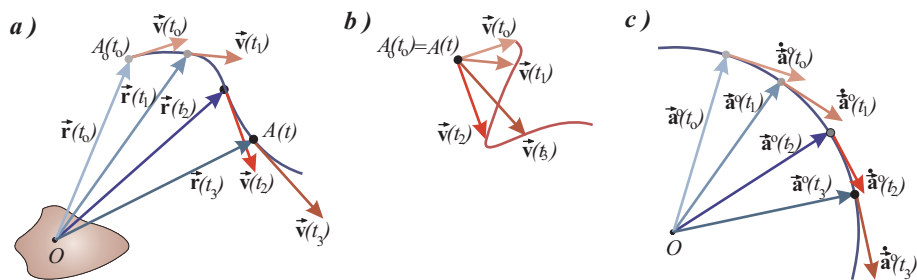
Jednym ze sposobów graficznego przedstawienia funkcji wektorowej jest **hodograf funkcji wektorowej** (nazywany też hodografem wektora).

- **Hodografem wektora zależnego od czasu nazywa się linię wyznaczoną przez miejsca geometryczne końca tego wektora w przypadku, gdy początek wektora w jego kolejnych położeniach zostanie umieszczony w jednym – wspólnym dla wszystkich położzeń – punkcie, a wektory zostaną przesunięte równolegle.**

Przykłady hodografów dla kilku wektorów zmiennych w czasie są pokazane na rys. 5.1.

Na rysunku 5.1a jest przedstawiona krzywa, po której porusza się punkt A oraz kolejne położenia wektora $\vec{r}(t)$, określającego położenie tego punktu względem bieguna O . Hodograf promienia wektora $\vec{r}(t)$ jest identyczny z torsem punktu A . Na tym samym rysunku zostały zaznaczone wektory prędkości ($\vec{v}(t)$) w kilku położeniach punktu A .

Hodograf wektora prędkości punktu A jest przedstawiony obok (rys. 5.1b). Powstał on przez równoległe przesunięcie wektorów prędkości w taki sposób, że początki kolejnych położzeń wektora znalazły się w jednym punkcie (w tym przykładzie wybrany został punkt A_0 oznaczający początkowe położenie poruszającego się punktu A).



Rysunek 5.1: Przykładowe hodografy wektorów: a) wektora położenie punktu ($\vec{a} = \vec{r}$); b) wektora prędkości punktu ($\vec{a} = \vec{v}$); c) wektora jednostkowego poruszającego się w płaszczyźnie ($\vec{a} = \vec{a}^o$)

Rysunek 5.1c przedstawia hodograf wektora jednostkowego $\vec{a}^o(t)$ poruszającego się w jednej płaszczyźnie. Po sprowadzeniu początków wektora do wspólnego punktu (O) otrzymuje się hodograf w postaci okręgu o promieniu $|\vec{a}^o| = 1$.

Pochodna funkcji wektorowej

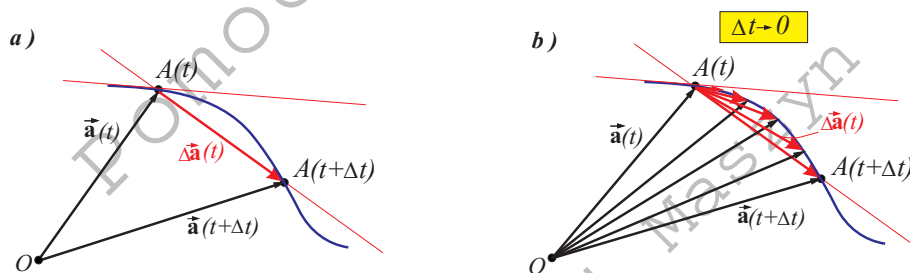
Pochodną funkcji wektorowej $\vec{a}(t)$ określa się jako granicę

$$\frac{d\vec{a}(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{a}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{a}(t + \Delta t) - \vec{a}(t)}{\Delta t}. \quad (5.8)$$

Używane będzie również oznaczenie

$$\frac{d\vec{a}(t)}{dt} \equiv \dot{\vec{a}}. \quad (5.9)$$

Na rys. 5.2a został przedstawiony wektor \vec{a} w chwili t i w chwili $t + \Delta t$. Przyrost tego wektora w czasie Δt jest różnicą $\Delta \vec{a}(t) = \vec{a}(t + \Delta t) - \vec{a}(t)$.



Rysunek 5.2: Przyrost wektora \vec{a} w czasie Δt

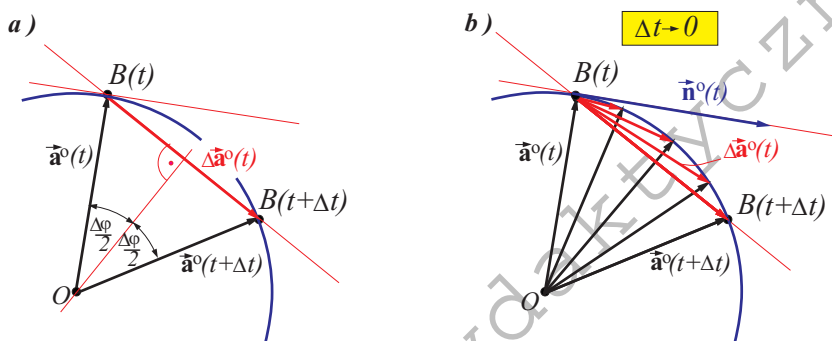
Jak wynika z rysunku 5.2b kierunek wektora przyrostu $\Delta\vec{a}(t)$, w przypadku gdy $\Delta t \rightarrow 0$, dąży do kierunku stycznej do krzywej utworzonej przez kolejne położenia końca wektora $\vec{a}(t)$ – to jest do hodografu tego wektora⁴.

Zależności umożliwiające wyznaczenie pochodnej funkcji wektorowej zostaną przedstawione w kolejnych punktach. Przed wyznaczeniem pochodnej funkcji wektorowej $\vec{a}(t)$ zostaną wyprowadzone zależności, które określają pochodną wektora jednostkowego $\vec{a}^o(t)$, to jest wektora o stałej długości ($|\vec{a}^o(t)| = 1$).

Pochodna wektora jednostkowego

Pochodna wektora jednostkowego $\vec{a}^o(t)$ jest zdefiniowana jako

$$\frac{d\vec{a}^o(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{a}^o(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{a}^o(t + \Delta t) - \vec{a}^o(t)}{\Delta t}. \quad (5.10)$$



Rysunek 5.3: Przyrost wektora jednostkowego $\vec{a}^o(t)$ w czasie Δt

Jeśli rozpatruje się nieskończenie mały przedział czasu $\Delta t \rightarrow 0$, to kierunek wektora $\Delta\vec{a}^o(t)$ dąży do kierunku stycznej do hodografu wektora \vec{a}^o w chwili t . Kierunek ten został określony na rys. 5.3b za pomocą wektora jednostkowego $\vec{n}^o(t)$, który jest prostopadły do \vec{a}^o . Można to udowodnić korzystając z własności iloczynu skalarnego dwóch wektorów \vec{a}^o ($\vec{a}^o \cdot \vec{a}^o = |\vec{a}^o| \cdot |\vec{a}^o| \cos 0 = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$). Różniczkując względem czasu obie strony równania

$$\vec{a}^o \cdot \vec{a}^o = 1, \quad (5.11)$$

otrzymuje się

$$\frac{d\vec{a}^o(t)}{dt} \cdot \vec{a}^o + \vec{a}^o \cdot \frac{d\vec{a}^o(t)}{dt} = 0, \quad (5.12)$$

⁴O tym, że pochodna każdego wektora jest równa prędkości z jaką porusza się koniec wektora po jego hodografie będzie mowa w dalszej części wykładu.

a po uproszczeniu

$$\frac{d\vec{a}^o(t)}{dt} \cdot \vec{a}^o = 0. \quad (5.13)$$

Zerowa wartość iloczynu skalarnego dwóch wektorów świadczy o tym, że wektory $\frac{d\vec{a}^o}{dt}$ (oznaczony dalej jako $\dot{\vec{a}}^o$) i \vec{a}^o są do siebie prostopadłe. Pochodna wektora jednostkowego $\vec{a}^o(t)$ jest więc wektorem o kierunku $\vec{n}^o(t)$, a jej wartość jest określona zależnością

$$|\dot{\vec{a}}^o| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta \vec{a}^o(t)|}{\Delta t}. \quad (5.14)$$

Długość wektora $\Delta \vec{a}^o(t)$ można przedstawić (rys. 5.3a) jako

$$|\Delta \vec{a}^o(t)| = 2a^o \sin \frac{\Delta \varphi}{2}, \quad (5.15)$$

przy czym kąt $\Delta \varphi$ oznacza kąt obrotu wektora $\vec{a}^o(t)$ pomiędzy jego położeniami w chwilach t i $t + \Delta t$. Po podstawieniu $a^o = 1$ i pomnożeniu przez $\frac{\Delta \varphi}{\Delta \varphi}$ zależność (5.15) przyjmuje formę

$$|\Delta \vec{a}^o(t)| = 2 \sin \frac{\Delta \varphi}{2} \frac{\Delta \varphi}{\Delta \varphi} = \frac{\sin \frac{\Delta \varphi}{2}}{\frac{\Delta \varphi}{2}} \Delta \varphi. \quad (5.16)$$

Wykorzystując (5.16) w (5.14) otrzymuje się

$$|\dot{\vec{a}}^o| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta \varphi}{2}}{\frac{\Delta \varphi}{2}} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta \varphi}{2}}{\frac{\Delta \varphi}{2}} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t}. \quad (5.17)$$

Wobec faktu, że dla $\Delta t \rightarrow 0$ również $\Delta \varphi \rightarrow 0$, jedną z granic można przedstawić jako

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta \varphi}{2}}{\frac{\Delta \varphi}{2}} = \lim_{\Delta \varphi \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta \varphi}{2}}{\frac{\Delta \varphi}{2}} = 1, \quad (5.18)$$

co prowadzi do wzoru

$$|\dot{\vec{a}}^o| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t}. \quad (5.19)$$

Granice $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t}$ oznacza się symbolem ω i nazywa **chwilową prędkością kątową** wektora \vec{a}^o (lub krótko prędkością kątową)⁵.

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t}. \quad (5.20)$$

⁵Prędkość kątowa wektora \vec{n}^o jest taka sama jak prędkość kątowa wektora \vec{a}^o . Można też mówić o prędkości kątowej prostej o kierunku każdego z tych wektorów.

Prędkość kątowna jest miarą zmiany kąta obrotu wektora, prostej lub ciała sztywnego.

Pochodna wektora jednostkowego \vec{a}^o jest więc wektorem o kierunku określonym wersorem \vec{n}^o i wartości równej ω , to znaczy

$$\dot{\vec{a}}^o = \omega \vec{n}^o . \quad (5.21)$$

Można wprowadzić wektor chwilowej prędkości kątovej $\vec{\omega}$ o postaci

$$\vec{\omega} = \omega \vec{\omega}^o , \quad (5.22)$$

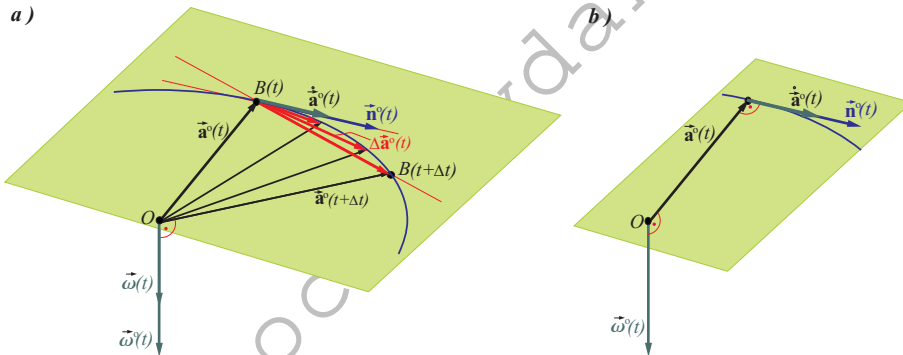
przy czym $\vec{\omega}^o$ jest wektorem jednostkowym prostopadłym do płaszczyzny wyznaczonej przez wektory \vec{a}^o i \vec{n}^o o takim zwrocie, że trójka \vec{a}^o , $\vec{n}^o(t)$, $\vec{\omega}^o(t)$ jest prawoskrętna. Korzystając z wektora $\vec{\omega}$, pochodną wektora jednostkowego \vec{a}^o można przedstawić w formie

$$\dot{\vec{a}}^o = \vec{\omega} \times \vec{a}^o . \quad (5.23)$$

Kierunki i wzajemne położenia omawianych wektorów są pokazane na rys. 5.4.

Pomiędzy wektorami jednostkowymi $\vec{\omega}^o(t)$, $\vec{a}^o(t)$, $\vec{n}^o(t)$ zachodzi związek

$$\vec{n}^o = \vec{\omega}^o \times \vec{a}^o . \quad (5.24)$$



Rysunek 5.4: Płaszczyzna ściśle styczna do hodografu wektora $\vec{a}(t)$ i wektory jednostkowe $\vec{\omega}^o(t)$, $\vec{a}^o(t)$, $\vec{n}^o(t)$

Pochodna wektora $\vec{a}(t)$ i jej składowe

Przedstawiając wektor $\vec{a}(t)$ jako

$$\vec{a} = a \vec{a}^o , \quad (5.25)$$

i różniczkując go względem czasu, otrzymuje się

$$\frac{d\vec{a}(t)}{dt} = \frac{da(t)}{dt} \vec{a}^o + a \frac{d\vec{a}^o(t)}{dt}. \quad (5.26)$$

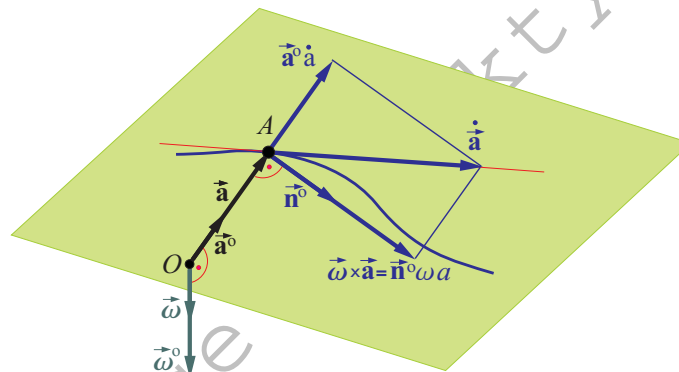
Po wykorzystaniu zależności (5.21) i (5.23), wyprowadzonych dla pochodnej wektora jednostkowego, pochodną funkcji wektorowej $\vec{a}(t)$ można przedstawić jako

$$\dot{\vec{a}} = \dot{a} \vec{a}^o + \omega a \vec{n}^o \quad (5.27)$$

lub

$$\dot{\vec{a}} = \dot{a} \vec{a}^o + \vec{\omega} \times \vec{a}. \quad (5.28)$$

Taki sposób przedstawienia pochodnej wektora pozwala na wskazanie zmiany wektora związanej ze zmianą jego wartości (określonej jako $\dot{a} \vec{a}^o$) oraz zmiany wynikającej ze zmiany kierunku wektora (określają ją składowa równa $\vec{\omega} \times \vec{a}$). Wektory występujące w zależnościach (5.27) i (5.28) są przedstawione na rysunku 5.5.



Rysunek 5.5: Płaszczyzna ściśle styczna do hodografu wektora $\vec{a}(t)$ i składowe pochodnej $\dot{\vec{a}}(t)$ wektora $\vec{a}(t)$ (o kierunku wektora $\vec{a}(t)$ i prostopadła do kierunku wektora $\vec{a}(t)$)

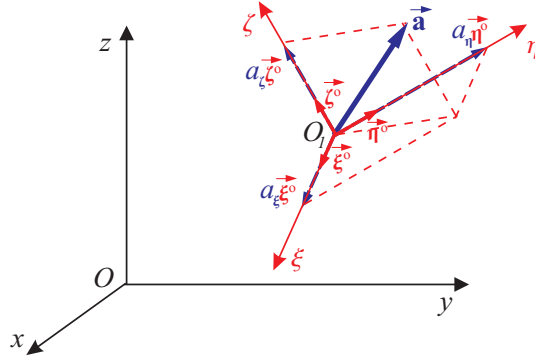
Pochodna lokalna i pochodna absolutna wektora $\vec{a}(t)$

Wektor $\vec{a}(t)$ można przedstawić za pomocą składowych o kierunkach osi xyz – oznaczających nieruchomy układ współrzędnych – jako

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}, \quad (5.29)$$

a jego pochodną w postaci⁶

$$\dot{\vec{a}} = \dot{a}_x \vec{i} + \dot{a}_y \vec{j} + \dot{a}_z \vec{k}, \quad (5.30)$$



Rysunek 5.6: Składowe wektora $\vec{a}(t)$ w ruchomym układzie odniesienia $\xi\eta\zeta$

Przedstawiając wektor $\vec{a}(t)$ za pomocą składowych określonych w ruchomym układzie odniesienia $\xi\eta\zeta$ (rys. 5.6) jako

$$\vec{a} = a_\xi \vec{\xi}^o + a_\eta \vec{\eta}^o + a_\zeta \vec{\zeta}^o, \quad (5.31)$$

można określić jego pochodną, różniczkując wyrażenie (5.31). Ponieważ wektory jednostkowe $\vec{\xi}^o$, $\vec{\eta}^o$, $\vec{\zeta}^o$ poruszają się razem z układem $\xi\eta\zeta$, to ich pochodne są różne od zera. Zatem

$$\dot{\vec{a}} = a_\xi \dot{\vec{\xi}}^o + \dot{a}_\xi \vec{\xi}^o + a_\eta \dot{\vec{\eta}}^o + \dot{a}_\eta \vec{\eta}^o + a_\zeta \dot{\vec{\zeta}}^o + \dot{a}_\zeta \vec{\zeta}^o. \quad (5.32)$$

Pochodne wektorów jednostkowych – zgodnie z (5.23) – są określone jako:

$$\dot{\vec{\xi}}^o = \vec{\omega} \times \vec{\xi}^o, \quad \dot{\vec{\eta}}^o = \vec{\omega} \times \vec{\eta}^o, \quad \dot{\vec{\zeta}}^o = \vec{\omega} \times \vec{\zeta}^o, \quad (5.33)$$

przy czym $\vec{\omega}$ oznacza wektor prędkości kątowej układu $\xi\eta\zeta$ względem układu xyz .

Po wykorzystaniu (5.33)

$$\dot{\vec{a}} = \dot{a}_\xi \vec{\xi}^o + \dot{a}_\eta \vec{\eta}^o + \dot{a}_\zeta \vec{\zeta}^o + \vec{\omega} \times (a_\xi \vec{\xi}^o + a_\eta \vec{\eta}^o + a_\zeta \vec{\zeta}^o) \quad (5.34)$$

⁶ Jeśli układ odniesienia pozostaje nieruchomy, albo osie układu poruszają się ruchem postępowym (co znaczy, że kierunki osi nie ulegają zmianie), to pochodne względem czasu wektorów osi są równe zero ($\frac{d\vec{i}}{dt} = \frac{d\vec{j}}{dt} = \frac{d\vec{k}}{dt} = 0$).

i wprowadzeniu oznaczenia

$$\frac{\hat{d}\vec{a}}{dt} = \dot{a}_\xi \vec{\xi}^o + \dot{a}_\eta \vec{\eta}^o + \dot{a}_\zeta \vec{\zeta}^o, \quad (5.35)$$

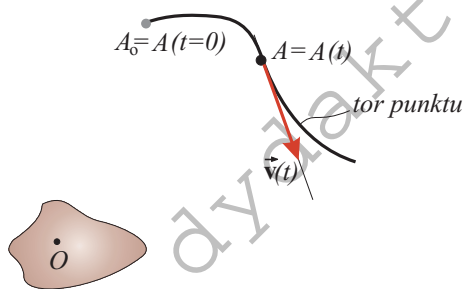
pochodną wektora $\vec{a}(t)$ można zapisać krótko jako

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \frac{\hat{d}\vec{a}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{a}. \quad (5.36)$$

Pochodna $\frac{d\vec{a}}{dt} \equiv \dot{\vec{a}}$ jest nazywana **pochodną absolutną**, natomiast $\frac{\hat{d}\vec{a}}{dt}$ nazywa się **pochodną lokalną** lub **pochodną względną**. Pochodna lokalna (względna) opisuje zmiany wektora \vec{a} względem ruchomego układu odniesienia $\xi\eta\zeta$. Pochodna absolutna opisuje zmiany tego wektora względem nieruchomego układu xyz .

5.2 Kinematyka punktu

Kinematyka punktu dotyczy ruchu, czyli zmiany położenia punktu w czasie.



Rysunek 5.7: Ruch punktu względem ciała – położenie początkowe (A_o) i dowolne położenie punktu (A) oraz tor i prędkość (\vec{v}) punktu

Przystępując do omówienia podstawowych zależności stosowanych w kinematyce warto przypomnieć kilka pojęć.

Torem punktu nazywa się krzywą, którą wyznaczają kolejne położenia punktu w czasie ruchu (rys. 5.7).

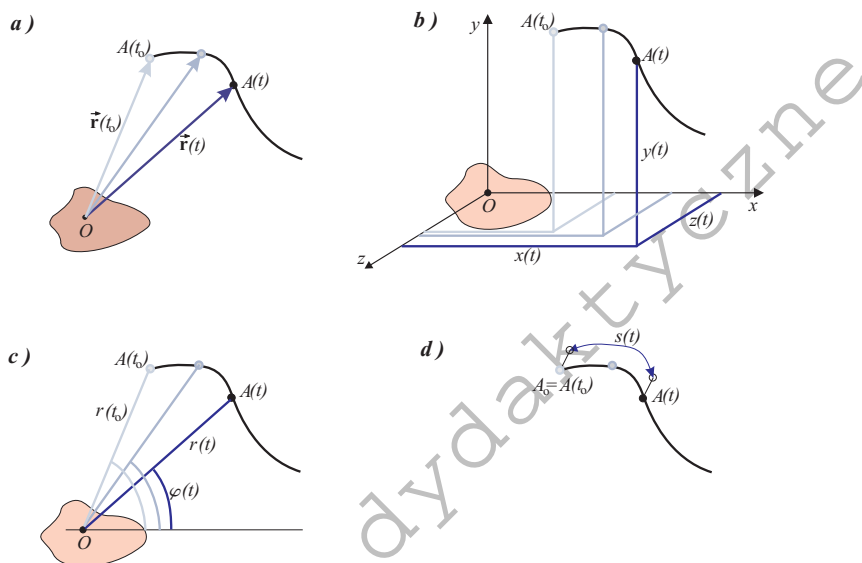
Położeniem początkowym nazywa się położenie punktu w chwili $t = 0$ ($A_o = A(0)$).

Jeśli położenie punktu jest znaną funkcją czasu i tor punktu jest określony, to można wyznaczyć prędkość i przyspieszenie punktu.

5.2.1 Położenie punktu

Położenie punktu może być określone na kilka sposobów:

- za pomocą wektora określającego położenie punktu względem układu odniesienia (wektorowy opis ruchu) – rys. 5.8a,
- za pomocą współrzędnych punktu w wybranym układzie odniesienia, np. w układzie prostokątnym – rys. 5.8b, albo w układzie biegunowym – rys. 5.8c lub w innych układach współrzędnych (sferycznym, walcowym, itd.),
- poprzez drogę przebytą wzdłuż toru (opis ruchu punktu po torze) – rys. 5.8d.



Rysunek 5.8: Sposoby określania położenia i ruchu punktu: a) wektorowy, b) za pomocą współrzędnych prostokątnych, c) przy użyciu współrzędnych biegunowych, d) po torze

Równania ruchu punktu

Równaniami ruchu punktu nazywa się funkcje (zależne od czasu) określające położenie poruszającego się punktu. W zależności od sposobu określenia położenia mamy do czynienia z:

- wektorowymi równaniami ruchu,
- równaniami ruchu w określonym układzie współrzędnych (prostokątnych, sferycznych, walcowych, biegunowych itd.),
- równaniami ruchu po torze.

Wektorowe równanie ruchu punktu jest określone za pomocą funkcji wektorowej

$$\vec{r} = \vec{r}(t) . \quad (5.37)$$

Równania ruchu punktu w wybranym układzie odniesienia są zadane poprzez funkcje określające położenie punktu w przyjętym do opisu układzie współrzędnych. Na przykład **równania ruchu we współrzędnych prostokątnych** są określone, jeśli znane są funkcje $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ opisujące położenie punktu względem układu xyz :

$$\begin{cases} x = x(t) , \\ y = y(t) , \\ z = z(t) . \end{cases} \quad (5.38)$$

Innym przykładem takiego sposobu opisu są **równania ruchu punktu we współrzędnych biegunowych**. W tym przypadku ruch jest określony za pomocą funkcji:

$$\begin{cases} r = r(t) , \\ \varphi = \varphi(t) . \end{cases} \quad (5.39)$$

Współrzędna promieniowa r oznacza odległość punktu od bieguna O ($r > 0$), natomiast współrzędna kątowna φ określa kąt skierowany pomiędzy nieruchomą prostą przechodzącą przez biegun a kierunkiem promienia r . Należy podkreślić, że równania ruchu punktu określone we współrzędnych biegunowych pozwalają na opis ruchu punktu w jednej płaszczyźnie.

Równanie ruchu punktu po torze ma postać

$$s = s(t) , \quad (5.40)$$

przy czym s oznacza przebytą drogę – mierzoną wzdłuż toru.

W przypadku, gdy znane jest równanie ruchu punktu po torze, to dla pełnego opisu ruchu (dla wyznaczenia przyspieszenia) wymagana jest jeszcze znajomość promienia krzywizny toru (ρ) (albo informacje niezbędne do wyznaczenia promienia krzywizny toru – np. równanie toru⁷). Kompletny opis ruchu punktu po

⁷Dla krzywej płaskiej, opisanej równaniem $y = f(x)$, krzywiznę krzywej (K) i promień krzywizny krzywej (ρ) można wyznaczyć ze wzoru

$$K = \frac{1}{\rho} = \frac{y''}{\sqrt{[1 + (y')^2]^3}} .$$

W przypadku krzywej płaskiej, opisanej równaniami w postaci parametrycznej $x = x(t)$ i $y = y(t)$, korzysta się zależności

$$K = \frac{1}{\rho} = \frac{x'_t y''_{tt} - y'_t x''_{tt}}{\sqrt{[(x'_t)^2 + (y'_t)^2]^3}} .$$

torze stanowi zatem układ równań:

$$\begin{cases} s = s(t), \\ \rho = \rho(t). \end{cases} \quad (5.41)$$

PRZYKŁAD 5.2.1

Ruch punktu poruszającego się z prędkością $v = 2bt$ [m/s] (stała b ma wymiar [rad/s²]), po okręgu o promieniu $r = c = 2$ [m], można przedstawić na kilka sposobów:

a) za pomocą wektorowego równania ruchu (rys. 5.9a)

$$\vec{r} = c \cos\left(\frac{1}{2}bt^2\right)\vec{i} + c \sin\left(\frac{1}{2}bt^2\right)\vec{j} + 0\vec{k},$$

b) za pomocą układu współrzędnych prostokątnych (rys. 5.9b)

$$\begin{cases} x = c \cos\left(\frac{1}{2}bt^2\right), \\ y = c \sin\left(\frac{1}{2}bt^2\right), \\ z = 0, \end{cases}$$

c) za pomocą układu współrzędnych biegunowych (rys. 5.9c)

$$\begin{cases} r = c, \\ \varphi = \frac{1}{2}bt^2, \end{cases}$$

d) używając równania ruchu po torze (rys. 5.9d)

$$\begin{cases} s = \frac{1}{2}c bt^2, \\ \rho = c. \end{cases} \quad \diamond$$

Równania toru punktu

Równaniami toru nazywa się równania (lub równanie) krzywej, po której porusza się punkt. Można je wyznaczyć na podstawie równań ruchu poprzez wyeliminowanie z tych równań parametru t (to jest czasu).

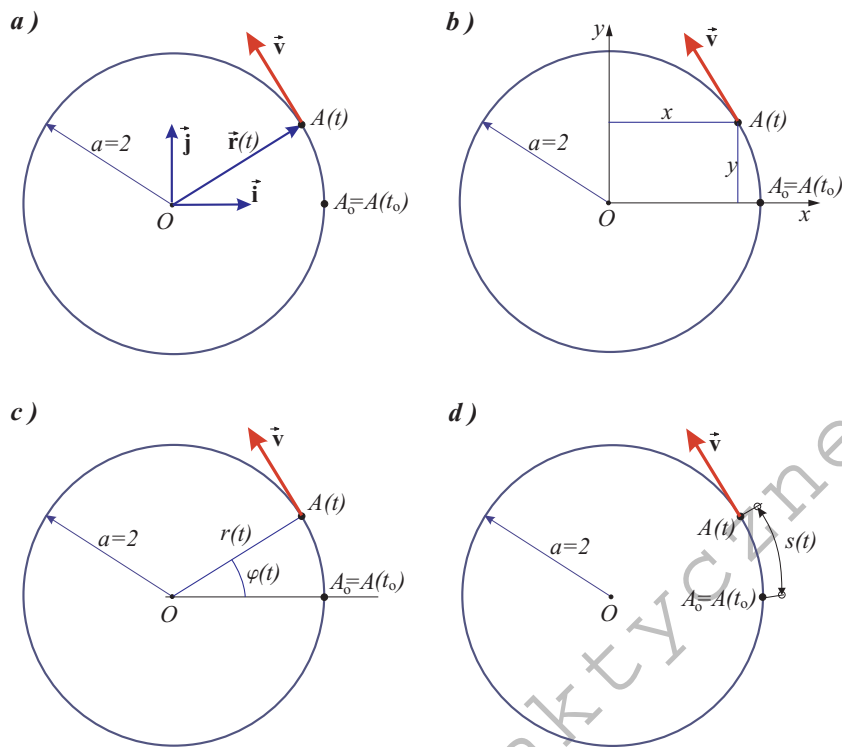
W przypadku, gdy ruch jest opisany za pomocą współrzędnych prostokątnych równania toru przyjmują postać:

$$\begin{cases} f_1(x, y) = 0, \\ f_2(y, z) = 0 \end{cases} \quad (5.42)$$

lub – dla ruchu punktu ograniczonego do jednej płaszczyzny – równanie toru opisane jest jedną funkcją

$$f(x, y) = 0, \quad (5.43)$$

(o ile ruch odbywa się w płaszczyźnie xy).



Rysunek 5.9: Przykłady opisu ruchu punktu po okręgu

5.2.2 Prędkość i przyspieszenie punktu

Prędkość punktu określa zmiany położenia (wektora położenia) punktu w czasie.

Przyspieszenie określa zmiany prędkości (wektora prędkości) w czasie.

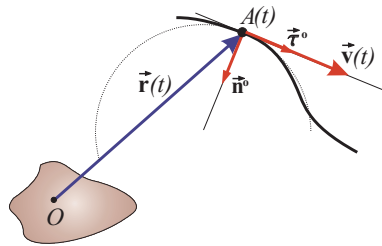
Sposób opisu położenia punktu decyduje o sposobie wyznaczania jego prędkości i przyspieszenia.

Wyznaczanie prędkości i przyspieszenia przy wektorowym opisie położenia punktu

Położenie punktu względem układu odniesienia można określić za pomocą promienia wektora \vec{r} (rys. 5.10). Jeśli wektor \vec{r} zmienia się w czasie (zmienia się jego długość i/lub kierunek), to mamy do czynienia z ruchem.

Wektor prędkości (\vec{v}) punktu można zdefiniować⁸ jako pochodną względem

⁸Wcześniej wektor prędkości był definiowany za pomocą drogi przebytej po torze (por. (5.81)).



Rysunek 5.10: Określenie prędkości punktu przy opisie położenia za pomocą promienia wektora

czasu promienia wektora (\vec{r})

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}. \quad (5.44)$$

Prędkość – zgodnie z definicją pochodnej ($\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$) – oznacza przyrost wektora położenia w przedziale czasu $\Delta t \rightarrow 0$ (taki przedział czasu jest nazywany infimezymalnym). Prędkość punktu jest wektorem stycznym do toru punktu (rys. 5.10).

Wektor przyspieszenia (\vec{a}) punktu jest zdefiniowany jako pochodna względem czasu wektora prędkości punktu (\vec{v})

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}}. \quad (5.45)$$

Przyspieszenie punktu określa przyrost wektora prędkości w czasie $\Delta t \rightarrow 0$ (to znaczy $\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$).

Korzystając z definicji wektora przyspieszenia, wyznaczmy jego składowe o kierunkach: stycznym (τ) i normalnym (η) do toru. W tym celu przedstawimy wektor prędkości punktu (\vec{v}) w postaci

$$\vec{v} = v \vec{\tau}^o, \quad (5.46)$$

przy czym $\vec{\tau}^o$ jest wersorem osi τ , a następnie zróżniczkujemy wyrażoną w ten sposób prędkość. Przyspieszenie – czyli pochodna wektora prędkości – przyjmuje wówczas formę

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \frac{dv}{dt} \vec{\tau}^o + v \frac{d\vec{\tau}^o}{dt}. \quad (5.47)$$

Występującą w drugim składniku pochodną wektora jednostkowego $\vec{\tau}^o$ można przedstawić – na podstawie (5.21) – jako

$$\frac{d\vec{\tau}^o}{dt} = \dot{\vec{\tau}}^o = \omega \vec{n}^o. \quad (5.48)$$

Symbolem ω oznaczona jest wartość chwilowej prędkości kątowej obrotu wektora \vec{r}^o – określona wzorem (5.20) jako

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t}. \quad (5.49)$$

Podstawiając $\Delta \varphi = \frac{\Delta s}{\rho}$ – przy czym ρ oznacza promień krzywizny toru w rozpatrywanym punkcie (rys. 5.11) – otrzymuje się

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\rho \Delta t} = \frac{1}{\rho} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{1}{\rho} v \quad (5.50)$$

oraz

$$\frac{d\vec{r}^o}{dt} = \frac{v}{\rho} \vec{n}^o. \quad (5.51)$$



Rysunek 5.11: Okrąg ściśle styczny do toru punktu i promień krzywizny toru ρ (a) oraz składowa styczna i normalna wektora przyspieszenia (b)

Po podstawieniu (5.50) do (5.48), wektor przyspieszenia punktu można wyrazić zależnością

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} \vec{r}^o + \frac{v^2}{\rho} \vec{n}^o. \quad (5.52)$$

Wprowadzając oznaczenia: a_τ – dla składowej stycznej i a_η – składowej normalnej wektora przyspieszenia punktu, to znaczy

$$a_\tau = \frac{dv}{dt}, \quad a_\eta = \frac{v^2}{\rho}, \quad (5.53)$$

przyspieszenie (5.52) przedstawia się symbolicznie jako

$$\vec{a} = a_\tau \vec{r}^o + a_\eta \vec{n}^o. \quad (5.54)$$

PRZYKŁAD 5.2.2

Ruch punktu poruszającego się po okręgu o promieniu $r = c = 2$ [m] jest opisany za pomocą wektorowego równania ruchu

$$\vec{r} = c \cos\left(\frac{1}{2}bt^2\right)\vec{i} + c \sin\left(\frac{1}{2}bt^2\right)\vec{j} + 0\vec{k},$$

przy czym $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ są wektorami jednostkowymi związanymi z nieruchomym układem odniesienia. Wyznaczyć prędkość i przyspieszenie tego punktu.

ROZWIĄZANIE

Jeśli znane jest równanie ruchu punktu w postaci wektorowej, to prędkość wyznacza się z zależności (5.44), to znaczy

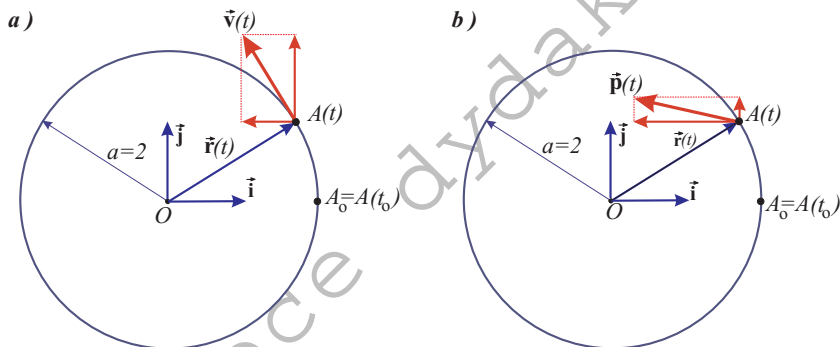
$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[c \cos\left(\frac{1}{2}bt^2\right)\vec{i} + c \sin\left(\frac{1}{2}bt^2\right)\vec{j} + 0\vec{k}\right].$$

Stąd

$$\vec{v} = \left[-c \sin\left(\frac{1}{2}bt^2\right)\right] \cdot \frac{1}{2}b \cdot 2t\vec{i} + \left[c \cos\left(\frac{1}{2}bt^2\right)\right] \cdot \frac{1}{2}b \cdot 2t\vec{j},$$

a po podstawieniu wartości $c = 2$ i uporządkowaniu

$$\vec{v} = -2bt \sin\left(\frac{1}{2}bt^2\right)\vec{i} + 2bt \cos\left(\frac{1}{2}bt^2\right)\vec{j}.$$



Rysunek 5.12: Wektory prędkości i przyspieszenia oraz ich składowe

Po zróźniczkowaniu wektora prędkości otrzymuje się wektor przyspieszenia w postaci

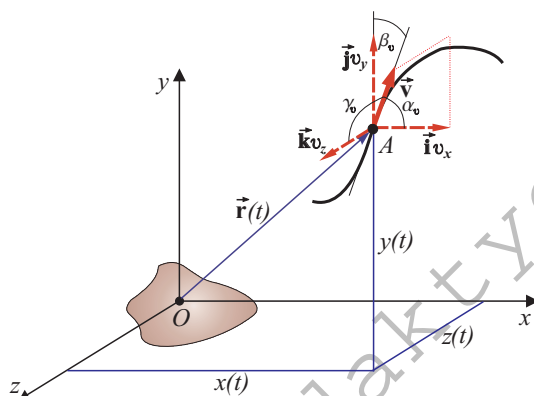
$$\begin{aligned} \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = & -\left[2b \sin\left(\frac{1}{2}bt^2\right) + 2b^2t^2 \cos\left(\frac{1}{2}bt^2\right)\right]\vec{i} \\ & + \left[2b \cos\left(\frac{1}{2}bt^2\right) - 2b^2t^2 \sin\left(\frac{1}{2}bt^2\right)\right]\vec{j}. \quad \diamond \end{aligned}$$

Prędkość i przyspieszenie w opisie ruchu za pomocą współrzędnych

Spośród wielu układów współrzędnych wykorzystywanych do opisu położenia i ruchu punktu zostaną omówione dwa układy – współrzędnych prostokątnych i współrzędnych biegunowych.

Prędkość i przyspieszenie w opisie ruchu w układzie współrzędnych prostokątnych

Do opisu ruchu punktu wygodne jest użycie prostokątnego układu współrzędnych (rys. 5.13) – jest to najczęściej stosowany sposób określenia położenia punktu czy układu złożonego z punktów.



Rysunek 5.13: Określenie prędkości punktu za pomocą współrzędnych prostokątnych

Przyjęcie początku układu współrzędnych w punkcie O i oznaczenie współrzędnych punktu A jako (x, y, z) pozwala na zapisanie wektora \vec{r} w postaci

$$\vec{r} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k} . \quad (5.55)$$

Różniczkując (5.55) względem czasu, otrzymuje się

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} = \frac{dx}{dt} \vec{i} + x \frac{d\vec{i}}{dt} + \frac{dy}{dt} \vec{j} + y \frac{d\vec{j}}{dt} + \frac{dz}{dt} \vec{k} + z \frac{d\vec{k}}{dt} . \quad (5.56)$$

W przypadku, gdy układ współrzędnych jest nieruchomy otrzymuje się

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt} \vec{i} + \frac{dy}{dt} \vec{j} + \frac{dz}{dt} \vec{k} . \quad (5.57)$$

Wprowadzając oznaczenia:

$$v_x \equiv \frac{dx}{dt} \equiv \dot{x} , \quad v_y \equiv \frac{dy}{dt} \equiv \dot{y} , \quad v_z \equiv \frac{dz}{dt} \equiv \dot{z} , \quad (5.58)$$

prędkość punktu można przedstawić jako

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k} . \quad (5.59)$$

Wartość bezwzględna (długość wektora) prędkości określa się na podstawie rzutów wektora \vec{v} jako

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} , \quad (5.60)$$

a kierunki jakie tworzy wektor \vec{v} z osiami układu współrzędnych xyz określone są za pomocą cosinusów:

$$\cos \alpha_v = \frac{v_x}{v} , \quad \cos \beta_v = \frac{v_y}{v} , \quad \cos \gamma_v = \frac{v_z}{v} . \quad (5.61)$$

Zmiany wektora prędkości w czasie – to jest przyspieszenie punktu – określa pochodna wektora prędkości. Dla układu odniesienia poruszającego się ruchem postępowym (bądź nieruchomego układu odniesienia) otrzymuje się

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} , \quad (5.62)$$

przy czym:

$$a_x \equiv \frac{dv_x}{dt} \equiv \ddot{x} , \quad a_y \equiv \frac{dv_y}{dt} \equiv \ddot{y} , \quad a_z \equiv \frac{dv_z}{dt} \equiv \ddot{z} , \quad (5.63)$$

Wartość bezwzględna (długość wektora) przyspieszenia określa się na podstawie rzutów wektora \vec{a} jako

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} . \quad (5.64)$$

Kierunki jakie tworzy wektor \vec{a} z osiami układu współrzędnych xyz określone są za pomocą cosinusów:

$$\cos \alpha_p = \frac{a_x}{a} , \quad \cos \beta_p = \frac{a_y}{a} , \quad \cos \gamma_p = \frac{a_z}{a} . \quad (5.65)$$

PRZYKŁAD 5.2.3

Ruch punktu jest opisany równaniami:

$$\begin{cases} x = c \cos(\frac{1}{2}bt^2) , \\ y = c \sin(\frac{1}{2}bt^2) , \\ z = 0 , \end{cases}$$

przy czym $c = 2$ [m].

Określić równanie toru punktu. Wyznaczyć prędkość i przyspieszenie tego punktu.

ROZWIĄZANIE

Równanie toru w postaci wyraźnej⁹ otrzymuje się, eliminując czas t z równań ruchu. W tym przypadku można to zrobić, podnosząc każde z równań do kwadratu, a następnie dodając je stronami. Wówczas otrzymuje się zależność

$$x^2 + y^2 = c^2 \left[\cos^2\left(\frac{1}{2}bt^2\right) + \sin^2\left(\frac{1}{2}bt^2\right) \right],$$

a po wykorzystaniu tożsamości $\cos^2\left(\frac{1}{2}bt^2\right) + \sin^2\left(\frac{1}{2}bt^2\right) = 1$ otrzymuje się równanie toru o postaci

$$x^2 + y^2 = c^2.$$

Jest to równanie okręgu o promieniu $r = c$ ($c = 2$ [m]).

Jeśli znane są równania ruchu punktu we współrzędnych prostokątnych, to prędkość wyznacza się z zależności (5.60), to znaczy

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2},$$

przy czym

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \left[-c \sin\left(\frac{1}{2}bt^2\right)\right] \frac{1}{2}b \cdot 2t = -cbt \sin\left(\frac{1}{2}bt^2\right),$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \left[c \cos\left(\frac{1}{2}bt^2\right)\right] \frac{1}{2}b \cdot 2t = cbt \cos\left(\frac{1}{2}bt^2\right),$$

$$v_z = 0.$$

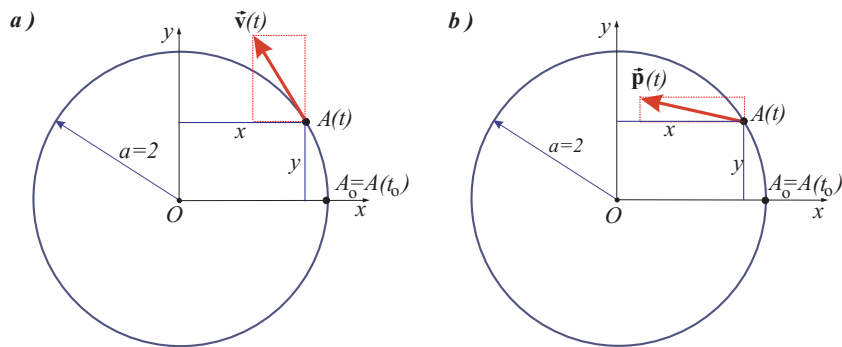
Stąd

$$v = \sqrt{c^2 b^2 t^2 \left[\sin^2\left(\frac{1}{2}bt^2\right) + \cos^2\left(\frac{1}{2}bt^2\right) \right]} = cbt,$$

a po podstawieniu wartości $c = 2$

$$v = 2bt.$$

⁹Równania o postaci $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ są równaniami toru w postaci parametrycznej.



Rysunek 5.14: Wektory prędkości i przyspieszenia punktu oraz ich składowe

Analogiczne postępowanie w przypadku przyspieszenia punktu prowadzi do wyników:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = -cb \sin\left(\frac{1}{2}bt^2\right) - cb^2t^2 \cos\left(\frac{1}{2}bt^2\right),$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = cb \cos\left(\frac{1}{2}bt^2\right) - cb^2t^2 \sin\left(\frac{1}{2}bt^2\right),$$

$$a_z = 0,$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = cb\sqrt{1 + b^2t^4} = 2b\sqrt{1 + b^2t^4}.$$

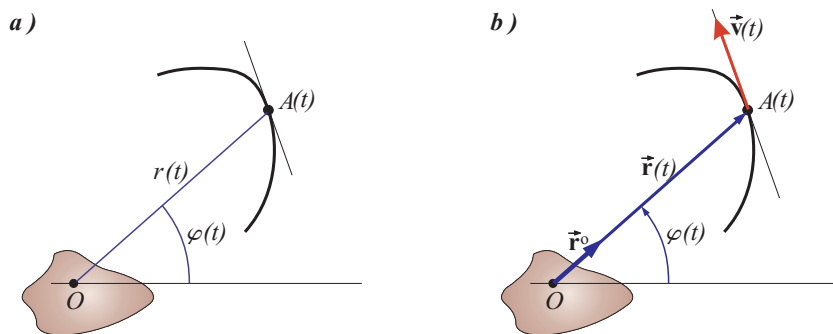
Otrzymane wyniki są zilustrowane na rys. 5.14. \diamond

Określenie prędkości i przyspieszenia punktu w układzie współrzędnych biegunowych

Ruch może być opisany za pomocą innego niż prostokątny układu współrzędnych – na przykład współrzędnych walcowych, sferycznych itp. Jeśli punkt porusza się w jednej płaszczyźnie, to do opisu ruchu można użyć współrzędnych biegunowych (rys. 5.15).

Zależności określające prędkość i przyspieszenie punktu, którego ruch jest opisany we współrzędnych biegunowych można wyprowadzić różniczkując wektor wodzący punktu określony jako

$$\vec{r} = r \vec{r}^o, \quad (5.66)$$



Rysunek 5.15: Określenie położenia punktu: a) współrzędne biegunowe, b) wektory \vec{r} i \vec{r}^o

gdzie \vec{r}^o jest wektorem jednostkowym o kierunku promienia r (rys. 5.16). Pierwsza pochodna tego wektora jest prędkością, a druga przyspieszeniem. Zatem

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt} \vec{r}^o + r \frac{d\vec{r}^o}{dt} . \quad (5.67)$$

Występująca w zależności (5.67) pochodna wektora jednostkowego $\frac{d\vec{r}^o}{dt}$ może być określona na podstawie (5.21) jako

$$\frac{d\vec{r}^o}{dt} = \omega \vec{n}^o , \quad (5.68)$$

przy czym

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} . \quad (5.69)$$

(Granica ilorazu $\frac{\Delta \varphi}{\Delta t}$, w przypadku, gdy wektor \vec{r}^o pozostaje stale w tej samej płaszczyźnie, jest równa pochodnej kąta φ .) Ostatecznie wektor prędkości (5.67) można przedstawić w formie

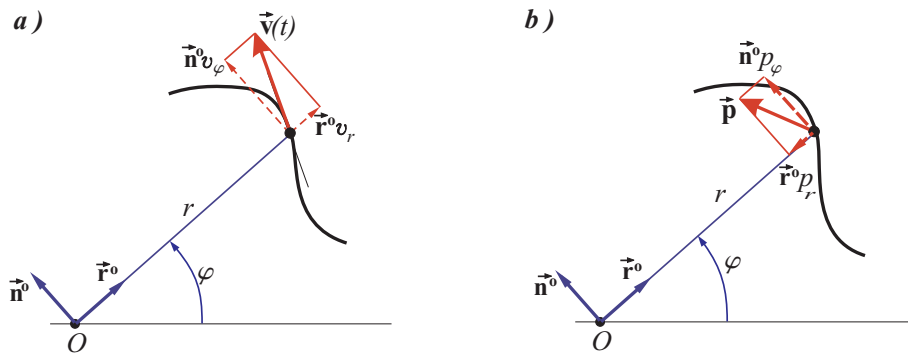
$$\vec{v} = \frac{dr}{dt} \vec{r}^o + r \frac{d\varphi}{dt} \vec{n}^o \quad (5.70)$$

lub (rys. 5.16a)

$$\vec{v} = v_r \vec{r}^o + v_\varphi \vec{n}^o . \quad (5.71)$$

Użyte oznaczenia v_r , v_φ odnoszą się do wartości składowych wektora prędkości, przy czym v_r jest długością składowej promieniowej, a v_φ składowej normalnej (transwersalnej):

$$v_r = \frac{dr}{dt} , \quad v_\varphi = r \frac{d\varphi}{dt} . \quad (5.72)$$



Rysunek 5.16: Współrzędne biegunowe – składowe wektorów: a) prędkości, b) przyspieszenia

Wartość wektora prędkości, który jest sumą dwu składowych prostopadłych można wyznaczyć z zależności

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_\varphi^2} . \quad (5.73)$$

Przyspieszenie – wyznaczone jako pochodna wektora prędkości (5.71) – jest określone przez

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dr}{dt} \vec{r}^o + r \frac{d\varphi}{dt} \vec{n}^o \right) . \quad (5.74)$$

Stąd otrzymuje się

$$\vec{a} = \frac{d^2r}{dt^2} \vec{r}^o + \frac{dr}{dt} \frac{d\vec{r}^o}{dt} + \frac{dr}{dt} \frac{d\varphi}{dt} \vec{n}^o + r \frac{d^2\varphi}{dt^2} \vec{n}^o + r \frac{d\varphi}{dt} \frac{d\vec{n}^o}{dt} , \quad (5.75)$$

a po wykorzystaniu związków $\frac{d\vec{r}^o}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} \vec{n}^o$ i $\frac{d\vec{n}^o}{dt} = -\frac{d\varphi}{dt} \vec{r}^o$ dochodzi się do zależności

$$\vec{a} = \left(\frac{d^2r}{dt^2} - r \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right) \vec{r}^o + \left(r \frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\varphi}{dt} \right) \vec{n}^o \quad (5.76)$$

Wprowadzając oznaczenia: a_r – dla wartości składowej promieniowej (lub radialnej), a_φ – dla wartości składowej azymutalnej (albo transwersalnej), to znaczy

$$a_r = \frac{d^2r}{dt^2} - r \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 , \quad a_\varphi = r \frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\varphi}{dt} , \quad (5.77)$$

przyspieszenie punktu, którego ruch opisany jest za pomocą współrzędnych biegunowych, można zapisać w postaci

$$\vec{a} = a_r \vec{r}^o + a_\varphi \vec{n}^o, \quad (5.78)$$

a długość tego wektora można wyznaczyć, korzystając z wzoru (rys. 5.16b)

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_\varphi^2}. \quad (5.79)$$

PRZYKŁAD 5.2.4

Ruch punktu jest opisany równaniami:

$$\begin{cases} r(t) = c, \\ \varphi(t) = \frac{1}{2}bt^2. \end{cases}$$

przy czym $c = 2$ [m]. Wyznaczyć prędkość i przyspieszenie tego punktu.

ROZWIĄZANIE

Torem punktu jest łuk okręgu lub okrąg o promieniu c , gdyż zadana odległość od bieguna jest stała $r(t) = c = 2$ [m]. (Zadane równania ruchu są parametrycznymi równaniami okręgu we współrzędnych biegunowych.)

Do wyznaczenia prędkości punktu, którego ruch jest opisany we współrzędnych biegunowych należy określić dwie składowe wektora prędkości – o długościach wyznaczanych z zależności (5.72), to znaczy:

$$v_r = \frac{dr}{dt} = 0,$$

$$v_\varphi = r \frac{d\varphi}{dt} = c \cdot \frac{1}{2}b \cdot 2t = cbt = 2bt.$$

Wartość bezwzględna wektora prędkości (5.73) jest równa

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_\varphi^2} = |v_\varphi| = 2bt.$$

Wyznaczenie przyspieszeń rozpoczniemy od określenia pochodnych występujących we wzorach (5.77) – określających wartości a_r i a_φ :

$$\frac{dr}{dt} = 0, \quad \frac{d^2r}{dt^2} = 0, \quad \frac{d\varphi}{dt} = bt, \quad \frac{d^2\varphi}{dt^2} = b.$$

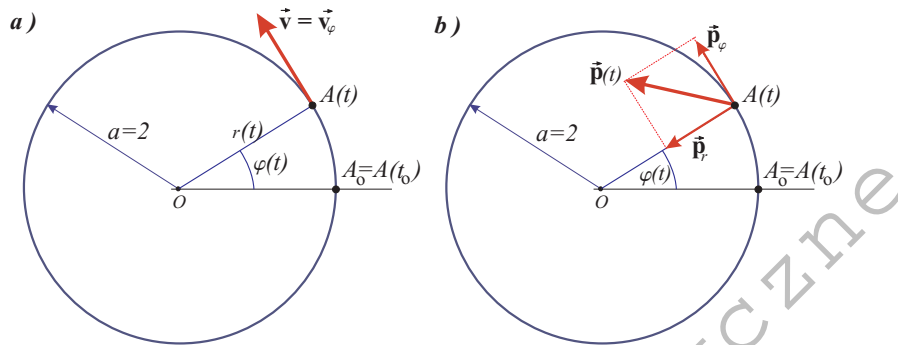
Wartości składowych wektora przyspieszenia opisują funkcje:

$$a_r = \frac{d^2r}{dt^2} - r \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = 0 - c(bt)^2 = -cb^2t^2 = -2b^2t^2,$$

$$a_\varphi = r \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\varphi}{dt} = cb + 0 = cb = 2b.$$

Wartość wektora przyspieszenia (5.79) jest określona wzorem

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_\varphi^2} = \sqrt{4b^4 t^4 + 4b^2} = 2b \sqrt{b^2 t^4 + 1}.$$



Rysunek 5.17: Wektory prędkości i przyspieszenia oraz ich składowe

Na rysunku 5.17 zostały pokazane wektory prędkości i przyspieszenia punktu oraz ich składowe. \diamond

Prędkość i przyspieszenie punktu przy opisie ruchu punktu po torze

Najbardziej naturalnym sposobem opisu ruchu punktu jest określenie drogi przebytej wzdłuż toru (rys. 5.18).

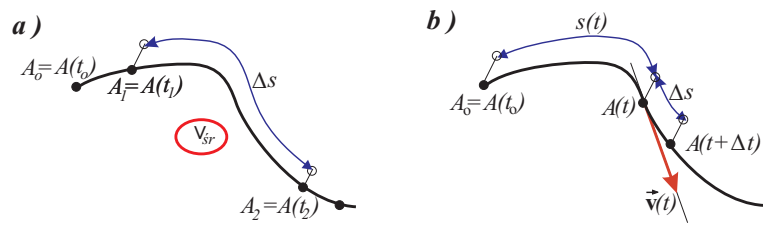
Jeśli znana jest droga (Δs) przebyta przez punkt w czasie $t \in (t_1, t_2)$, to jest w czasie $\Delta t = t_2 - t_1$, wówczas można określić wartość prędkości średniej punktu (v_{sr}) – zwanej również szybkością punktu – jako

$$v_{sr} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\Delta s}{t_2 - t_1}. \quad (5.80)$$

Prędkość chwilowa punktu ($\vec{v}(t)$) – nazywana dalej prędkością – oznacza prędkość punktu w chwili t . Prędkość chwilowa jest zdefiniowana jako wektor styczny do toru, o zwrocie zgodnym z kierunkiem ruchu i wartości $v(t)$ określonej jako

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}, \quad (5.81)$$

przy czym $\Delta s(t)$ oznacza drogę przebytą przez punkt w czasie $\Delta t \rightarrow 0$.

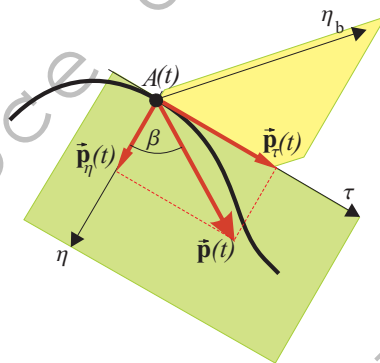


Rysunek 5.18: Określenie prędkości średniej i wektora prędkości chwilowej punktu na podstawie przebytej drogi

Przyspieszenie określa zmiany wektora prędkości w czasie, a zmiany te mogą wynikać ze zmian wartości, a także ze zmian kierunku wektora \vec{v} . W związku z tym przyspieszenie można przedstawić w postaci dwu składowych – jedna określa przyrost wartości wektora prędkości, a druga zmianę wektora wynikającą ze zmiany jego kierunku.

W każdym punkcie dowolnej krzywej przestrzennej można poprowadzić płaszczyznę ściśle styczną $\tau\eta$ (i płaszczyznę normalną $\eta\eta_b$). Układ osi $\tau\eta\eta_b$ jest nazywany **naturalnym układem współrzędnych** (τ – oś styczna, η – oś normalna, η_b – oś binormalna). Jest to układ związany z punktem leżącym na zadanej krzywej¹⁰. Osie $\tau\eta$ wyznaczają płaszczyznę ściśle styczną, a osie $\eta\eta_b$ płaszczyznę normalną do krzywej.

W położeniu punktu odpowiadającym chwili t można zatem poprowadzić oś styczną (τ) oraz oś normalną do toru (η). Wektor przyspieszenia leży w płaszczyźnie ściśle stycznej do toru i można go przedstawić za pomocą składowej o kierunku stycznej i składowej o kierunku normalnej (rys. 5.19).



Rysunek 5.19: Przyspieszenie punktu – składowa styczna i normalna do toru

¹⁰W mechanice jest to zazwyczaj krzywa, która jest torem poruszającego się punktu.

Wartości składowych wektora \vec{a} w układzie naturalnym $\tau\eta$ wyznacza się na podstawie zależności (5.53), to znaczy:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt}, \quad a_\eta = \frac{v^2}{\rho}. \quad (5.82)$$

Wartość bezwzględna (długość) wektora przyspieszenia określa się na podstawie jego współrzędnych a_τ i a_η jako

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_\eta^2}, \quad (5.83)$$

a jego kierunek – w stosunku do normalnej – za pomocą funkcji kąta β

$$\cos \beta = \frac{a_\tau}{a} = \frac{a_\tau}{\sqrt{a_\tau^2 + a_\eta^2}}. \quad (5.84)$$

Zależności (5.82) można wyprowadzić na kilka sposobów – w następnym rozdziale będą one określone poprzez różniczkowanie wektora prędkości.

PRZYKŁAD 5.2.5

Równanie ruchu punktu poruszającego się po okręgu o promieniu $c = 2$ [m] ma postać

$$s = \frac{1}{2} c b t^2.$$

Wyznaczyć prędkość i przyspieszenie tego punktu.

ROZWIĄZANIE

Jeśli znane jest równanie ruchu punktu po torze ($s = \frac{1}{2} c b t^2$), to wartość jego prędkości wyznacza się z zależności (5.81), to znaczy

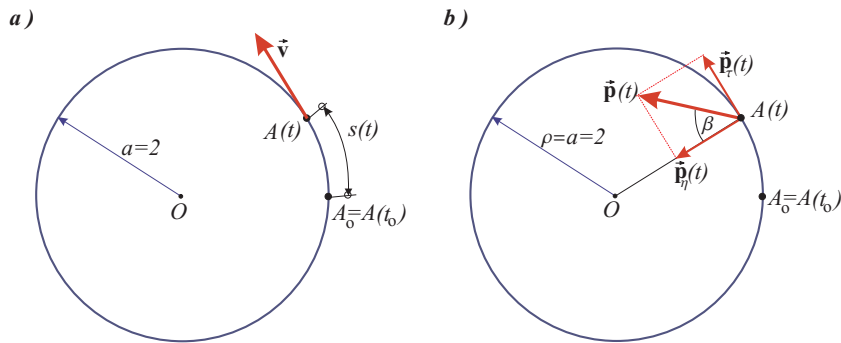
$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} c b t^2 \right) = c b t.$$

Po podstawieniu wartości $c = 2$ [m], otrzymuje się $v = 2 b t$ [m/s].

Wykorzystując informację, że torem jest okrąg o zadanym promieniu można narysować wektor prędkości (rys. 5.20a).

Wartości składowych wektora przyspieszenia \vec{a} wyznacza się na podstawie zależności (5.82). Z uwagi na to, że torem jest okrąg o promieniu c promień krzywizny toru jest znany i wynosi $\rho = c = 2$ [m]. Stąd:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} (2 b t) = 2 b, \\ a_\eta = \frac{v^2}{\rho} = \frac{(2 b t)^2}{c} = \frac{4 b^2 t^2}{2} = 2 b^2 t^2.$$



Rysunek 5.20: Wektory prędkości i przyspieszenia punktu

Całkowite przyspieszenie \vec{a} jest wektorem o długości

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_\eta^2} = \sqrt{(2b)^2 + (2b^2 t^2)^2} = 2b\sqrt{1 + 2b^2 t^4},$$

a jego kierunek – w stosunku do normalnej – można wyznaczyć jako

$$\cos \beta = \frac{a_\eta}{a} = \frac{2b^2 t^2}{2b\sqrt{1 + 2b^2 t^4}} = \frac{bt^2}{\sqrt{1 + 2b^2 t^4}}.$$

Składowe wektora przyspieszenia, ich wypadkowa i kąt β są przedstawione na rys. 5.20b. \diamond

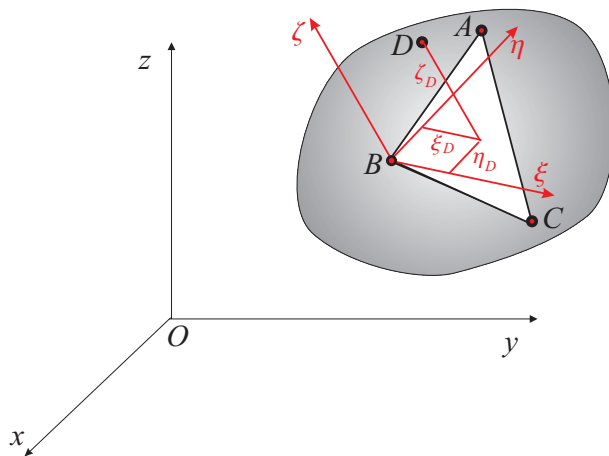
5.3 Kinematyka ciała sztywnego

Ciało sztywne można rozpatrywać jako zbiór punktów materialnych, których wzajemne odległości nie ulegają zmianie.

Dla jednoznacznego określenia położenia (i ruchu) ciała sztywnego wystarczy znajomość położenia (ruchu) trzech punktów (np. A, B, C – rys. 5.21) należących do tego ciała. Mogą to być dowolne trzy punkty ciała, o ile nie leżą na jednej prostej. Przez te punkty można poprowadzić płaszczyznę i związać z nią układ współrzędnych $(\xi\eta\zeta)$. Tak wprowadzony układ współrzędnych nosi nazwę układu sztywno związanego z ciałem. W takim układzie współrzędnych wszystkie punkty ciała sztywnego pozostają nieruchome, mimo iż sam układ porusza się razem z ciałem.

Położenie każdego innego punktu tego ciała (np. punktu D) można określić przez podanie współrzędnych tego punktu $(\xi_D\eta_D\zeta_D)$ w układzie związanym z rozpatrywanym ciałem.

Przy takim podejściu opis ruchu ciała sztywnego można sprowadzić do opisu ruchu układu współrzędnych sztywno związanego z ciałem. Można zatem



Rysunek 5.21: Układ współrzędnych $\xi\eta\zeta$ związany z ciałem sztywnym i układ odniesienia xyz

sformułować ogólną postać równań ruchu ciała jako układ równań określających położenie początku układu osi sztywno związanych z ciałem oraz kątów opisujących kierunki osi (orientację przestrzenną układu):

$$\begin{cases} x_B = x(t), \\ y_B = y(t), \\ z_B = z(t), \end{cases} \quad \begin{cases} \psi = \psi(t), \\ \vartheta = \vartheta(t), \\ \varphi = \varphi(t). \end{cases} \quad (5.85)$$

Trzy pierwsze równania określają położenie punktu B , który jest początkiem układu współrzędnych związanego z ciałem, kolejne trzy równania oznaczają kąty określające kierunki osi układu współrzędnych $\xi\eta\zeta$ w stosunku do układu odniesienia xyz . Taki sposób opisu ruchu ciała został zaproponowany przez L. Eulera¹¹.

Równania o postaci (5.85) są równaniami ruchu ciała sztywnego. Na podstawie tego rodzaju równań można analizować ruch ciała, to jest określić prędkość kątową i przyspieszenie katowe ciała oraz prędkość i przyspieszenie dowolnego punktu ciała.

W następnych podrozdziałach są przedstawione zależności pozwalające na wyznaczenie prędkości i przyspieszenia dowolnego punktu ciała sztywnego na podstawie zadanych wielkości: prędkości i przyspieszenia wybranego punktu oraz prędkości katowej i przyspieszenia katowego ciała.

¹¹Leonhard Euler (1707–1783) – uważany za jednego z twórców współczesnej matematyki. Zajmował się też zastosowaniami matematyki w fizyce (m.in. w mechanice ciała sztywnego, mechanice płynów, balistyce). Pochodził ze Szwajcarii, pracował w Petersburgu i Berlinie.

Określenie położenia punktu ciała sztywnego

Położenie dowolnego punktu ciała sztywnego (taki dowolny punkt będzie oznaczony symbolem A) względem układu odniesienia xyz można określić jako

$$\vec{r}_A = \vec{r}_B + \vec{r}_{BA}, \quad (5.86)$$

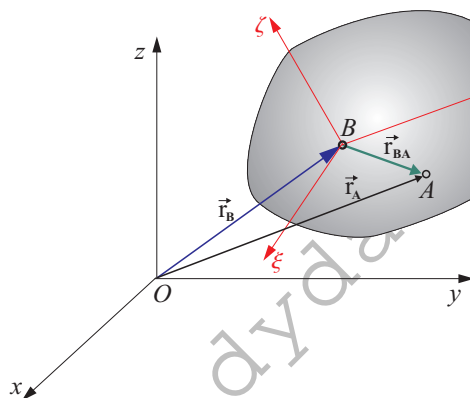
przy czym:

\vec{r}_B – wektor położenia bieguna B ,

\vec{r}_{BA} – wektor położenia punktu A względem bieguna B (rys. 5.22).

Oznaczony symbolem B biegun jest takim punktem, którego położenie (prędkość i przyspieszenie) są znane. Oba punkty (A i B) muszą należeć do tego samego ciała sztywnego (lub być z nim sztywno związane). Biegun B jest zazwyczaj przyjmowany jako początek układu $\xi\eta\zeta$ sztywno związanego z ciałem.

Długość wektora \vec{r}_{BA} – to jest odległość między punktami A i B – nie ulega zmianie (rozpatrywane ciało jest ciałem sztywnym).



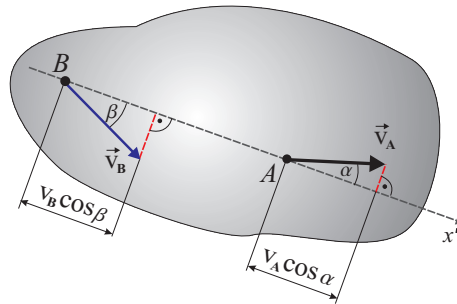
Rysunek 5.22: Określenie położenia dowolnego punktu ciała sztywnego

Warto zauważyć, że podczas ruchu ciała wektor \vec{r}_{BA} zmienia swój kierunek względem układu xyz , ale pozostaje niezmienny w układzie $\xi\eta\zeta$.

5.3.1 Twierdzenie o rzutach prędkości punktów ciała sztywnego

Przy analizie ruchu ciała sztywnego często wykorzystuje się twierdzenie o rzutach prędkości punktów ciała sztywnego na oś przechodzącą przez te punkty (rys. 5.23).

- Rzuty prędkości dwóch dowolnych punktów ciała sztywnego na oś przechodzącą przez te punkty są sobie równe.



Rysunek 5.23: Rzuty prędkości dwóch punktów ciała sztywnego (A i B) na oś (x') przechodzącą przez te punkty

Matematyczny zapis tego twierdzenia ma postać

$$v_A \cos \alpha = v_B \cos \beta, \quad (5.87)$$

przy czym v_A i v_B oznaczają wartości prędkości dwóch punktów należących do tego samego ciała sztywnego, a α i β oznaczają kąty pomiędzy osią (x') przechodzącą przez punkty A i B a wektorami \vec{v}_A i \vec{v}_B .

Dowód twierdzenia zostanie przedstawiony w punkcie 5.3.2.

PRZYKŁAD 5.3.1

Znając prędkość punktu B , ciała obracającego się wokół osi prostopadłej do płaszczyzny rysunku i przechodzącej przez punkt O , wyznaczyć prędkość punktu A . (Przyjąć, że ciało obraca się w prawo.) Dane: $c = 1$ m, $b = 2$ m, $v_B = 3t$ [m/s].

ROZWIĄZANIE

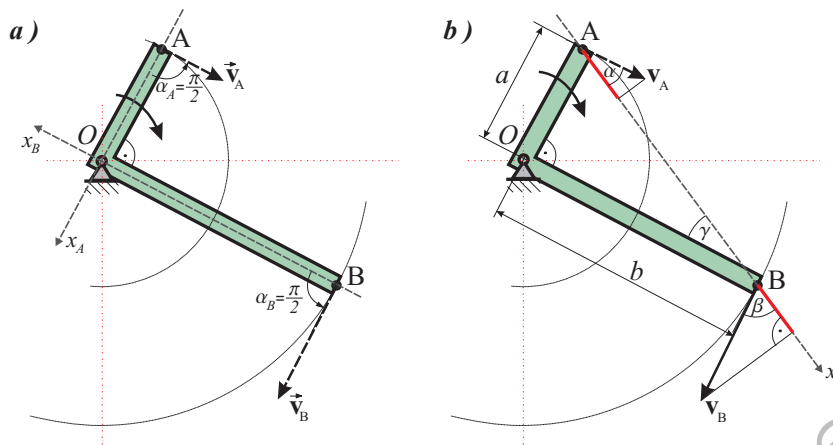
Wartość prędkości punktu B jest zadana, znana jest również prędkość punktu O ($\vec{v}_O = \vec{0}$). Na podstawie tych wielkości można wyznaczyć kierunki wektorów \vec{v}_B i \vec{v}_A .

Korzystając z twierdzenia o rzutach prędkości dwóch punktów ciała sztywnego na oś przechodzącą przez te punkty można napisać – dla punktów O i B zależność

$$v_B \cos \alpha_B = v_O \cos \alpha_O,$$

w której α_B oznacza kąt pomiędzy osią x_B (rys. 5.24a) a wektorem \vec{v}_B . Z tej zależności wynika, że $v_B \cos \alpha_B = 0$, co oznacza $\cos \alpha_B = 0$, a więc $\alpha_B = \pm\pi/2$.

Postępując podobnie – dla punktów A i O – otrzymuje się $v_A \cos \alpha_A = 0$ oraz $\alpha_A = \pm\pi/2$. Ponieważ ciało obraca się w prawo, to zwroty prędkości \vec{v}_B i \vec{v}_A będą takie jak zaznaczone na rys. 5.24a – to znaczy, że $\alpha_B = \pi/2$, $\alpha_A = \pi/2$.



Rysunek 5.24: Prędkości punktów A i B ciała sztywnego

Znając wartość, kierunek i zwrot wektora prędkości punktu B można wyznaczyć jej rzut na oś (x') przechodzącą przez punkty A i B (rys. 5.24). Na podstawie twierdzenia o rzutach prędkości dwóch punktów ciała sztywnego na oś przechodzącą przez te punkty zachodzi związek

$$v_A \cos \alpha = v_B \cos \beta,$$

stąd

$$v_A = \frac{v_B \cos \beta}{\cos \alpha}.$$

Wprowadzając kąt γ można skorzystać ze związków:

$$\gamma + \frac{\pi}{2} + \beta = \pi, \quad \alpha = \gamma.$$

Po podstawieniu $\beta = \frac{\pi}{2} - \gamma$

$$v_A = \frac{v_B \cos \beta}{\cos \alpha} = \frac{v_B \cos(\frac{\pi}{2} - \gamma)}{\cos \gamma} = \frac{v_B \sin \gamma}{\cos \gamma} = v_B \operatorname{tg} \gamma.$$

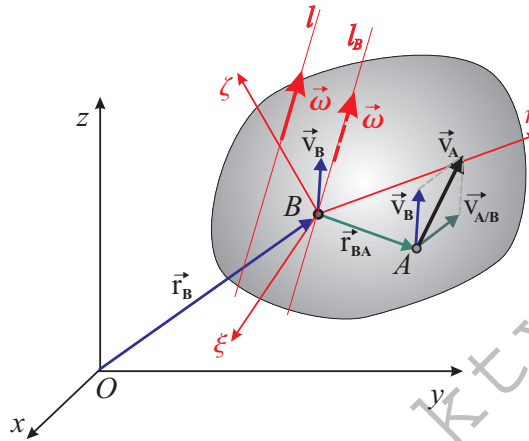
Wyznaczając $\operatorname{tg} \gamma$ ($\operatorname{tg} \gamma = \frac{c}{b}$) otrzymuje się

$$v_A = v_B \frac{c}{b} = \frac{3}{2} t. \quad \diamond$$

5.3.2 Związki między prędkościami punktów ciała sztywnego

Prędkość punktu A jest pochodną wektora \vec{r}_A określającego położenie punktu A (rys. 5.22). Stąd

$$\vec{v}_A = \frac{d\vec{r}_A}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r}_B + \vec{r}_{BA}) = \frac{d\vec{r}_B}{dt} + \frac{d\vec{r}_{BA}}{dt} = \vec{v}_B + \frac{d\vec{r}_{BA}}{dt}. \quad (5.88)$$



Rysunek 5.25: Prędkość dowolnie wybranego punktu (A) ciała sztywnego (oznaczenia: \vec{v}_B – prędkość bieguna (B), $\vec{v}_{A/B}$ – prędkość punktu A względem bieguna)

Pochodną $\frac{d\vec{r}_{BA}}{dt}$ zazwyczaj oznacza się symbolem $\vec{v}_{B/A}$ i nazywa prędkością punktu B względem punktu A . Można ją określić – wykorzystując pochodną lokalną (5.34) – w następujący sposób

$$\frac{d\vec{r}_{BA}}{dt} = \vec{v}_{B/A} = \frac{\hat{d}\vec{r}_{BA}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{r}_{BA} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{BA}, \quad (5.89)$$

przy czym wykorzystano fakt, że pochodna lokalna wektora \vec{r}_{BA} jest równa zero ($\frac{\hat{d}\vec{r}_{BA}}{dt} = 0$), gdyż wektor ten nie ulega zmianie w układzie $\xi\eta\zeta$. Stąd – po podstawieniu do (5.88)

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{\omega} \times \vec{r}_{BA}, \quad (5.90)$$

przy czym:

- \vec{v}_B – prędkość bieguna B ,
- $\vec{v}_{A/B}$ – prędkość punktu A względem bieguna B ,
- $\vec{\omega}$ – wektor chwilowej prędkości kątowej ciała (układu $\xi\eta\zeta$),

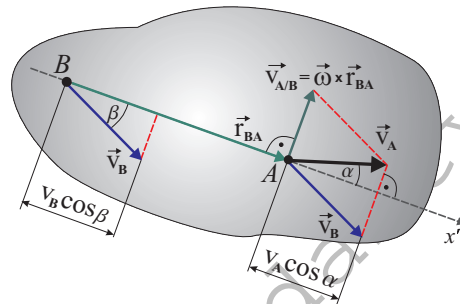
Jak wspomniano wcześniej, przy wyznaczaniu prędkości dowolnego punktu ciała sztywnego na podstawie zależności (5.90) zakłada się, że prędkość bieguna \vec{v}_B oraz chwilowa prędkość kąтова ciała $\vec{\omega}$, a także położenie prostej l , na której leży wektor $\vec{\omega}$ są znane. Prosta l jest nazywana osią chwilowego obrotu. Wektory prędkości wszystkich punktów ciała sztywnego leżących na osi chwilowego obrotu (l) mają jednakową wartość, a poza tym muszą spełniać warunek

$$\vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{0}, \quad (5.91)$$

to znaczy, że prędkości tych punktów są równe zero lub, że wektory prędkości mają kierunek osi chwilowego obrotu.

Dowód twierdzenia o rzutach prędkości punktów ciała sztywnego

Udowodnimy, że rzuty prędkości dwóch dowolnych punktów ciała sztywnego na oś przechodzącą przez te punkty są sobie równe.



Rysunek 5.26: Rzuty prędkości dwóch punktów ciała sztywnego (A i B) na oś (x') przechodzącą przez te punkty

Zależność określającą związek między prędkościami dwóch punktów ciała

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{\omega} \times \vec{r}_{BA}, \quad (5.92)$$

mnożymy skalarnie przez wektor \vec{r}_{BA}

$$\vec{v}_A \cdot \vec{r}_{BA} = \vec{v}_B \cdot \vec{r}_{BA} + (\vec{\omega} \times \vec{r}_{BA}) \cdot \vec{r}_{BA}. \quad (5.93)$$

Ostatni składnik prawej strony równania (5.93) jest równy zero, gdyż wektor \vec{r}_{BA} i $(\vec{\omega} \times \vec{r}_{BA})$ są do siebie prostopadłe (rys. 5.26). Stąd – na podstawie definicji iloczynu skalarnego – otrzymuje się

$$v_A r_{BA} \cos \alpha = v_B r_{BA} \cos \beta, \quad (5.94)$$

a po podzieleniu obu stron przez r_{BA}

$$v_A \cos \alpha = v_B \cos \beta \quad (5.95)$$

5.3.3 Zależności pomiędzy przyspieszeniami punktów ciała sztywnego

Przyspieszenie dowolnego punktu (A) ciała sztywnego można wyznaczyć różniczkując wektor prędkości tego punktu

$$\vec{a}_A = \dot{\vec{v}}_A = \frac{d\vec{v}_A}{dt} = \frac{d^2\vec{r}_A}{dt^2}. \quad (5.96)$$

Wiedząc, że

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{v}_{A/B} = \vec{v}_B + \vec{\omega} \times \vec{r}_{BA}, \quad (5.97)$$

po zróżniczkowaniu można napisać

$$\vec{a}_A = \dot{\vec{v}}_B + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}_{BA} + \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}_{BA}. \quad (5.98)$$

Wprowadzając oznaczenia:

$\vec{a}_B = \dot{\vec{v}}_B$ – przyspieszenie bieguna B ,

$\vec{\epsilon} = \dot{\vec{\omega}}$ – wektor chwilowego przyspieszenia kąтового ciała,

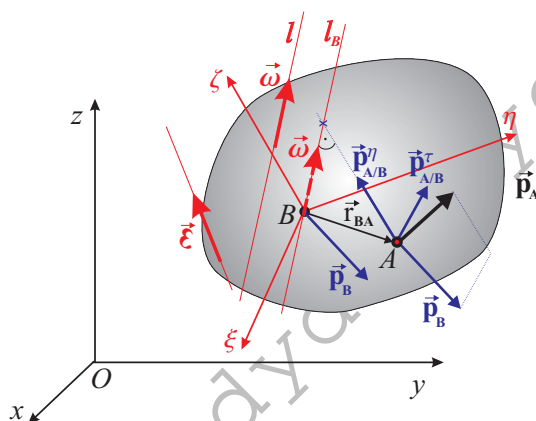
$\vec{r}_{BA} = \vec{v}_{A/B} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{BA}$ – prędkość punktu A względem bieguna B ,

otrzymuje się zależność określającą przyspieszenie dowolnego punktu ciała sztywnego w formie

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{\epsilon} \times \vec{r}_{BA} + \vec{\omega} \times \vec{v}_{A/B}, \quad (5.99)$$

lub

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{\epsilon} \times \vec{r}_{BA} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{BA}). \quad (5.100)$$



Rysunek 5.27: Przyspieszenie dowolnego punktu (A) ciała sztywnego (oznaczenia: \vec{a}_B – przyspieszenie bieguna, $\vec{a}_{A/B}^\tau$ – przyspieszenie obrotowe, $\vec{a}_{A/B}^\eta$ – przyspieszenie doosiowe)

Jeśli wprowadzi się oznaczenia:

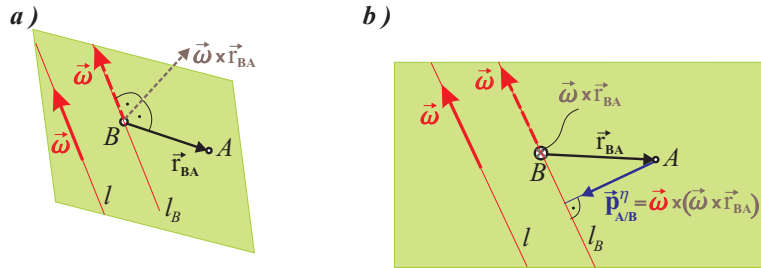
$$\vec{a}_{A/B}^\tau = \vec{\epsilon} \times \vec{r}_{BA}, \quad (5.101)$$

$$\vec{a}_{A/B}^\eta = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{BA}), \quad (5.102)$$

to przyspieszenie punktu A przyjmuje postać

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{a}_{A/B}^\tau + \vec{a}_{A/B}^\eta. \quad (5.103)$$

Z własności iloczynu wektorowego wynika, że wektor $\vec{a}_{A/B}^\eta$ jest prostopadły do wektora $\vec{\omega}$ (rys. 5.27) oraz do wektora, który jest iloczynem wektorów $\vec{\omega}$ i \vec{r}_{BA} . Na rysunku 5.28 są pokazane kierunki tych wektorów. Zaznaczona jest też płaszczyzna, w której leży wektor $\vec{a}_{A/B}^\eta$ – płaszczyzna ta jest utworzona przez wektor \vec{r}_{BA} oraz prostą l_B , przechodzącą przez punkt B i równoległą do osi chwilowego obrotu (l).



Rysunek 5.28: Wektory $\vec{\omega}$, \vec{r}_{BA} i $\vec{\omega} \times \vec{r}_{BA}$ (a) oraz kierunek przyspieszenia doosiowego punktu A $\vec{a}_{A/B}^\eta = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{BA})$ (b)

Podwójny iloczyn wektorowy można – zgodnie z zależnością (2.36) – przedstawić za pomocą dwóch iloczynów skalarnych

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} (\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c} (\vec{a} \cdot \vec{b}). \quad (5.104)$$

Wyrażenie o postaci $\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{BA})$, występujące we wzorach (5.100), (5.102), można więc przedstawić w formie

$$\begin{aligned} \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{BA}) &= \vec{\omega} (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_{BA}) - \vec{r}_{BA} (\vec{\omega} \cdot \vec{\omega}) = \\ &= \omega r_{BA} \cos \angle(\vec{\omega}, \vec{r}_{BA}) \vec{\omega} - \omega^2 \vec{r}_{BA}. \end{aligned} \quad (5.105)$$

Zatem wektor oznaczony symbolem $\vec{a}_{A/B}^\eta$ (5.102) może być też określony na podstawie zależności

$$\vec{a}_{A/B}^\eta = \omega r_{BA} \cos \angle(\vec{\omega}, \vec{r}_{BA}) \vec{\omega} - \omega^2 \vec{r}_{BA}. \quad (5.106)$$

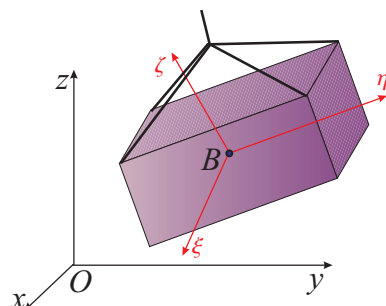
Mnożąc (5.106) skalarnie przez $\vec{\omega}$, łatwo wyznaczyć kierunek wektora $\vec{a}_{A/B}^\eta$

$$\vec{a}_{A/B}^\eta \cdot \vec{\omega} = \omega^3 r_{BA} \cos \angle(\vec{\omega}, \vec{r}_{BA}) - \omega^3 r_{BA} \cos \angle(\vec{\omega}, \vec{r}_{BA}) = 0. \quad (5.107)$$

Zerowa wartość iloczynu skalarnego dwóch wektorów oznacza, że wektory są do siebie prostopadłe. Zatem wektor $\vec{a}_{A/B}^\eta$ jest prostopadły do prostej l_B , a jego zwrot – od punktu A do prostej l_B . Ten fakt uzasadnia nazwę *przyspieszenie doosiowe* używaną do określenia przyspieszenia $\vec{a}_{A/B}^\eta$. Prosta l_B jest równoległa do osi chwilowego obrotu l i przechodzi przez biegun B (rys. 5.27).

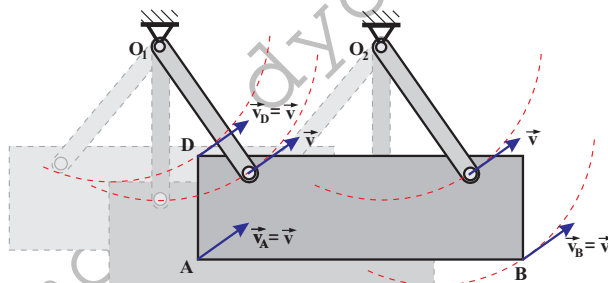
5.3.4 Szczególne przypadki ruchu ciała

Podane w podrozdziałach 5.3.2 i 5.3.3 wzory określające prędkość i przyspieszenie dowolnego punktu ciała sztywnego dotyczą ogólnego przypadku ruchu ciała (rys. 5.29).



Rysunek 5.29: Przykład ciała nieswobodnego (ładunek przenoszony przez żuraw) poruszającego się ruchem ogólnym

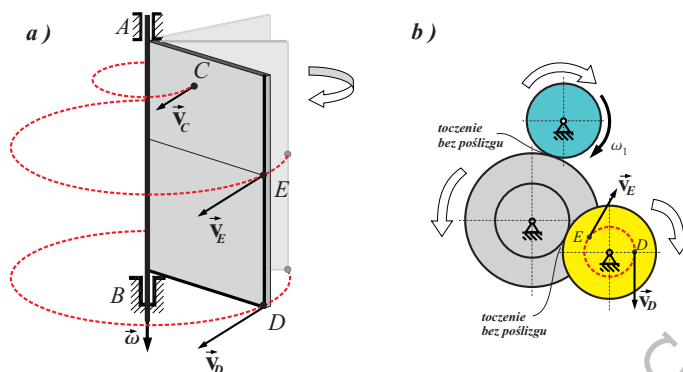
Często zachodzi konieczność analizowania ruchu ciała, na którego ruch nałożone są ograniczenia (więzy). Przy ograniczonej swobodzie ruch ciała można zakwalifikować do jednego z wymienionych niżej szczególnych przypadków ruchu. Przykłady tych szczególnych przypadków ruchu ciała są pokazane na rysunkach 5.30 – 5.34.



Rysunek 5.30: Przykład ciała poruszającego się ruchem postępowym – prostokątna płyta (i ciała poruszających się ruchem obrotowym – pręty)

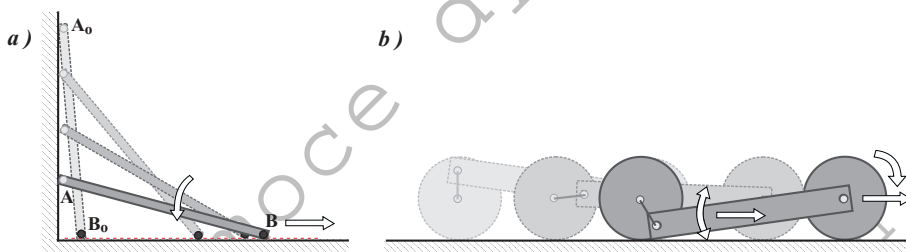
Ruch postępowy ciała to takich ruch, w którym każda prosta należąca do ciała pozostaje w czasie ruchu równoległa do jej położenia początkowego. W ruchu postępowym wszystkie punkty ciała poruszają się po wzajemnie równoległych torach (rys. 5.30). Tory te mogą być prostoliniowe lub krzywoliniowe – płaskie i przestrzenne.

Ruchem obrotowym ciała nazywa się taki ruch, w którym wszystkie punktu ciała poruszają się po okręgach o środkach leżących na jednej prostej, prostopadłej do płaszczyzny okręgów i zwanej osią obrotu (rys. 5.31). Punkty leżące na osi obrotu pozostają nieruchome – oś obrotu jest nieruchoma. (W szczególnym przypadku płaskiego ciała poruszającego się ruchem obrotowym wokół osi prostopadłej do ciała tor wszystkich punktów są okręgami o wspólnym środku).



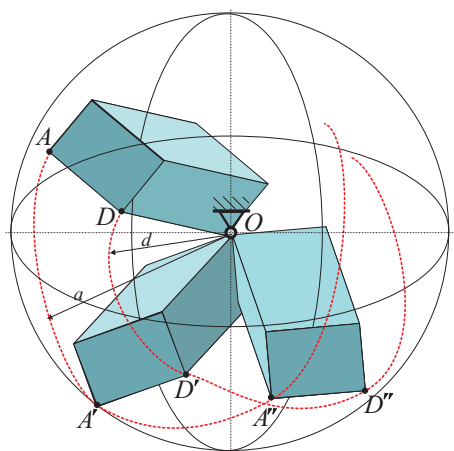
Rysunek 5.31: Przykłady ciał poruszających się ruchem obrotowym

Ruch płaski ciała jest to ruch, w którym każdy punkt należący do ciała pozostaje w czasie ruchu w płaszczyźnie równoległej do pewnej stałej płaszczyzny, zwanej płaszczyzną kierującą (rys. 5.32). W ruchu płaskim wszystkie punktu ciała poruszają się po torach leżących w płaszczyznach wzajemnie równoległych.



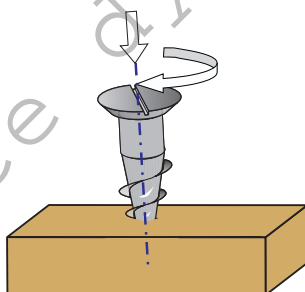
Rysunek 5.32: Przykłady ciał poruszających się ruchem płaskim

Ruchem kulistym nazywa się ruch ciała, którego jeden punkt pozostaje nieruchomy. Nieruchomy punkt ciała jest nazywany środkiem ruchu kulistego. Torami punktów ciała poruszającego się ruchem kulisty są krzywe przestrzenne leżące na powierzchniach kul o wspólnym środku pokrywającym się ze środkiem ruchu kulistego (rys. 5.33).



Rysunek 5.33: Przykład ciała poruszającego się ruchem kulistym (ciało o unieruchomionym jednym punkcie)

Ruch śrubowy ciała polega na jednocześnie odbywających się ruchach: obrotowym wokół osi poruszającej ruchem postępowym wzdłuż prostej o kierunku osi (rys. 5.34). Torami punktów ciała leżących na osi są proste pokrywające się z osią, a torami punktów nie leżących na osi są krzywe przestrzenne (linie śrubowe) charakteryzujące się stałą odległością od osi. Wszystkie punkty leżące na osi mają prędkości o jednakowym kierunku (wzdłuż osi) i jednakowej wartości.



Rysunek 5.34: Przykład ciała poruszającego się ruchem śrubowym (wkręcana śruba)

Poszczególne rodzaje ruchu ciała sztywnego można scharakteryzować na podstawie kierunków wektorów prędkości i przyspieszenia (\vec{v}_B , \vec{a}_B) wybranego punktu ciała (bieguna B) oraz prędkości kątowej i przyspieszenia kątowego

ciała ($\vec{\omega}$, $\vec{\varepsilon}$). Szczególne przypadki ruchu ciała sztywnego oraz odpowiadające tym przypadkom wzory, służące do wyznaczania prędkości i przyspieszenia punktów ciała, podane są poniżej:

- **ruch postępowy** – jeśli $\vec{\omega} = \vec{0}$ (i $\vec{\varepsilon} = \vec{0}$)

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B, \quad \vec{a}_A = \vec{a}_B, \quad (5.108)$$

przy czym jako biegun (B) można obrać dowolny punkt ciała;

- **ruch kulisty** – dla $\vec{v}_B = \vec{0}$ (i $\vec{a}_B = \vec{0}$)

$$\vec{v}_A = \vec{\omega} \times \vec{r}_{BA}, \quad (5.109)$$

$$\vec{a}_A = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}_{BA} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{BA}), \quad (5.110)$$

gdzie jako biegun (B) został przyjęty nieruchomy punkt ciała (środek ruchu kulistego);

- **ruch płaski** – przy $\vec{\omega}^o = \text{const}$, $\vec{\omega} \perp \vec{v}_A$, $\vec{\varepsilon} \parallel \vec{\omega}$

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{\omega} \times \vec{r}_{BA}, \quad (5.111)$$

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{\varepsilon} \times \vec{r}_{BA} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{BA}), \quad (5.112)$$

w którym jako biegun (B) można przyjąć dowolny punkt ciała;

- **ruch obrotowy** – dla $\vec{v}_B = \vec{0}$ (i $\vec{a}_B = \vec{0}$) oraz $\vec{\omega}^o = \text{const}$

$$\vec{v}_A = \vec{\omega} \times \vec{r}_{BA}, \quad (5.113)$$

$$\vec{a}_A = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}_{BA} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{BA}), \quad (5.114)$$

przy czym jako biegun (B) został przyjęty nieruchomy punkt ciała (punkt leżący na osi obrotu);

- **ruch śrubowy** – jeśli $\vec{\omega} \parallel \vec{v}_B$

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{\omega} \times \vec{r}_{BA}, \quad (5.115)$$

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{\varepsilon} \times \vec{r}_{BA} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{BA}), \quad (5.116)$$

gdzie biegunem (B) jest punkt leżący na osi chwilowego obrotu (kierunek wektora prędkości tego punktu pokrywa się z kierunkiem osi chwilowego obrotu).

Ruch obrotowy ciała sztywnego

Szczegółowa analiza ruchu ciała wydaje się łatwiejsza w przypadku, gdy zależności wektorowe są zastąpione przez wielkości skalarne. Można tego dokonać dla niektórych szczególnych przypadków ruchu ciała sztywnego – w szczególności dla ciała poruszającego się ruchem obrotowym.

Jak zaznaczono wcześniej wektory prędkości kątowej $\vec{\omega}$ i przyspieszenia kątowego $\vec{\varepsilon}$, ciała o ruchu obrotowym, mają zawsze stały kierunek – pokrywający się z kierunkiem osi obrotu. Poza tym zależności określające prędkość i przyspieszenie punktu takiego ciała (5.131) oraz (5.114) wynikają z przyjęcia za biegun (B) punktu leżącego na osi obrotu. Oznacza to, że $\vec{v}_B = \vec{0}$, $\vec{a}_B = \vec{0}$, natomiast

$$\vec{v}_A = \vec{\omega} \times \vec{r}_{BA}, \quad (5.117)$$

$$\vec{a}_A = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}_{BA} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{BA}). \quad (5.118)$$

Wygodnie jest wprowadzić jeszcze dodatkowe oznaczenia dla przyspieszenia:

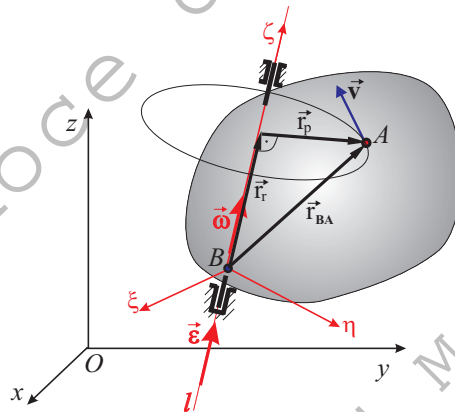
$$\vec{a}_A^r = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}_{BA}, \quad \vec{a}_A^n = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{BA}), \quad (5.119)$$

przy czym \vec{a}_A^r jest składową styczną, a \vec{a}_A^n składową normalną do toru.

Wektor \vec{r}_{BA} zostanie przedstawiony w postaci sumy wektorów \vec{r}_r i \vec{r}_p

$$\vec{r}_{BA} = \vec{r}_r + \vec{r}_p, \quad (5.120)$$

gdzie \vec{r}_r jest wektorem równoległym do $\vec{\omega}$ (i do $\vec{\varepsilon}$), a \vec{r}_p prostopadłym do $\vec{\omega}$ oraz $\vec{\varepsilon}$ (rys. 5.35).



Rysunek 5.35: Ciało poruszające się ruchem obrotowym wokół osi l

W takim przypadku iloczyn wektorowy $\vec{\omega} \times \vec{r}_{BA}$ sprowadza się do

$$\vec{\omega} \times \vec{r}_{BA} = \vec{\omega} \times (\vec{r}_r + \vec{r}_p) = \vec{\omega} \times \vec{r}_r + \vec{\omega} \times \vec{r}_p = \vec{\omega} \times \vec{r}_p, \quad (5.121)$$

gdyż $\vec{\omega} \times \vec{r}_r = \vec{0}$ ze względu na równoległość tych wektorów.

Podobnie jak w przypadku iloczynu $\vec{\omega} \times \vec{r}_{BA}$, iloczyn wektorowy $\vec{\varepsilon} \times \vec{r}_{BA}$ prowadzi do zależności

$$\vec{\varepsilon} \times \vec{r}_{BA} = \vec{\varepsilon} \times (\vec{r}_r + \vec{r}_p) = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}_r + \vec{\varepsilon} \times \vec{r}_p = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}_p. \quad (5.122)$$

Wykorzystując podane zależności można określić wartości wektorów \vec{v}_A , \vec{a}_A^τ , \vec{a}_A^η jako:

$$v_A = |\vec{\omega} \times \vec{r}_p| = \omega r_p \sin \frac{\pi}{2} = \omega r, \quad (5.123)$$

$$a_A^\tau = |\vec{\varepsilon} \times \vec{r}_p| = \varepsilon r_p \sin \frac{\pi}{2} = \varepsilon r, \quad (5.124)$$

$$a_A^\eta = |\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_p)| = |\vec{\omega}(\vec{\omega} \cdot \vec{r}_p) - \vec{r}_p(\vec{\omega} \cdot \vec{\omega})| = |0 - \vec{r}_p \omega^2| = \omega^2 r, \quad (5.125)$$

$$a_A = |\vec{a}_A| = \sqrt{(a_A^\tau)^2 + (a_A^\eta)^2} = \sqrt{\varepsilon^2 r^2 + \omega^4 r^2} = r \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \quad (5.126)$$

We wzorach (5.123) – (5.125) wprowadzone zostało skrócone oznaczenie odległości punktu od osi obrotu $r_p \equiv r$.

Tak więc w przypadku ruchu obrotowego ciała wartości wektorów prędkości i przyspieszenia wyznacza się na podstawie prostych wzorów:

$$v_A = \omega r, \quad (5.127)$$

$$a_A^\tau = \varepsilon r, \quad a_A^\eta = \omega^2 r, \quad (5.128)$$

$$a_A = r \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \quad (5.129)$$

Można zatem stwierdzić, że przy analizie kinematyki ruchu obrotowego wystarczy rozpatrywać przekroje prostopadłe do osi obrotu i zawierające interesujące nas punkty.

Należy jeszcze zwrócić uwagę, że wartość wektora przyspieszenia kąowego ciała poruszającego się ruchem obrotowym jest równa

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} \quad (5.130)$$

a wynika jedynie ze zmiany wartości wektora¹² $\vec{\omega}$ (w ruchu obrotowym wektor prędkości kątowej ciała nie zmienia kierunku).

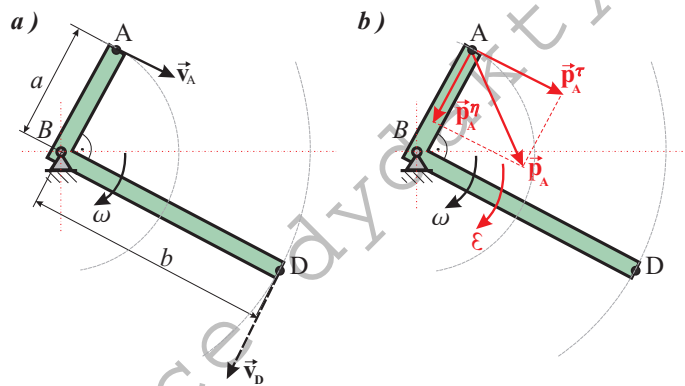
Przy określaniu charakterystyk maszyn czy urządzeń, w których występuje ruch obrotowy, bardzo często spotyka się wielkość nazywaną szybkością obrotową (bądź obrotami) i oznaczaną symbolem n . Wyraża ona wartość prędkości kątowej, z jaką obraca się urządzenie podczas pracy, określoną na ogół w liczbie obrotów w czasie 1 minuty [obr/min]. W takim przypadku prędkość kątowa ciała – wyrażona w [rad/s] – jest określona wzorem

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} . \quad (5.131)$$

PRZYKŁAD 5.3.2

Znając prędkość punktu D , ciała poruszającego się ruchem obrotowym wokół osi przechodzącej przez punkt B , wyznaczyć prędkość i przyspieszenie punktu A . Dane: $c = 1 \text{ m}$, $b = 2 \text{ m}$, $v_D = 3t \text{ [m/s]}$.

ROZWIĄZANIE



Rysunek 5.36: Ruch obrotowy ciała sztywnego - prędkość i przyspieszenie punktu A

Jeśli prędkość punktu D ciała jest znana, to na podstawie zależności (5.127)

$$v_D = \omega r ,$$

¹²Wyznaczając pochodną wektora $\vec{\omega}$ przedstawionego w postaci $\vec{\omega} = \omega \vec{\omega}^o$ otrzymuje się

$$\vec{\epsilon} = \dot{\vec{\omega}} = \dot{\omega} \vec{\omega}^o + \omega \dot{\vec{\omega}}^o = \dot{\omega} \vec{\omega}^o + \vec{0} = \dot{\omega} \vec{\omega}^o ,$$

gdyż wektor jednostkowy $\vec{\omega}^o$, określający kierunek wektora $\vec{\omega}$, nie zmienia się w czasie.

można wyznaczyć prędkość kątową ciała jako

$$\omega = \frac{v_D}{r} = \frac{3t}{b}.$$

Prędkość punktu A jest więc równa

$$v_A = \omega c = \frac{3ct}{b}.$$

Przyspieszenie punktu A wyznaczone na podstawie zależności (5.128) – (5.130) wyraża się następującymi wzorami:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{3t}{b}\right) = \frac{3}{b},$$

$$a_A^r = \varepsilon r = \frac{3}{b}c = \frac{3c}{b},$$

$$a_A^\eta = \omega^2 r = \left(\frac{3t}{b}\right)^2 c = \frac{9ct^2}{b^2},$$

$$a_A = \sqrt{(a_A^r)^2 + (a_A^\eta)^2} = r \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} = \frac{3c}{b} \sqrt{1 + \frac{9t^4}{b^2}} = \frac{3}{2} \sqrt{1 + \frac{9}{4}t^4}.$$

Wektory prędkości i przyspieszenia są narysowane na rys. 5.36. \diamond

Ruch płaski ciała sztywnego

Zależności wykorzystywane przy wyznaczaniu prędkości (5.111) i przyspieszenia (5.112) punktów należących do ciała sztywnego poruszającego się ruchem płaskim wygodnie jest przedstawić w formie:

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{v}_{A/B}, \quad (5.132)$$

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{a}_{A/B}^r + \vec{a}_{A/B}^\eta, \quad (5.133)$$

przy czym:

$$\vec{v}_{A/B} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{BA}, \quad (5.134)$$

$$\vec{a}_{A/B}^r = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}_{BA}, \quad \vec{a}_{A/B}^\eta = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{BA}). \quad (5.135)$$

Przedstawiając wektor \vec{r}_{BA} w postaci sumy wektorów \vec{r}_r i \vec{r}_p

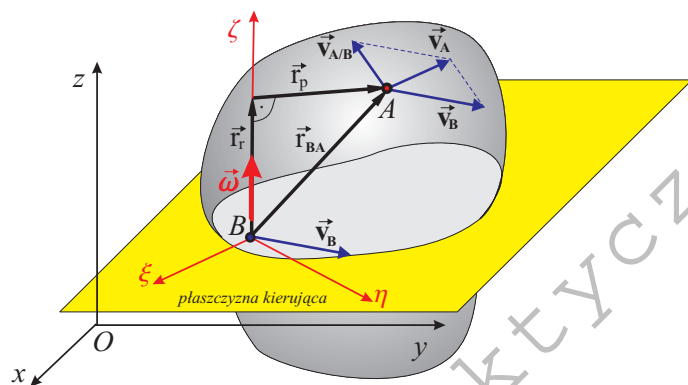
$$\vec{r}_{BA} = \vec{r}_r + \vec{r}_p, \quad (5.136)$$

gdzie \vec{r}_r jest wektorem równoległym do $\vec{\omega}$, a \vec{r}_p prostopadłym do $\vec{\omega}$ (rys. 5.37) otrzymuje się

$$\vec{\omega} \times \vec{r}_{BA} = \vec{\omega} \times (\vec{r}_r + \vec{r}_p) = \vec{\omega} \times \vec{r}_r + \vec{\omega} \times \vec{r}_p = \vec{\omega} \times \vec{r}_p, \quad (5.137)$$

gdyż $\vec{\omega} \times \vec{r}_r = \vec{0}$ ze względu na równoległość tych wektorów. (Analogicznie – dla przyspieszenia kąтового otrzymuje się $\vec{\varepsilon} \times \vec{r}_{BA} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}_p$.)

Wyznaczenie prędkości (rys. 5.37) czy przyspieszenia punktu sprowadza się do określenia wartości i kierunków wektorów składowych, a następnie zsumowania wektorów składowych zgodnie z (5.132) i (5.133).



Rysunek 5.37: Ciało poruszające się ruchem płaskim

Wartości wektorów $\vec{v}_{A/B}$, $\vec{a}_{A/B}^r$ i $\vec{a}_{A/B}^\eta$ są określone zależnościami:

$$v_{A/B} = \omega r, \quad (5.138)$$

$$a_{A/B}^r = \varepsilon r, \quad a_{A/B}^\eta = \omega^2 r, \quad (5.139)$$

gdzie $r = r_p$ oznacza odległość punktu A od prostej przechodzącej przez bieżący punkt B i prostopadłej do płaszczyzny kierującej (to jest długość wektora \vec{r}_p pokazanego na rysunku 5.37).

Ruch płaski ciała sztywnego – metoda chwilowej osi obrotu

W wielu przypadkach wyznaczanie prędkości można znacznie uprościć wybierając za bieżący punkt ciała, którego prędkość chwilowa jest równa zero. Jeśli $\vec{v}_B = \vec{0}$, to wektor prędkości dowolnego punktu ciała wyznacza się z zależności

$$\vec{v}_A = \vec{v}_{A/B} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{BA}, \quad (5.140)$$

a jego wartość jest równa

$$v_A = \omega r, \quad (5.141)$$

przy czym r oznacza odległość punktu A od chwilowej osi obrotu (nazywanej również osią chwilowego obrotu).

Taki sposób wyznaczania prędkości punktu ciała poruszającego się ruchem płaskim jest nazywany *metodą chwilowej osi obrotu* lub *metodą osi chwilowego obrotu* (dość powszechnie funkcjonuje też nazwa *metoda chwilowego środka obrotu*).

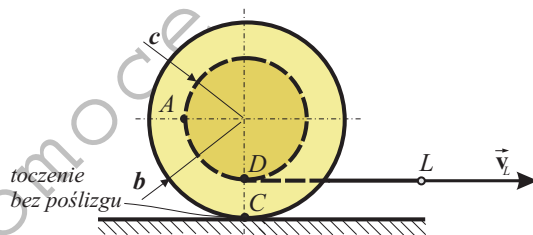
Należy dodać, że taki sposób określania prędkości dotyczy konkretnego położenia ciała – wyznaczona prędkość punktu oznacza jego prędkość w rozpatrywanym położeniu, a nie w dowolnej chwili.

Druga istotna uwaga wiąże się z samym pojęciem osi chwilowego obrotu. Rozumiemy ją jako taką prostą, której wszystkie punkty mają w rozpatrywanym położeniu prędkość równą zero¹³. Oś chwilowego obrotu nie musi być prostą fizycznie należącą do ciała – może to być prosta, która leży poza ciałem, ale jest z nim związana i porusza się razem z rozpatrywanym ciałem.

Dla ciała dwuwymiarowego (płaskiego), poruszającego się ruchem płaskim, r oznacza odległość punktu A od nieruchomego w rozpatrywanym położeniu punktu ciała. Taki nieruchomy punkt jest nazywany *środkiem chwilowego obrotu*; stąd też nazwa *metoda chwilowego środka obrotu*.

PRZYKŁAD 5.3.3

Znając prędkość końca (punktu L) nierozciągliwej liny nawiniętej na szpulkę i wiedząc, że szpulka toczy się bez poślizgu, wyznaczyć prędkość (v_A) i przyspieszenie (a_A) punktu A szpulki – dla położenia pokazanego na rysunku 5.38. (Lina nie ślizga się względem szpulki – może się na nią nawijać lub z niej odwijać). Dane: $c = 2$ [m], $b = 3$ [m], $v_L = 4$ t [m/s].



Rysunek 5.38: Ruch płaski szpulki

¹³Jedynie w ruchu śrubowym ciała punkty leżące na osi chwilowego obrotu mają niezerowe prędkości, a wektory tych prędkości mają kierunek osi chwilowego obrotu.

ROZWIĄZANIE

Wyznaczenie prędkości punktu ciała sztywnego jest możliwe wówczas, gdy znana jest prędkość innego punktu należącego do tego ciała i prędkość kątowna ciała lub, gdy znane są prędkości dwóch punktów ciała.

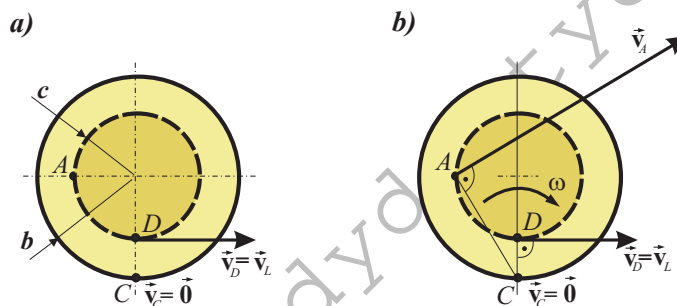
Zadania polegające na określeniu prędkości punktu ciała sztywnego można rozwiązać na kilka sposobów:

- korzystając z twierdzenia o rzucie prędkości na prostą łączącą dwa punkty ciała sztywnego,
- metodą bieguna,
- metodą osi chwilowego obrotu (środka chwilowego obrotu).

W rozpatrywanym przypadku – korzystając z założenia o nierozciągłości liny – można stwierdzić, że znana jest prędkość punktu D szpulki ($\vec{v}_D = \vec{v}_L$).

Prędkość kątowna ciała nie jest zadana.

Istotną informacją jest założenie o braku poślizgu między szpulką a podłożem. Oznacza ono, że prędkości punktów stykających się ciał są jednakowe dla punktów styku. W przypadku nieruchomego podłoża szpulka ma w punkcie styku z podłożem prędkość $\vec{v}_S = \vec{0}$ (rys. 5.39).



Rysunek 5.39: Ruch płaski ciała – wyznaczanie prędkości metodą osi chwilowego obrotu

W przypadku, gdy położenie chwilowej osi obrotu jest znane wyznaczanie prędkości innego punktu ciała **metodą osi chwilowego obrotu** jest najprostsze.

Prędkość punktu D można – na podstawie wzoru (5.138) – wyrazić jako

$$v_D = v_{D/S} = \omega r_{SD} = \omega (b - c) ,$$

gdzie S oznacza nieruchomy punkt ciała – środek chwilowego obrotu (to jest punkt, przez który przechodzi oś chwilowego obrotu). Stąd

$$\omega = \frac{v_D}{(b - c)} = \frac{v_L}{(b - c)} = \frac{4t}{(3 - 2)} = 4t \text{ [1/s]} = 4t \text{ [rad/s]} .$$

Po wyznaczeniu prędkości kątowej ω można określić prędkość punktu A jako

$$v_A = v_{A/S} = \omega r_{SA} = \omega \sqrt{c^2 + b^2} = 4\sqrt{13}t \quad [m/s].$$

Kierunek wektora prędkości \vec{v}_A jest prostopadły do odcinka r_{SA} (rys. 5.39b).

Przy wyznaczaniu przyspieszenia punktu wykorzystuje się zależności o postaci (5.133), to jest

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{a}_{A/B}^\tau + \vec{a}_{A/B}^\eta$$

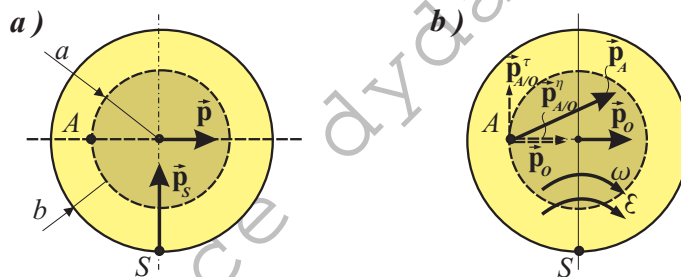
i wzory (5.139), określające długości wektorów $\vec{a}_{A/B}^\tau$ i $\vec{a}_{A/B}^\eta$:

$$a_{A/B}^\tau = \varepsilon r, \quad a_{A/B}^\eta = \omega^2 r,$$

gdzie r oznacza odległość punktu A od prostej przechodzącej przez biegun B i równoległej do chwilowej osi obrotu ciała.

W rozwiązywanym przypadku jako biegun wygodnie jest przyjąć punkt O , gdyż łatwo jest wyznaczyć jego przyspieszenie. Wynika to z faktu, że tor punktu O jest linią prostą (poziomą). Wobec tego składowe wektora przyspieszenia punktu O są równe:

$$a_o^\tau = \frac{dv_o}{dt}, \quad a_o^\eta = \frac{v_o^2}{\rho_o} = \frac{v_o^2}{\infty} = 0,$$



Rysunek 5.40: Ruch płaski ciała – wyznaczanie przyspieszenia punktu

Przed wyznaczeniem przyspieszenia punktu O należy wyznaczyć jego prędkość. Stosując raz jeszcze metodę środka chwilowego obrotu otrzymuje się

$$v_o = v_{o/S} = \omega r_{so} = \omega b = 4tb = 12t \quad [m/s].$$

Stąd

$$a_o = a_o^\tau = \frac{d(12t)}{dt} = 12 \quad [m/s^2].$$

Składowe przyspieszenia punktu A względem bieguna O są odpowiednio równe:

$$\begin{aligned} a_{A/O}^{\tau} &= \varepsilon r_{so} = \varepsilon b = 4b = 12 \quad [m/s^2], \\ a_{A/O}^{\eta} &= \omega^2 r_{so} = \omega^2 b = 4bt = 12t \quad [m/s^2], \end{aligned}$$

gdyż

$$\varepsilon = \frac{\omega}{dt} = \frac{d}{dt}(4t) = 4 \quad [rad/s^2].$$

Ostatnią czynnością jest wyznaczenie długości wektora \vec{a}_A

$$\vec{a}_A = \vec{a}_O + \vec{a}_{A/O}^{\tau} + \vec{a}_{A/O}^{\eta},$$

którą – na podstawie kierunków składowych wektorów przedstawionych na rys. 5.40 – można określić jako

$$a_A = \sqrt{(a_O + a_{A/O}^{\eta})^2 + (a_{A/O}^{\tau})^2}.$$

Po podstawieniu wartości składowych wektora przyspieszenia

$$a_A = \sqrt{(12 + 12t)^2 + (12)^2} = 12\sqrt{(1+t)^2 + 1} \quad [m/s^2]. \quad \diamond$$

5.4 Ruch złożony – ruch punktu względem ruchomego układu odniesienia

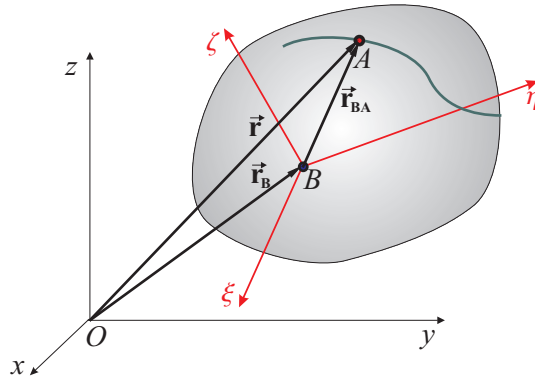
Ruch punktu poruszającego się względem ruchomego układu odniesienia (np. poruszającego się ciała sztywnego) może być analizowany na podstawie równań ruchu punktu określonych w nieruchomym układzie odniesienia. Taki sposób podejścia w wielu przypadkach prowadzi do skomplikowanych zależności określających prędkości i – przede wszystkim – przyspieszenia.

Możliwy jest też inny sposób podejścia, zaproponowany przez francuskiego matematyka G.G de Coriolis'a (1792–1843), który polega na oddzielnej analizie dwóch ruchów, a następnie odpowiednim złożeniu tych ruchów. Jeden z ruchów składowych jest nazywany ruchem unoszenia, a drugi ruchem względnym. Ruch układu odniesienia (albo ciała) jest ruchem unoszenia. Ruch punktu względem układu odniesienia (poruszającego się ciała) jest ruchem względnym. Ściśle rzecz biorąc ruchem unoszenia jest ruch tego punktu ciała, w którym w rozpatrywanej chwili znajduje się wędrujący względem ciała punkt.

Zaletą takiego sposobu podejścia jest oddzielne rozpatrywanie ruchu unoszenia (przy analizie tego ruchu nie interesuje nas ruch względny) i oddzielne rozpatrywanie ruchu względnego (w tym przypadku badany jest jedynie ruch punktu względem układu odniesienia traktowanego tak jak nieruchomy układ).

5.4.1 Prędkość punktu o ruchu złożonym

Rozpatrzmy poruszające się ciało sztywne i związany z nim ruchomy układ odniesienia $\xi\eta\zeta$ (rys. 5.41). Ruch ciała jest określony przez prędkość bieguna B i prędkość kątową $\vec{\omega}$. Względem ciała porusza się punkt A , a jego tor względem ciała jest znany (lub może być określony).



Rysunek 5.41: Opis położenia punktu (A) poruszającego się względem ruchomego ciała sztywnego

Wektor określający położenie punktu A można przedstawić w postaci

$$\vec{r} = \vec{r}_B + \vec{r}_{BA}, \quad (5.142)$$

Bezwzględna prędkość punktu A , to jest prędkość tego punktu względem układu xyz , jest równa pochodnej wektora \vec{r}

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r}_B + \vec{r}_{BA}) = \frac{d\vec{r}_B}{dt} + \frac{d\vec{r}_{BA}}{dt}, \quad (5.143)$$

przy czym

$$\frac{d\vec{r}_B}{dt} = \dot{\vec{r}}_B = \vec{v}_B, \quad (5.144)$$

natomiast

$$\dot{\vec{r}}_{BA} = \frac{d\vec{r}_{BA}}{dt} = \frac{\hat{d}\vec{r}_{BA}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{r}_{BA}. \quad (5.145)$$

Wyrażenie $\frac{\hat{d}\vec{r}_{BA}}{dt}$ we wzorze (5.145) oznacza pochodną lokalną wektora \vec{r}_{BA} , a więc zmianę tego wektora względem układu odniesienia (poruszającego się ciała). Pochodna wektora \vec{r}_{BA} w lokalnym układzie odniesienia określa prędkość

punktu względem tego układu. Taki sposób przedstawienia pochodnej wektora pozwala więc na wydzielenie składnika opisującego ruch punktu względem układu unoszenia. Drugi składnik określa ruch samego układu odniesienia (ruch unoszenia).

Po podstawieniu (5.144), (5.145) do (5.143) i zmianie kolejności składników otrzymuje się

$$\vec{v} = \vec{v}_B + \vec{\omega} \times \vec{r}_{BA} + \frac{d\vec{r}_{BA}}{dt}, \quad (5.146)$$

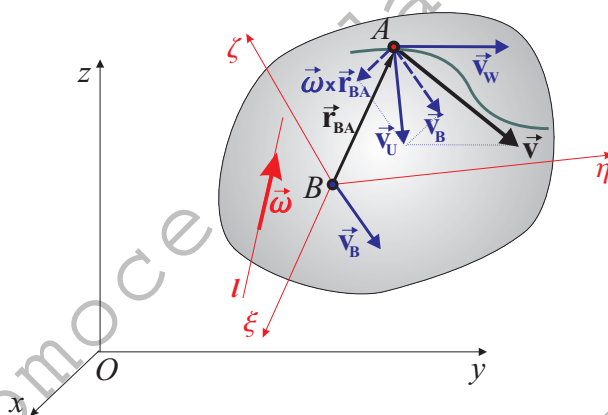
lub – wprowadzając oznaczenia:

$$\vec{v}_U = \vec{v}_B + \vec{\omega} \times \vec{r}_{BA}, \quad \vec{v}_W = \frac{d\vec{r}_{BA}}{dt}, \quad (5.147)$$

dochodzi się do zależności określającej bezwzględną prędkość punktu w postaci

$$\vec{v} = \vec{v}_U + \vec{v}_W. \quad (5.148)$$

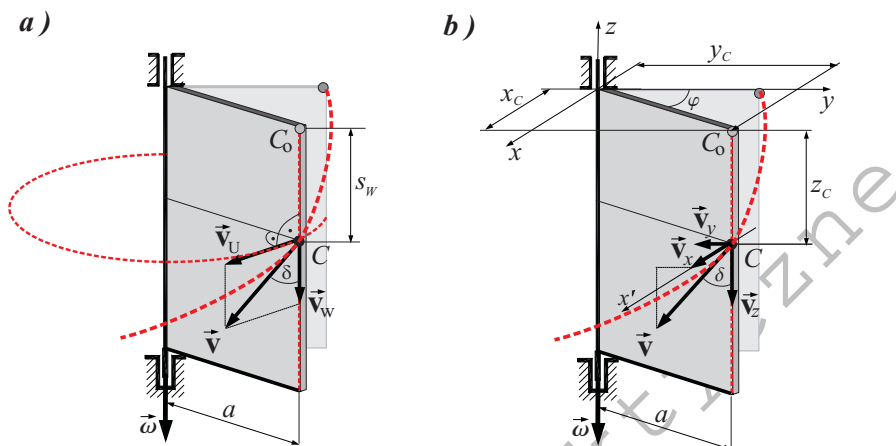
Zatem, przy opisie ruchu punktu względem ruchomego układu odniesienia (np. poruszającego się ciała sztywnego) bezwzględną prędkość tego punktu można wyznaczyć, dodając wektor prędkości unoszenia \vec{v}_U – wynikającej z ruchu układu unoszenia – do wektora prędkości względnej \vec{v}_W , która wynika z ruchu punktu w stosunku do ciała.



Rysunek 5.42: Prędkość punktu (A) poruszającego się względem ruchomego ciała sztywnego (oznaczenia: $\vec{v}_U = \vec{v}_B + \vec{\omega} \times \vec{r}_{BA}$, $\vec{v}_W = \frac{d\vec{r}_{BA}}{dt}$)

PRZYKŁAD 5.4.1

Prostokątna płyta porusza się ruchem obrotowym wokół osi pokrywającej się z jej pionową krawędzią (rys. 5.43). Wzdłuż drugiej pionowej krawędzi porusza się punkt (C) z prędkością względem płyty zadaną w postaci funkcji $v_w = bt$, przy czym $b = 2 \text{ [m/s}^2\text{]}$. Mając daną prędkość kątową płyty $\omega = \omega_0 = 5 \text{ [rad/s]}$ oraz szerokość płyty $c = 1 \text{ [m]}$ wyznaczyć bezwzględną prędkość punktu C i kierunek wektora prędkości \vec{v} .



Rysunek 5.43: Ruch punktu względem płyty – składowe wektora prędkości

ROZWIĄZANIE

Korzystając z zależności (5.148), otrzymanych przy omawianiu ruchu złożonego punktu, prędkość punktu C można określić jako

$$\vec{v} = \vec{v}_u + \vec{v}_w .$$

Wartość prędkości unoszenia \vec{v}_u w rozpatrywanym przykładzie – gdzie ruchem unoszenia jest ruch obrotowy płyty – można wyznaczyć z zależności

$$v_u = \omega r = \omega c = 5 \cdot 1 = 5 \text{ [m/s]} .$$

Prędkość punktu w jego ruchu względem płyty jest zadana ($v_w = bt$).

Na rysunku 5.43a zostały pokazane kierunki wektorów \vec{v}_u i \vec{v}_w oraz ich wypadkowa \vec{v} . Długość wypadkowej prędkości można określić jako

$$v = \sqrt{v_u^2 + v_w^2} ,$$

gdyż wektory \vec{v}_u i \vec{v}_w są do siebie prostopadłe. Zatem

$$v = \sqrt{5^2 + (2t)^2} = \sqrt{25 + 4t^2} \text{ [m/s]} .$$

Kąt δ , jaki tworzy wektor prędkości \vec{v} z krawędzią płyty można określić na podstawie wartości funkcji – np. $\cos \delta$

$$\cos \delta = \frac{v_w}{v} = \frac{2t}{\sqrt{25 + 4t^2}}.$$

Na marginesie rozwiązania tego zadania warto wspomnieć, że ruch rozpatrywanego tu punktu można analizować (i otrzymać identyczne rezultaty), używając równań ruchu punktu. Na przykład w układzie współrzędnych prostokątnych xyz (rys. 5.43b) równania ruchu punktu C mają postać:

$$\begin{cases} x_C = c \sin \varphi, \\ y_C = c \cos \varphi, \\ z_C = -s_w, \end{cases}$$

przy czym: φ – oznacza kąt obrotu płyty w stosunku do jej położenia początkowego (rys. 5.43b), a s_w – drogę punktu względem płyty (rys. 5.43a).

Ponieważ

$$\begin{aligned} \varphi &= \int \omega dt = 5t + c_1, \\ s_w &= \int v_w dt = \int 2t dt = 2 \frac{t^2}{2} = t^2 + c_2, \end{aligned}$$

a stałe c_1 i c_2 , przy przyjęciu położenia początkowego jak na rys. 5.43b ($\varphi(0) = 0$, $s_w = 0$), są równe zero, to

$$\begin{cases} x_C = \sin(5t), \\ y_C = \cos(5t), \\ z_C = -t^2, \end{cases} \quad \text{oraz} \quad \begin{cases} v_x = 5 \cos(5t), \\ v_y = -5 \sin(5t), \\ v_z = -2t. \end{cases}$$

Łatwo sprawdzić, że prędkość punktu C wyznaczona na podstawie składowych v_x , v_y , v_z jest identyczna jak wyznaczona wcześniej

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{[5 \cos(5t)]^2 + [-5 \sin(5t)]^2 + (-2t)^2} = \sqrt{25 + 4t^2}.$$

Kąt δ , jaki tworzy wektor prędkości \vec{v} z krawędzią płyty można określić z zależności

$$\cos \delta = \frac{|v_z|}{v} = \frac{2t}{\sqrt{25 + 4t^2}}. \quad \diamond$$

5.4.2 Przyspieszenie punktu o ruchu złożonym

Zależność (5.148) można przedstawić – po podstawieniu $\vec{v}_U = \vec{v}_B + \vec{\omega} \times \vec{r}_{BA}$ – w postaci

$$\vec{v} = \vec{v}_B + \vec{\omega} \times \vec{r}_{BA} + \vec{v}_W, \quad (5.149)$$

która jest przydatna przy wyprowadzaniu zależności określającej przyspieszenie punktu poruszającego się ruchem złożonym.

Przyspieszenie (\vec{a}) punktu jest pochodną wektora prędkości (\vec{v}). Różniczkując wyrażenie (5.148), to jest $\vec{v} = \vec{v}_U + \vec{v}_W$, otrzymuje się

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}(\vec{v}_U + \vec{v}_W) = \frac{d\vec{v}_U}{dt} + \frac{d\vec{v}_W}{dt} . \quad (5.150)$$

Pochodna wektora prędkości unoszenia jest określona zależnością

$$\frac{d\vec{v}_U}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{v}_B + \vec{\omega} \times \vec{r}_{BA}) = \dot{\vec{v}}_B + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}_{BA} + \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}_{BA} . \quad (5.151)$$

Przedstawiając wektor $\dot{\vec{r}}_{BA}$ za pomocą pochodnej lokalnej – to jest w postaci

$$\dot{\vec{r}}_{BA} = \frac{d\vec{r}_{BA}}{dt} = \hat{d}\vec{r}_{BA} + \vec{\omega} \times \vec{r}_{BA} , \quad (5.152)$$

i wprowadzając oznaczenia $\dot{\vec{v}}_B = \vec{a}_B$ oraz $\dot{\vec{\omega}} = \vec{\varepsilon}$, otrzymuje się

$$\frac{d\vec{v}_U}{dt} = \vec{a}_B + \vec{\varepsilon} \times \vec{r}_{BA} + \vec{\omega} \times \frac{\hat{d}\vec{r}_{BA}}{dt} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{BA}) . \quad (5.153)$$

Jako przyspieszenie unoszenia (\vec{a}_U) przyjmuje się tylko tę część pochodnej $\frac{d\vec{v}_U}{dt}$, która oznacza przyspieszenie wynikające wyłącznie z ruchu układu unoszenia (wywołane ruchem unoszenia), to znaczy

$$\vec{a}_U = \vec{a}_B + \vec{\varepsilon} \times \vec{r}_{BA} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{BA}) . \quad (5.154)$$

(Takie przyspieszenie miałby rozpatrywany punkt, gdyby pozostawał w spoczynku względem układu unoszenia.) Zatem pochodną wektora prędkości unoszenia można zapisać w formie

$$\frac{d\vec{v}_U}{dt} = \vec{a}_U + \vec{\omega} \times \frac{\hat{d}\vec{r}_{BA}}{dt} = \vec{a}_U + \vec{\omega} \times \vec{v}_W , \quad (5.155)$$

gdzie wykorzystane zostało oznaczenie $\frac{\hat{d}\vec{r}_{BA}}{dt} = \vec{v}_W$.

Pochodna wektora prędkości względnej, a więc wektora (\vec{v}_W) określonego w ruchomym układzie odniesienia (związany z poruszającym się ciałem), można zapisać w formie

$$\frac{d\vec{v}_W}{dt} = \frac{\hat{d}\vec{v}_W}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{v}_W = \vec{a}_W + \vec{\omega} \times \vec{v}_W . \quad (5.156)$$

przy czym zostało wprowadzone oznaczenie $\frac{\hat{d}\vec{v}_W}{dt} = \vec{a}_W$. W ten sposób został wyróżniony ten składnik, który określa zmiany wektora prędkości względnej widoczne dla obserwatora poruszającego się razem z układem unoszenia.

Podstawiając (5.155) i (5.156) do (5.150) otrzymuje się

$$\vec{a} = \vec{a}_U + \vec{a}_W + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_W . \quad (5.157)$$

Wprowadzając oznaczenie

$$\vec{a}_C = 2\vec{\omega} \times \vec{v}_W , \quad (5.158)$$

przyspieszenie punktu w ruchu złożonym można określić jako

$$\vec{a} = \vec{a}_U + \vec{a}_W + \vec{a}_C , \quad (5.159)$$

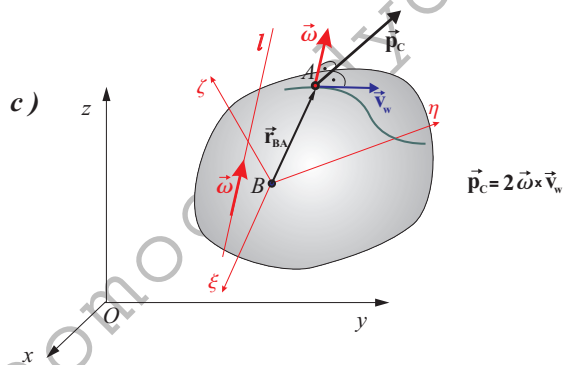
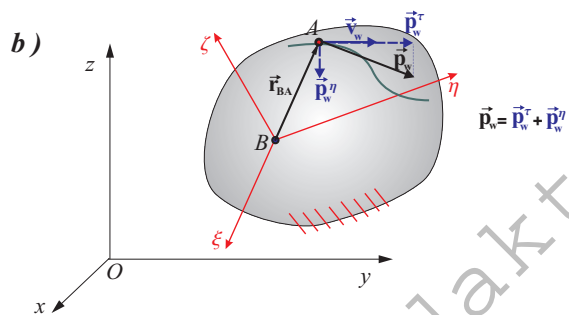
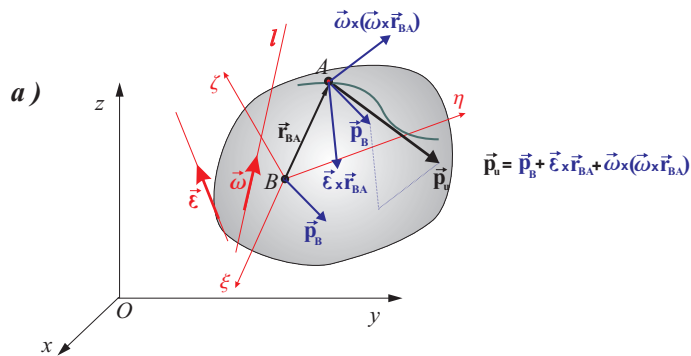
przy czym:

$$\vec{a}_U = \vec{a}_B + \vec{\epsilon} \times \vec{r}_{BA} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{BA}) , \quad (5.160)$$

$$\vec{a}_W = \frac{d\vec{v}_W}{dt} . \quad (5.161)$$

Wielkości oznaczone symbolami \vec{a}_U , \vec{a}_W oznaczające przyspieszenie unoszenia i przyspieszenie względne zostały już pokrótce omówione. Oznaczona jako \vec{a}_C składowa wektora przyspieszenia nazywana jest przyspieszeniem Coriolisa i jest równa podwojonemu iloczynowi wektorów prędkości kątowej układu unoszenia i prędkości względnej punktu ($2\vec{\omega} \times \vec{v}_W$).

Wektory składowe przyspieszenia punktu poruszającego się względem poruszającego się ciała sztywnego (układu unoszenia) są pokazane na rys. 5.44.



Rysunek 5.44: Składowe przyspieszenia punktu (A) poruszającego się względem ruchomego ciała sztywnego: a) przyspieszenie unoszenia, b) przyspieszenie względne i jego składowe, c) przyspieszenie Coriolisa

W obliczeniach wartość wektora \vec{a} , to jest wartość wektora sumy przyspieszeń składowych $\vec{a} = \vec{a}_U + \vec{a}_W + \vec{a}_C$ (rys. 5.45), wyznacza się na podstawie rzutów poszczególnych wektorów lub ich składowych na osie prostokątnego układu współrzędnych $\xi\eta\zeta$. Odpowiednie rzuty wynoszą:

$$a_\xi = (\vec{a}_U^\tau)_\xi + (\vec{a}_U^\eta)_\xi + (\vec{a}_W^\tau)_\xi + (\vec{a}_W^\eta)_\xi + (\vec{a}_C)_\xi, \quad (5.162)$$

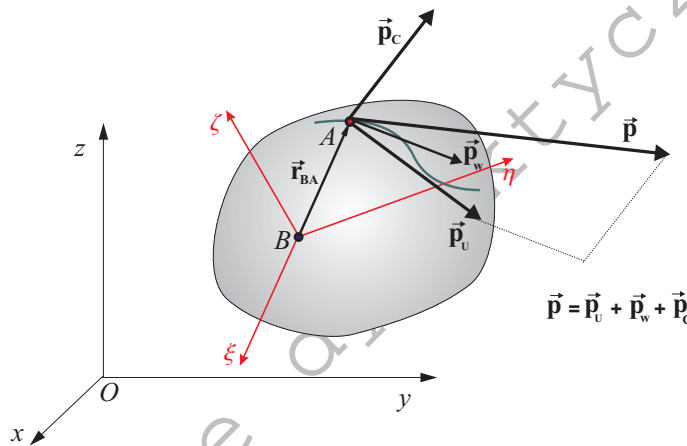
$$a_\eta = (\vec{a}_U^\tau)_\eta + (\vec{a}_U^\eta)_\eta + (\vec{a}_W^\tau)_\eta + (\vec{a}_W^\eta)_\eta + (\vec{a}_C)_\eta, \quad (5.163)$$

$$a_\zeta = (\vec{a}_U^\tau)_\zeta + (\vec{a}_U^\eta)_\zeta + (\vec{a}_W^\tau)_\zeta + (\vec{a}_W^\eta)_\zeta + (\vec{a}_C)_\zeta, \quad (5.164)$$

a długość wektora wypadkowego jest określona jako

$$a = \sqrt{(a_\xi)^2 + (a_\eta)^2 + (a_\zeta)^2}. \quad (5.165)$$

Wartość całkowitego przyspieszenia można też wyznaczyć na podstawie sumy rzutów wektorów składowych na osie nieruchomego układu xyz lub innego, dogodnego układu współrzędnych.



Rysunek 5.45: Przyspieszenie całkowite punktu (A) poruszającego się względem ruchomego ciała sztywnego $\vec{a} = \vec{a}_U + \vec{a}_W + \vec{a}_C$

Na zakończenie tych rozważań warto zwrócić uwagę na różnicę pomiędzy przyspieszeniem unoszenia i pochodną prędkości unoszenia

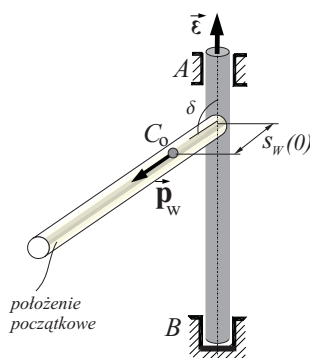
$$\vec{a}_U = \frac{d\vec{v}_U}{dt} - \vec{\omega} \times \vec{v}_W. \quad (5.166)$$

Podobnie – w przypadku przyspieszenia względnego – zachodzi związek

$$\vec{a}_W = \frac{d\vec{v}_W}{dt} - \vec{\omega} \times \vec{v}_W. \quad (5.167)$$

PRZYKŁAD 5.4.2

Punkt A przesuwa się wewnątrz rurki, która obraca się wokół pionowej osi (rys. 5.46). Kąt δ , jaki tworzy rurka z osią obrotu układu jest równy $\delta = \frac{2}{3}\pi$. Mając dane przyspieszenie kątowe rurki $\varepsilon = \varepsilon_0 = 2 \text{ [rad/s}^2\text{]}$ i jej początkową prędkość $\omega(0) = 3 \text{ [rad/s]}$ oraz przyspieszenie punktu względem rurki $a_w^\tau = 3 \text{ [m/s}^2\text{]}$, początkową prędkość względną $v_w(0) = 2 \text{ [m/s]}$ i początkowe położenie punktu $s_w(0) = 0,2 \text{ [m]}$ względem rurki, wyznaczyć bezwzględne przyspieszenie punktu A.



Rysunek 5.46: Ruch złożony punktu względem obracającego się ciała

ROZWIĄZANIE

Całkowite przyspieszenie punktu poruszającego się względem ciała – zgodnie z (5.159) – można wyznaczyć z zależności

$$\vec{a} = \vec{a}_u + \vec{a}_w + \vec{a}_c$$

lub – bardziej szczegółowo – jako

$$\vec{a} = \vec{a}_u^\tau + \vec{a}_u^\eta + \vec{a}_w^\tau + \vec{a}_w^\eta + \vec{a}_c .$$

Spośród składowych występujących w tym wzorze zadane jest przyspieszenie względne, przy czym $a_w^\tau = 3 \text{ [m/s}^2\text{]}$ ($a_w^\eta = 0$ – gdyż torem punktu w ruchu względem rurki jest prosta). Na podstawie przyspieszenia a_w^τ można wyznaczyć prędkość względną v_w , a następnie drogę przebytą przez kulkę w ruchu względnym s_w (te wielkości będą wykorzystywane przy wyznaczaniu przyspieszenia unoszenia i przyspieszenia Coriolisa):

$$v_w = \int a_w^\tau dt = \int 2 dt = t + c_1 ,$$

Po podstawieniu $t = 0$ i $v_w(0) = 2$ można wyznaczyć stałą c_1

$$2 = 0 + c_1 \implies c_1 = 2 ,$$

stąd

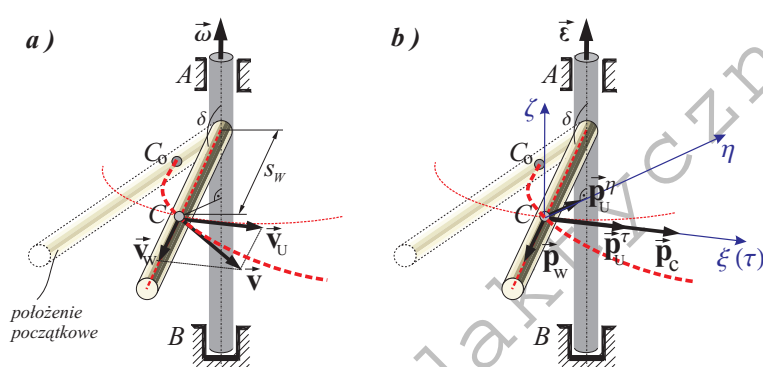
$$v_w = t + 2,$$

$$s_w = \int v_w dt = \int (t + 2) dt = \frac{t^2}{2} + 2t + c_2.$$

Korzystając z warunku dla $t = 0$ $s_w(0) = 0,2$ otrzymuje się

$$0,2 = 0 + 0 + c_2 \implies c_2 = 0,2,$$

$$s_w = \frac{t^2}{2} + 2t + 0,2.$$



Rysunek 5.47: Ruch złożony punktu C – składowe wektora prędkości i wektora przyspieszenia

Przyspieszenie unoszenia jest przyspieszeniem wynikającym z ruchu obrotowego rurki, zatem

$$a_U^r = \varepsilon r, \quad a_U^\eta = \omega^2 r,$$

przy czym wielkości r i ω określają zależności:

$$r = s_w \sin(\pi - \delta) = s_w \sin \delta = \left(\frac{t^2}{2} + 2t + 0,2\right) \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\omega = \int \varepsilon dt = \int 2 dt = t + c_3,$$

a stałą c_3 wyznacza się z warunku $\omega(0) = 3$

$$3 = 0 + c_3, \implies c_3 = 3, \implies \omega = t + 3.$$

Po podstawieniu:

$$a_u^\tau = \varepsilon r = 2 \left(\frac{t^2}{2} + 2t + 0, 2 \right) \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$a_u^\eta = \omega^2 r = (t + 3)^2 \left(\frac{t^2}{2} + 2t + 0, 2 \right) \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Przyspieszenie Coriolisa – określone wzorem (5.158) jako $\vec{a}_C = 2 \vec{\omega} \times \vec{v}_w$ – ma wartość

$$a_C = 2 \omega v_w \sin(\angle(\vec{\omega}, \vec{v}_w)) = 2(t + 3)(t + 2) \sin \delta = 2(t + 3)(t + 2) \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Na rysunku 5.47a zostały pokazane kierunki wektorów \vec{v}_u i \vec{v}_w oraz ich wypadkowa \vec{v} . Składowe wektora przyspieszenia są przedstawione obok. Kierunki pokazanych wektorów nie ulegają zmianie w ruchomym układzie odniesienia $\xi\eta\zeta$ (rys. 5.47b), który jest związany z punktem C i obraca się razem z układem unoszenia.

Wartość całkowitego przyspieszenia punktu A można wyznaczyć na podstawie sumy rzutów wektorów składowych na trzy wzajemnie prostopadłe osie $\xi\eta\zeta$. Odpowiednie rzuty wynoszą:

$$a_\xi = (\vec{a}_u^\tau)_\xi + (\vec{a}_u^\eta)_\xi + (\vec{a}_w^\tau)_\xi + (\vec{a}_C)_\xi = a_u^\tau + a_C,$$

$$a_\eta = (\vec{a}_u^\tau)_\eta + (\vec{a}_u^\eta)_\eta + (\vec{a}_w^\tau)_\eta + (\vec{a}_C)_\eta = a_u^\eta - a_w \cos(\delta - \frac{\pi}{2}),$$

$$a_\zeta = (\vec{a}_u^\tau)_\zeta + (\vec{a}_u^\eta)_\zeta + (\vec{a}_w^\tau)_\zeta + (\vec{a}_C)_\zeta = a_w \cos \delta,$$

a ich wypadkowa jest określona jako

$$a = \sqrt{(a_\xi)^2 + (a_\eta)^2 + (a_\zeta)^2} =$$

$$= \sqrt{(a_u^\tau + a_C)^2 + (a_u^\eta - a_w \cos(\delta - \frac{\pi}{2}))^2 + (a_w \cos \delta)^2}. \quad \diamond$$

Pomoce dydaktyczne

Katedra Dynamiki Maszyn

Rozdział 6

DYNAMIKA PUNKTU MATERIALNEGO

6.1 Dynamika swobodnego punktu materialnego

Swobodnym punktem materialnym nazywa się ciało o nieskończenie małych rozmiarach, posiadające stałą masę i niczym nie ograniczoną możliwość ruchu.

Ruch swobodnego punktu materialnego jest zależny od sił (\vec{F}_i) działających na ten punkt. Zgodnie z II prawem Newtona zależność opisująca ruch takiego ciała ma postać

$$m\vec{a} = \vec{F}, \quad (6.1)$$

gdzie:

m – masa punktu materialnego,

\vec{a} – przyspieszenie punktu,

\vec{F} – wypadkowa sił czynnych (aktywnych),

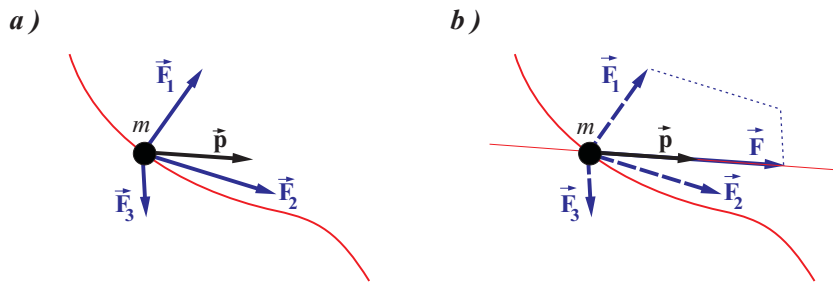
przy czym

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i, \quad (6.2)$$

(n jest liczbą sił działających na punkt materialny).

Równania dynamiki swobodnego punktu materialnego można przedstawić w postaci skalarnej jako:

$$m a_x = F_x, \quad m a_y = F_y, \quad m a_z = F_z, \quad (6.3)$$



Rysunek 6.1: Siły \vec{F}_i , ($i = 1, 2, 3$) działające na swobodny punkt materialny (a) oraz ich wypadkowa \vec{F} i przyspieszenie punktu \vec{a} (b)

przy czym p_x, p_y, p_z oznaczają rzuty wektora przyspieszenia punktu na osie x, y, z (nierównoległe i nie leżące w jednej płaszczyźnie), a F_x, F_y, F_z są rzutami – na te same osie – wypadkowej sił zewnętrznych. W układzie współrzędnych naturalnych $(\tau\eta\theta)$ równania dynamiki (6.1) mają postać:

$$\boxed{m a_\tau = F_\tau}, \quad \boxed{m a_\eta = F_\eta}, \quad \boxed{0 = F_\theta}, \quad (6.4)$$

gdzie F_θ oznacza rzut wypadkowej sił na oś binormalną θ (o kierunku prostopadłym do płaszczyzny $\tau\eta$).

PRZYKŁAD 6.1.1

Określić, z jakimi prędkościami będą spadać z jednakowej wysokości dwa ciała o tych samych kształtach i wymiarach, ale różniące się masą. Przyjąć, że opór powietrza jest: a) stały ($F = F_o = \text{const}$), b) liniowo zależny od prędkości ($F = -c v$). Dane: $m_1 = 1 \text{ kg}$; $m_2 = 2 \text{ kg}$; $g = 9,81 \text{ m/s}^2$; $F_o = 2 \text{ N}$; $c = 1 \text{ Ns/m}$.

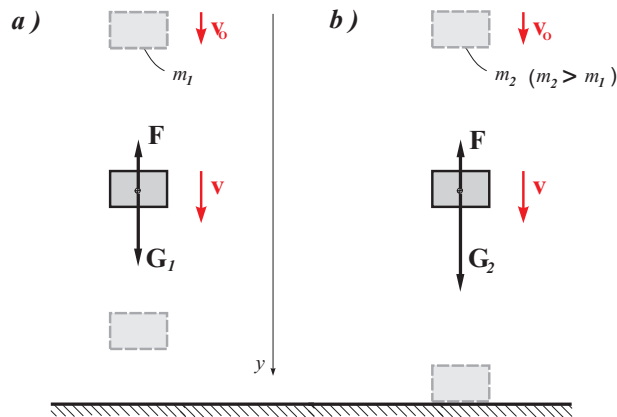
ROZWIĄZANIE

Siły działające na spadające ciała są pokazane na rys. 6.2. Ze względu na różną masę ($m_2 > m_1$) na ciała działają siły ciężkości o różnych wartościach ($G_2 > G_1$). Siły oporu powietrza mają jednakowe wartości, ponieważ kształt i wymiary obu ciał są identyczne. Ruch ciał może być rozpatrywany przy założeniu, że modelem każdego z ciał jest punkt materialny.

Równania dynamiki (ciała są dalej traktowane jako punkty materialne) można zapisać w formie:

$$m_1 a_1 = G_1 - F, \quad m_2 a_2 = G_2 - F.$$

Przyjmując, że opór powietrza jest stały ($F = F_o$) i zastępując ciężar iloczynem masy i przyspieszenia ziemskiego, dla ciała i ($i = 1, 2$) otrzymuje się równania



Rysunek 6.2: Siły działające na ciała podczas ich spadania

o postaci

$$m_i a_i = m_i g - F_o \quad \text{lub} \quad m_i \frac{dv_i}{dt} = m_i g - F_o .$$

Wyznaczenie prędkości $v_i(t)$ na podstawie jej pochodnej, w tym przypadku, nie jest kłopotliwe¹

$$v_i(t) = \frac{m_i g - F_o}{m_i} t + c_1 .$$

Po wyznaczeniu stałej $c_1 = v_o$ (z warunku $v(t=0) = v_o$) można podać rozwiązanie dla każdego z punktów materialnych jako

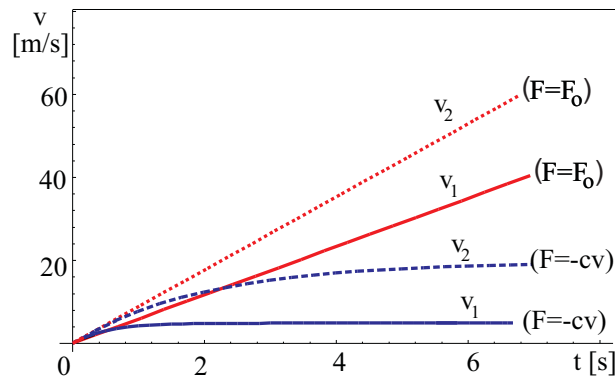
$$v_1(t) = \left(g - \frac{F_o}{m_1}\right)t + v_o \quad \text{oraz} \quad v_2(t) = \left(g - \frac{F_o}{m_2}\right)t + v_o .$$

Otrzymane rozwiązanie wskazuje na liniową zmianę prędkości spadania w przypadku, gdy opór powietrza przyjęty jest jako wielkość stała ($F = F_o$). Na rysunku 6.3 jest pokazany przebieg zmian prędkości każdego z ciał. (Ciało o większej masie spada z większą prędkością. Można to łatwo zweryfikować samodzielnie przeprowadzając eksperyment.)

Równania dynamiki w przypadku, gdy siła oporu powietrza jest zależna od prędkości ($F = -c v$) mają postać

$$m_i \frac{dv_i}{dt} = G_i - c v_i .$$

¹Działanie odwrotne do różniczkowania – polegające na wyznaczaniu funkcji na podstawie jej pochodnej – nazywa się całkowaniem ($v = \int a dt$).



Rysunek 6.3: Prędkości ciał podczas spadania (dla oporu powietrza $F = F_0$ oraz $F = -c v$)

Rozwiązanie takiego równania różniczkowego jest bardziej skomplikowane niż dla stałej siły oporu. Rozwiązaniem jest funkcja

$$v_i(t) = \frac{m_i g}{c} + \left(v_0 - \frac{m_i g}{c}\right) e^{-\frac{c t}{m_i}}$$

(Podany rezultat można sprawdzić poprzez podstawienie tej funkcji do równania dynamiki.)

Przebiegi zmian prędkości każdego z ciał zostały porównane z wynikami uzyskanymi przy założeniu stałego oporu powietrza (rys. 6.3). \diamond

6.1.1 Pojęcie siły bezwładności

Równanie (6.1) można przedstawić w takiej postaci, w jakiej były przedstawiane równania równowagi punktu, to znaczy z zerem po jednej stronie znaku równości

$$\vec{F} - m\vec{a} = \vec{0} . \quad (6.5)$$

Wprowadzając oznaczenie

$$\vec{F}_b = -m\vec{a} , \quad (6.6)$$

równanie dynamiki punktu można przedstawić w formie²

$$\vec{F} + \vec{F}_b = \vec{0} . \quad (6.7)$$

²Równanie dynamiki punktu o postaci (6.7) bywa błędnie – nazywane *zasadą d'Alemberta*. (Zasada podana przez J. R. d'Alemberta (1717–1783) jest ogólnym sformułowaniem praw dynamiki układu punktów materialnych. Jest zasadą wariacyjną, to znaczy, że jej podstawą jest rachunek wariacyjny.)

Wielkość $\vec{F}_b = -m\vec{a}$ ma wymiar siły i z tego powodu jest nazywana *siłą bezwładności*³.

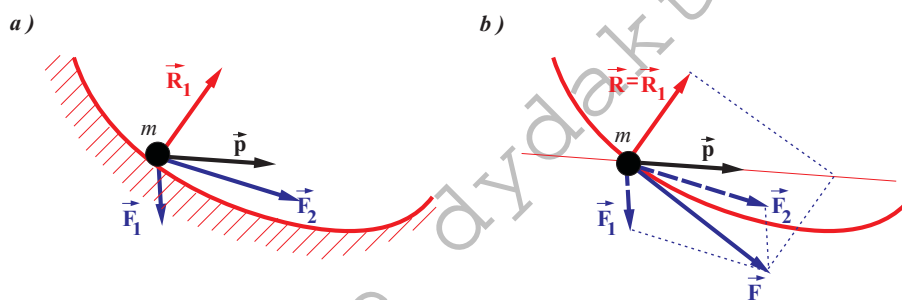
Równanie dynamiki o postaci równania równowagi (6.7) bywa nazywane "równaniem równowagi dynamicznej" lub "dynamicznym równaniem równowagi".

6.2 Dynamika nieswobodnego punktu materialnego

Nieswobodnym punktem materialnym nazywa się taki punkt materialny, na którego ruch nałożone są ograniczenia (więzy).

Przy analizie ruchu nieswobodnego punktu materialnego konieczne jest uwzględnienie oddziaływania więzów. Jednym ze sposobów uwzględnienia wpływu więzów na ruch punktu jest wprowadzenie sił reakcji więzów⁴. Siły reakcji są nazywane siłami zewnętrznymi biernymi (lub pasywnymi).

Na rysunku 6.4 jest pokazany punkt materialny obciążony siłami zewnętrznymi czynnymi (\vec{F}_1 i \vec{F}_2) ślizgający się po gładkiej nieruchomej powierzchni. Oddziaływanie powierzchni jest zastąpione siłą reakcji \vec{R}_1 – jej działanie wymusza ruch po krzywej leżącej na powierzchni.



Rysunek 6.4: Punkt materialny (nieswobodny) poruszający się po gładkiej powierzchni (a) oraz reakcja \vec{R}_j , ($j = 1$) i przyspieszenie punktu \vec{a} (b)

Jeśli działanie więzów jest odwzorowane poprzez siły reakcji więzów, to równanie dynamiki punktu nieswobodnego można przedstawić w postaci

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{R}, \quad (6.8)$$

gdzie:

³W niektórych opracowaniach siła bezwładności występuje pod nazwą *siła d'Alemberta*.

⁴Innym sposobem opisu ograniczenia ruchu spowodowanego przez więzy jest określenie *równań więzów*, to jest zależności pomiędzy współrzędnymi opisującymi położenie punktu.

m – masa punktu,

\vec{a} – przyspieszenie punktu,

\vec{F} – wypadkowa sił zewnętrznych czynnych (aktywnych),

\vec{R} – wypadkowa sił reakcji (sił zewnętrznych biernych) .

Zakładając, że na punkt materialny działa n sił czynnych i r sił reakcji, wypadkowe tych sił wyznacza się sumując odpowiednie siły:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i, \quad \vec{R} = \sum_{j=1}^r \vec{R}_j. \quad (6.9)$$

Skalarna postać równań dynamiki nieswobodnego punktu materialnego:

$$m a_x = F_x + R_x, \quad m a_y = F_y + R_y, \quad m a_z = F_z + R_z. \quad (6.10)$$

W układzie współrzędnych naturalnych $(\tau\eta\eta_b)$ równania dynamiki (6.8) mają formę:

$$m a_\tau = F_\tau + R_\tau, \quad m a_\eta = F_\eta + R_\eta, \quad 0 = F_b + R_b. \quad (6.11)$$

Po wprowadzeniu oznaczenia $\vec{P} = \vec{F} + \vec{R}$ równanie dynamiki nieswobodnego punktu materialnego można przedstawić jako

$$m\vec{a} = \vec{P}. \quad (6.12)$$

PRZYKŁAD 6.2.1

Punkt materialny o masie m jest połączony lekką nicią o długości l z nieruchomą podporą i porusza się pod wpływem siły ciężkości w pionowej płaszczyźnie (taki układ nosi nazwę *wahadła matematyczne*). Podać równania opisujące ruch takiego nieswobodnego punktu materialnego.

ROZWIĄZANIE

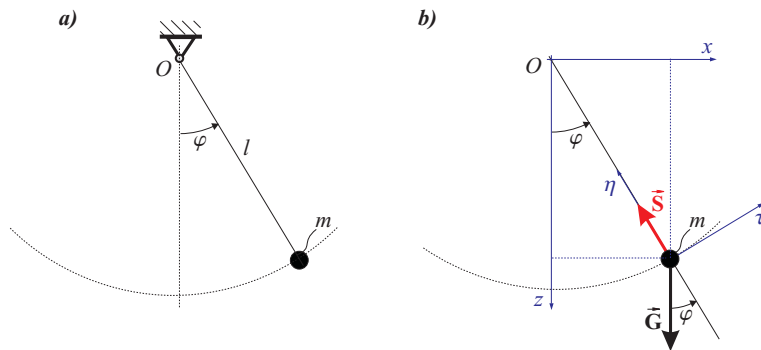
Rozwiązywanie rozpoczynamy od uwolnienia punktu materialnego od więzów i wprowadzenia ich reakcji. Siły działające na oswobodzony od więzów punkt materialny są pokazane na rys. 6.5b.

Kolejnym krokiem jest zastosowanie równań dynamiki dla rozpatrywanego układu. Zostaną tu przedstawione trzy wersje równań – wynikające z zależności (6.8), (6.10) i (6.11).

- 1) W postaci wektorowej (6.8) równanie dynamiki dla wahadła matematycznego ma formę

$$m\vec{a} = \vec{G} + \vec{S},$$

przy czym siła ciężkości jest określona jako $\vec{G} = m\vec{g}$ (\vec{g} oznacza wektor przyspieszenia ziemskiego).



Rysunek 6.5: Wahadło matematyczne – punkt materialny zawieszony na lekkiej nici

Równania zapisane w postaci wektorowej są bardzo przydatne w opisie teoretycznym, ale mają ograniczone znaczenie praktyczne. Przyczyną jest brak informacji na temat kierunków wektorów w równaniach wektorowych. (Rozwiązanie zadania dynamiki – polegające na wyznaczeniu prędkości i/lub współrzędnych położenia punktu – można uzyskać analizując równania dynamiki w postaci skalarnej.)

- 2) Równanie dynamiki dla wahadła matematycznego w postaci skalarnej (6.10) – to jest w postaci rzutów na nieruchome osie x i z (rys. 6.5b) – są następujące:

$$ma_x = -S \sin \varphi, \quad ma_z = -S \cos \varphi + G.$$

Analiza ruchu na podstawie równań w takiej formie sprowadza się do rozwiązania układu dwóch równań różniczkowych drugiego rzędu zmiennej t i jednego równania algebraicznego:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -S \frac{x}{l}, \quad m \frac{d^2 z}{dt^2} = -S \frac{z}{l} + G, \quad x^2 + z^2 = l^2.$$

Równania te uzyskano przez podstawienie: $a_x = \frac{d^2 x}{dt^2}$, $a_y = \frac{d^2 y}{dt^2}$, $\sin \varphi = x/l$, $\cos \varphi = z/l$. Trzecie równanie określające związek pomiędzy współrzędnymi x i z jest niezbędne, gdyż w rozpatrywanych tu równaniach dynamiki występują trzy zależne od czasu niewiadome: $x(t)$, $z(t)$, $S(t)$. Rozwiązanie można wyznaczyć jedynie na drodze numerycznej (rozwiązanie tych równań w dziedzinie funkcji elementarnych nie istnieje).

- 3) Równanie dynamiki w postaci skalarnej (6.11), to jest rzuty na osie τ i η

(rys. 6.5b) prowadzą do zależności:

$$ma_\tau = -G \sin \varphi, \quad ma_\eta = S - G \cos \varphi.$$

Stosując podstawienia: $a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt}$, $\frac{d\varphi}{dt} = \omega = \frac{v}{l}$, $a_\eta = \frac{v^2}{\rho} = \frac{v^2}{l}$, otrzymuje się:

$$m \frac{v}{l} \frac{dv}{d\varphi} = -G \sin \varphi, \quad m \frac{v^2}{l} = S - G \cos \varphi.$$

Dzięki takim przekształceniom otrzymano jedno równanie różniczkowe pierwszego rzędu zmiennej φ i jedno równanie algebraiczne. Niewiadomymi są w tym przypadku: $v(\varphi)$, $S(\varphi)$. Wielkości te można bez większych problemów wyznaczyć w postaci jawnej.

- 4) Równania dynamiki w postaci równania równowagi (6.7) – po rzutowaniu na osie τ i η – mają postać:

$$-G \sin \varphi + (F_b)_\tau = 0, \quad S - G \cos \varphi + (F_b)_\eta = 0.$$

Tak przedstawione równania różnią się od poprzednich jedynie formą zapisu. Po podstawieniu:

$$(F_b)_\tau = -m a_\tau = -m \frac{v}{l} \frac{dv}{d\varphi}, \quad (F_b)_\eta = -m a_\eta = -m \frac{v^2}{l},$$

otrzymuje się:

$$-G \sin \varphi - m \frac{v}{l} \frac{dv}{d\varphi} = 0, \quad S - G \cos \varphi - m \frac{v^2}{l} = 0. \quad \diamond$$

6.3 Energia kinetyczna punktu materialnego

Energia kinetyczna punktu materialnego o masie m i prędkości \vec{v} jest zdefiniowana jako

$$E = \frac{1}{2} m \vec{v} \cdot \vec{v} \quad (6.13)$$

lub

$$E = \frac{1}{2} m v^2. \quad (6.14)$$

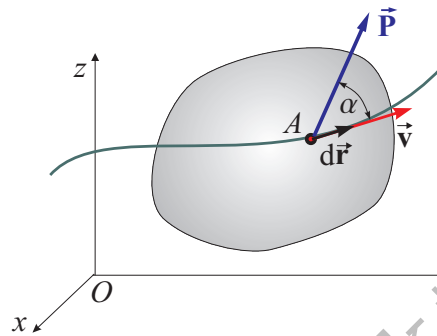
Energia kinetyczna jest wielkością skalarną (niezależną od układu współrzędnych, jaki został użyty przy wyznaczaniu prędkości). Jednostką energii jest $1 J$ ($1 J = 1 kg \frac{m^2}{s^2} = 1 Nm$).

6.4 Praca siły i moc siły

Elementarną pracę ($d'L$) siły (\vec{P}) działającej na punkt materialny, wykonaną podczas przemieszczenia punktu o wektor $d\vec{r}$, definiuje się jako iloczyn skalarny wektora siły i wektora elementarnego przemieszczenia punktu przyłożenia siły (rys. 6.6)

$$d'L = \vec{P} \cdot d\vec{r} = P dr \cos \alpha, \quad (6.15)$$

przy czym α oznacza kąt pomiędzy wektorami \vec{P} i $d\vec{r}$.



Rysunek 6.6: Tor punktu A ciała sztywnego i siła \vec{P} przyłożona do tego punktu

Korzystając z własności iloczynu skalarnego, elementarną pracę siły przedstawia się jako

$$d'L = P_x dx + P_y dy + P_z dz. \quad (6.16)$$

Ponieważ $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$, to elementarne przemieszczenie można przedstawić jako $d\vec{r} = \vec{v} dt$, a pracę elementarną $d'L = \vec{P} \cdot d\vec{r}$ w postaci

$$d'L = \vec{P} \cdot \vec{v} dt \quad (6.17)$$

lub – w zapisie skalarnym – jako

$$d'L = (P_x v_x + P_y v_y + P_z v_z) dt. \quad (6.18)$$

Pracę siły (\vec{P}) wykonaną podczas przemieszczenia punktu przyłożenia siły wzdłuż krzywej AB wyznacza się całkując wyrażenie (6.15) na drodze AB

$$L_{AB} = \int_{\cup AB} \vec{P} \cdot d\vec{r} = \int_{\cup AB} P dr \cos \alpha. \quad (6.19)$$

Inne postaci wyrażenia na pracę to:

$$L_{AB} = \int_{\cup AB} (P_x dx + P_y dy + P_z dz), \quad (6.20)$$

$$L_{AB} = \int_{t_1}^{t_2} (P_x v_x + P_y v_y + P_z v_z) dt, \quad (6.21)$$

gdzie t_1 i t_2 oznaczają chwile, w których punkt przyłożenia siły znajdował się w położeniu odpowiednio A i B . Jednostką pracy jest $1 J$ ($1 J = 1 Nm$).

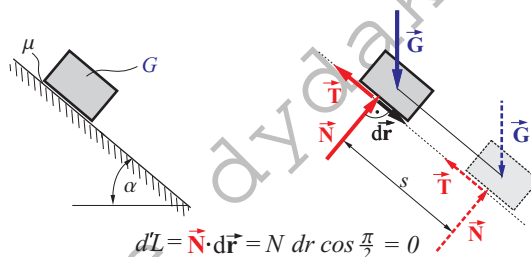
Rozpatrzmy kilka szczególnych przypadków sił, z którymi mamy często do czynienia i wyznaczmy ich pracę. Ułatwi to rozwiązywanie zadań, w których takie siły występują.

1) **Praca siły prostopadłej do wektora elementarnego przemieszczenia punktu przyłożenia siły**

W sytuacji, gdy siła (\vec{P}) jest prostopadła do wektora elementarnego przemieszczenia punktu przyłożenia siły ($d\vec{r}$), to znaczy $\vec{P} \perp d\vec{r}$, na podstawie definicji (6.15) otrzymuje się

$$d'L(\vec{P}) = \vec{P} \cdot d\vec{r} = P dr \cos \pi/2 = 0. \quad (6.22)$$

Całkowita praca (suma prac elementarnych) będzie równa zero, o ile wektory \vec{P} i $d\vec{r}$ pozostaną stale prostopadłe do siebie (rys. 6.7).



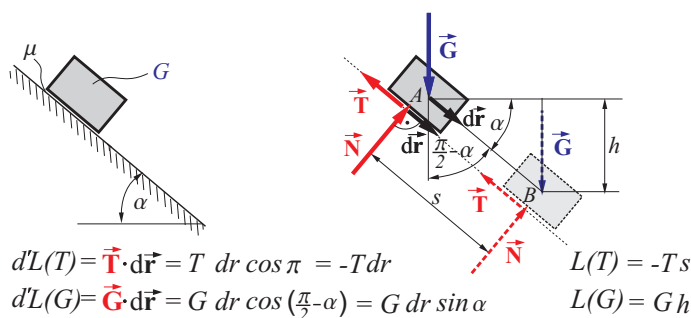
Rysunek 6.7: Praca siły (\vec{N}) prostopadłej do wektora $d\vec{r}$

2) **Praca siły o stałym kierunku i stałej wartości**

Jeżeli siła ma stałą wartość i kierunek, to jej rzuty mają również stałe wartości $P_x = const$, $P_y = const$, $P_z = const$. Całkowitą pracę takiej siły łatwo wyznaczyć z zależności (6.20)

$$\begin{aligned} L_{AB} &= \int_{\cup AB} (P_x dx + P_y dy + P_z dz) = \\ &= P_x x|_{x_A}^{x_B} + P_y y|_{y_A}^{y_B} + P_z z|_{z_A}^{z_B} = \\ &= P_x(x_B - x_A) + P_y(y_B - y_A) + P_z(z_B - z_A), \end{aligned} \quad (6.23)$$

gdzie x_A, y_A, \dots, z_B oznaczają współrzędne punktów A i B określających początek i koniec drogi przebytej przez punkt przyłożenia siły. Oznacza to, że praca siły o stałym kierunku i stałej wartości nie zależy od krzywej, która jest torem punktu przyłożenia siły, a jedynie od położenia punktu początkowego (A) i punktu końcowego (B).



Rysunek 6.8: Praca sił (\vec{T} i \vec{G}) o stałym kierunku i stałej wartości

3) Praca siły ciężkości

Siła ciężkości (\vec{G}) jest szczególnym przypadkiem siły o stałym kierunku i stałej wartości. Jej pracę można więc wyznaczyć na podstawie zależności (6.23). Po podstawieniu $P_x = P_y = 0$ otrzymuje się

$$L_{AB} = P_z(z_B - z_A). \quad (6.24)$$

Przy założeniu, że oś z jest pionową osią zwróconą do góry ($P_z = -G$) otrzymuje się

$$L_{AB} = -G(z_B - z_A). \quad (6.25)$$

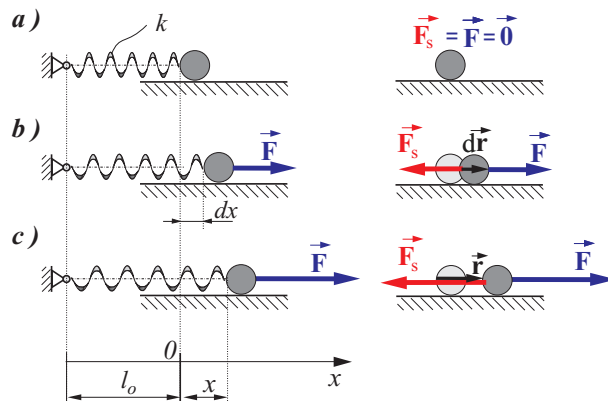
Praca siły ciężkości jest dodatnia w przypadku, gdy punkt przyłożenia siły przemieszcza się ku dołowi (punkt B leży poniżej punktu A).

4) Praca siły sprężystości

Siłę oddziaływania sprężyny (lub innego elementu o właściwościach sprężystych)⁵ na ciało nazywa się siłą sprężystości (\vec{F}_s). Jej kierunek pokrywa się z kierunkiem osi sprężyny, a zwrot jest przeciwny do wektora względnego przemieszczenia końców \vec{r} (rys. 6.9c).

Dla sprężyny o liniowej charakterystyce (por. punkt 3.4) wartość siły sprężystości jest proporcjonalna do zmiany jej długości x (rys. 6.9c), to znaczy $F_s = kx$.

⁵W mechanice ogólnej przyjmuje się, że elementy sprężyste mają masę równą zero.



Rysunek 6.9: Oddziaływanie sprężyny na punkt materialny: a) sprężyna nieodkształcona, b) nieskończenie małe odkształcenie sprężyny, c) skończone (dowolne) odkształcenie sprężyny

Elementarna praca siły sprężystości – wyznaczona na podstawie definicji (6.15) – jest określona jako

$$d'L = \vec{F}_s \cdot d\vec{r} = F_s dr \cos \pi = -F_s dx, \quad (6.26)$$

a ujemna jej wartość wynika z przeciwnego zwrotu wektorów \vec{F}_s i $d\vec{r}$ (rys. 6.9b).

Całkowita praca – dla sprężyny o liniowej charakterystyce ($F_s = kx$) – jest równa

$$L = \int_0^x (-F_s) dx = -\int_0^x kx dx = -\frac{1}{2}kx^2, \quad (6.27)$$

gdzie x oznacza całkowite odkształcenie sprężyny (wydłużenie – w przypadku rozciągania lub skrócenie – przy ścisnaniu sprężyny).

Moc siły definiuje się jako stosunek pracy wykonanej przez siłę do czasu, w którym praca została wykonana. Pojęcie mocy charakteryzuje zdolność wykonania przez siłę pracy w określonym w czasie. Jednostką mocy $1 W$ ($1 W = 1 J/s$).

Dzieląc całkowitą pracę L_{AB} wykonaną podczas przemieszczenia punktu przyłożenia siły z położenia A do położenia B przez czas Δt , w którym nastąpiło przemieszczenie, otrzymuje się *moc średnią*

$$N_r = \frac{L_{AB}}{\Delta t} = \frac{L_{AB}}{t_B - t_A}. \quad (6.28)$$

Chwilowa moc siły jest zdefiniowana się jako stosunek elementarnej pracy siły do czasu trwania elementarnej przemieszczenia

$$N = \frac{d'L}{dt} = \frac{\vec{P} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{P} \cdot \vec{v}. \quad (6.29)$$

6.5 Prawo zmienności energii kinetycznej punktu

Równanie dynamiki punktu

$$m\vec{a} = \vec{P} \quad (6.30)$$

można – po pomnożeniu skalarnie przez wektor elementarnego przemieszczenia $d\vec{r}$ – przekształcać w następujący sposób:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r} = \vec{P} \cdot d\vec{r} , \quad (6.31)$$

$$m \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot d\vec{v} = \vec{P} \cdot d\vec{r} , \quad (6.32)$$

$$m\vec{v} \cdot d\vec{v} = \vec{P} \cdot d\vec{r} , \quad (6.33)$$

$$d\left(\frac{1}{2} m \vec{v} \cdot \vec{v}\right) = \vec{P} \cdot d\vec{r} . \quad (6.34)$$

Lewa strona zależności (6.34) przedstawia różniczkę energii kinetycznej punktu (por. (6.13)), a prawa elementarną pracę siły \vec{P} (zgodnie z (6.15)), stąd

$$dE = d'L . \quad (6.35)$$

Całkując obie strony równania (6.35) – przy założeniu, że punkt porusza się wzdłuż krzywej AB , przy czym jego prędkość w punkcie A jest równa v_1 , a w punkcie B osiąga wartość v_2

$$\int_{v_1}^{v_2} dE = \int_{\cup AB} d'L , \quad (6.36)$$

otrzymuje się

$$\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = L_{AB} \quad (6.37)$$

lub

$$E_B - E_A = L_{AB} , \quad (6.38)$$

gdzie E_B oznacza energię kinetyczną punktu materialnego w punkcie B ("w położeniu końcowym"), natomiast E_A oznacza jego energię kinetyczną w punkcie A ("w położeniu początkowym")⁶.

⁶Położenia "początkowe" i "końcowe" nie muszą dotyczyć rozpoczęcia i zakończenia ruchu punktu materialnego. Są to dwa wybrane stany punktu materialnego określone przez jego prędkości i położenia oraz działające na punkt siły. Zależność (6.37) pozwala na wyznaczenie relacji pomiędzy wartościami prędkości, sił i współrzędnych położenia punktu materialnego dla tych stanów.

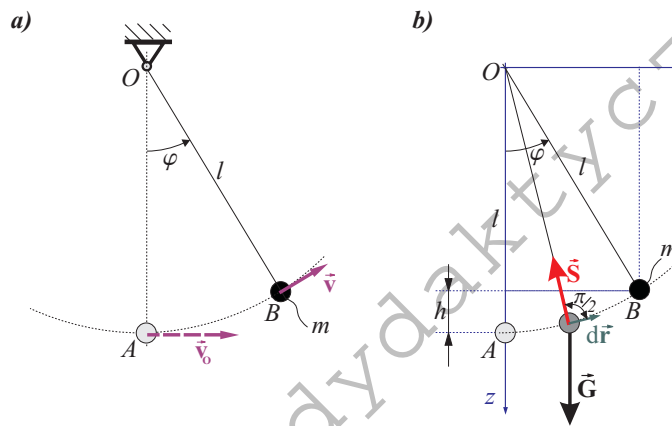
Zależność (6.38) wyraża prawo zmienności energii kinetycznej punktu materialnego.

- Przyrost energii kinetycznej punktu materialnego jest równy pracy siły wypadkowej – działającej na punkt – wykonanej na drodze przebytej przez ten punkt.

PRZYKŁAD 6.5.1

Przeprowadzić analizę ruchu wahadła matematycznego (o masie m , długości l i prędkości w momencie przechodzenia przez położenie pionowe równej v_0). Wykorzystać do tego celu prawo zmienności energii kinetycznej punktu materialnego.

ROZWIĄZANIE



Rysunek 6.10: Wahadło matematyczne: a) prędkości w położeniach A i B, b) siły (w dowolnym położeniu)

Rozpatrywać będziemy dwa wybrane położenia punktu materialnego. Literą A oznaczmy położenie, dla którego znana jest prędkość punktu (v_0). B symbolizuje dowolne położenie, a prędkość punktu w tym położeniu oznaczamy jako v (rys. 6.10). Przyrost energii kinetycznej rozpatrywanego punktu materialnego pomiędzy położeniami A i B wyniesie

$$E_B - E_A = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}.$$

Siły działające na oswobodzony od więzów punkt materialny są pokazane na rys. 6.10b. Zgodnie z prawem zmienności energii kinetycznej punktu materialnego przyrost energii jest równy pracy wykonanej przez działające na rozpa-

trywany punkt siły (\vec{G} i \vec{S}), przy czym interesuje nas praca wykonana podczas ruchu punktu pomiędzy położeniami A i B .

Wektor elementarnego przemieszczenia punktu przyłożenia sił ($d\vec{r}$), jest stale prostopadły do siły \vec{S} . Praca siły \vec{S} jest – jak wynika z (6.22) – równa zero ($L_{AB}(\vec{S}) = 0$).

Praca siły ciężkości – wyznaczona na podstawie (6.24) – wynosi (w tym przypadku $P_z = G = mg$)

$$L_{AB}(\vec{G}) = G(z_B - z_A) = mg(l \cos\varphi - l) = -mg(l - l \cos\varphi) = -mgh.$$

Praca siły \vec{G} dla przemieszczenia od punktu A do B jest w tym przypadku ujemna, ponieważ punkt przyłożenia siły przemieszcza się ku górze (rys. 6.10).

Prawo zmienności energii kinetycznej w przypadku wahadła przybiera formę

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = -mgl(1 - \cos\varphi).$$

Na tej podstawie można wyznaczyć prędkość v w dowolnym położeniu wahadła – określonym kątem φ

$$v = \sqrt{v_0^2 - gl(1 - \cos\varphi)}.$$

Na podstawie analizowanego przykładu można stwierdzić, że stosując prawo zmienności energii kinetycznej punktu materialnego można w prosty sposób wyznaczyć prędkość punktu w zależności od położenia (określonego współrzędną φ). \diamond

Ogólnie rzecz ujmując, prawo zmienności energii kinetycznej umożliwia wyznaczenie prędkości punktu materialnego w dowolnym położeniu lub wyznaczenie położenia, jeśli prędkość jest znana. Istotne jest również to, że zastosowanie prawa zmienności energii kinetycznej prowadzi do równań algebraicznych⁷ (a nie różniczkowych, jak to ma miejsce przy stosowaniu równania dynamiki).

6.6 Równania dynamiki punktu materialnego wyrażone za pomocą pędu i krętu

Zamiast prawa dynamiki o postaci $m\vec{a} = \vec{P}$ można wykorzystywać równoważne mu równania, ale sformułowane w nieco inny sposób – na przykład równania dynamiki wyrażone za pomocą pędu i krętu⁸.

⁷ Jest tak w przypadku, gdy całkowita praca siły daje się przedstawić za pomocą funkcji, a nie w postaci całki.

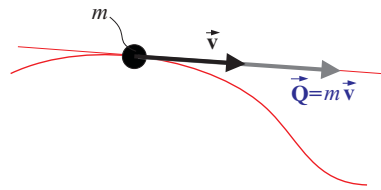
⁸ W mechanice analitycznej używane są jeszcze inne metody opisu dynamiki układów mechanicznych (np. równania Lagrange'a, Hamiltona, zasada Gaussa itd.).

6.6.1 Pęd punktu materialnego

Pęd punktu materialnego (\vec{Q}) jest równy iloczynowi masy (m) i wektora prędkości (\vec{v}) punktu materialnego

$$\vec{Q} = m \vec{v} . \quad (6.39)$$

Przy wyznaczaniu pędu w grę wchodzi bezwzględna prędkość punktu materialnego \vec{v} (to jest prędkość określona względem inercyjnego układu odniesienia).



Rysunek 6.11: Wektor pędu punktu materialnego

6.6.2 Kręt punktu materialnego

Kręt względem nieruchomego bieguna

Kręt punktu materialnego względem bieguna⁹ O (oznaczony jako \vec{K}_O) jest równy momentowi pędu punktu materialnego ($\vec{Q} = m \vec{v}$) względem bieguna O . (Kręt względem punktu O oznaczamy symbolem \vec{K}_O .)

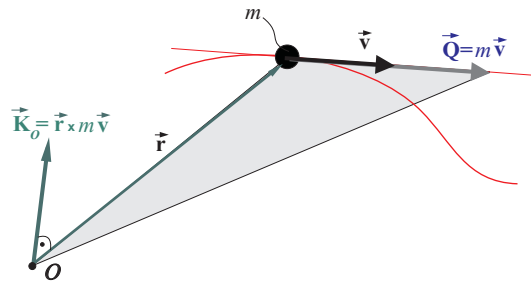
$$\vec{K}_O = \vec{r} \times \vec{Q} = \vec{r} \times m \vec{v} . \quad (6.40)$$

Kręt względem dowolnego punktu

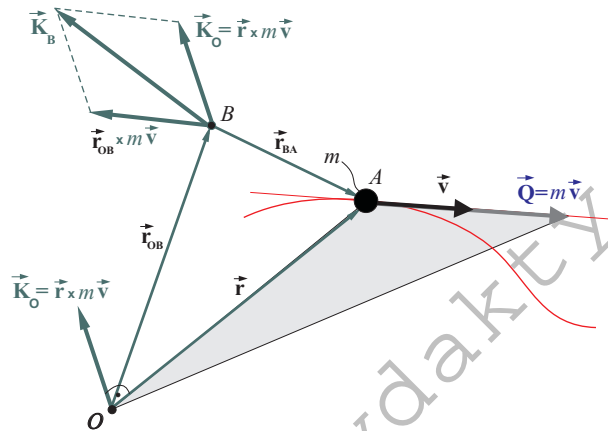
Kręt punktu materialnego względem dowolnego bieguna B (poruszającego się lub nieruchomego) jest zdefiniowany w analogiczny sposób jak kręt względem nieruchomego bieguna, to znaczy jest równy momentowi pędu punktu materialnego ($\vec{Q} = m \vec{v}$) względem punktu B

$$\vec{K}_B = \vec{r}_{BA} \times \vec{Q} = \vec{r}_{BA} \times m \vec{v} . \quad (6.41)$$

⁹Określenie biegun jest używane jako synonim słowa punkt. Oznacza punkt przestrzeni (punkt geometryczny).



Rysunek 6.12: Wektor krętu punktu materialnego



Rysunek 6.13: Wektor krętu punktu materialnego względem dowolnego punktu

Kręt punktu materialnego względem bieguna O można przedstawić za pomocą krętu względem punktu B – po wprowadzeniu wektorów \vec{r}_{OB} i \vec{r}_{BA} (rys. 6.13)

$$\vec{r} = \vec{r}_{OB} + \vec{r}_{BA} , \quad (6.42)$$

wówczas

$$\vec{K}_O = \vec{r} \times m \vec{v} = (\vec{r}_{OB} + \vec{r}_{BA}) \times m \vec{v} = \vec{r}_{OB} \times m \vec{v} + \vec{r}_{BA} \times m \vec{v} . \quad (6.43)$$

W ten sposób otrzymuje się zależność pomiędzy wektorami krętu punktu materialnego, wyznaczonego względem bieguna O i względem bieguna B

$$\vec{K}_O = \vec{K}_B + \vec{r}_{OB} \times m \vec{v} . \quad (6.44)$$

6.6.3 Twierdzenia o pochodnej pędu i pochodnej krętu

Pochodną pędu, przy założeniu, że masa punktu nie ulega zmianie ($m = \text{const}$), można przedstawić jako

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} . \quad (6.45)$$

Drugie prawo Newtona ($m\vec{a} = \vec{P}$) wyrażone poprzez pochodną pędu punktu materialnego

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{P} \quad (6.46)$$

jest nazywane *prawem zmienności pędu punktu materialnego* (lub *twierdzeniem o pochodnej pędu punktu materialnego*).

Pochodna względem czasu wektora krętu ($\vec{K}_O = \vec{r} \times m\vec{v}$) wyznaczonego względem bieguna O jest równa

$$\frac{d\vec{K}_O}{dt} = \frac{d(\vec{r} \times m\vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{v} + \vec{r} \times m \frac{d\vec{v}}{dt} . \quad (6.47)$$

Jeśli biegun O jest nieruchomy, to pochodna wektora wodzącego \vec{r} określa prędkość punktu A ($\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$). Zatem dla nieruchomego bieguna O otrzymuje się

$$\frac{d\vec{K}_O}{dt} = \vec{v} \times m\vec{v} + \vec{r} \times \frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{r} \times \frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{r} \times \vec{P} , \quad (6.48)$$

gdzie wykorzystano zależności $\vec{v} \times m\vec{v} = \vec{0}$ oraz $\frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{P}$. Ponieważ iloczyn $\vec{r} \times \vec{P}$ oznacza moment siły względem punktu O (\vec{M}_O), to

$$\frac{d\vec{K}_O}{dt} = \vec{M}_O . \quad (6.49)$$

Zależność (6.49) nosi nazwę *prawa zmienności krętu punktu materialnego* (lub *twierdzenia o pochodnej krętu punktu materialnego względem nieruchomego bieguna*). Można ją traktować jako inną postać drugiego prawa Newtona.

Równanie dynamiki punktu materialnego ($m\vec{a} = \vec{P}$) można przedstawić na dwa sposoby

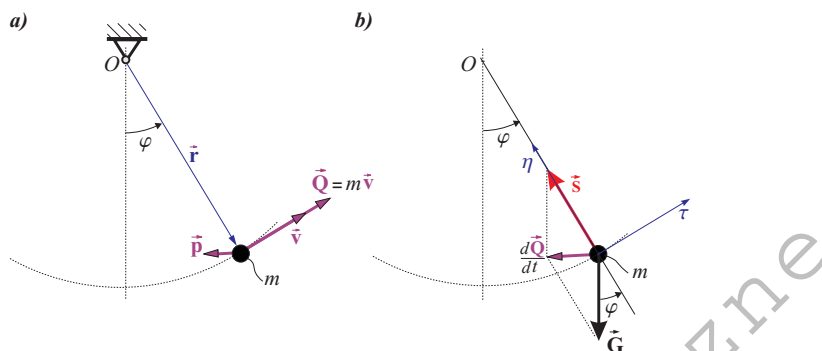
$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{P} \quad \text{lub} \quad \frac{d\vec{K}_O}{dt} = \vec{M}_O . \quad (6.50)$

\vec{Q} oznacza wektor pędu punktu materialnego, \vec{K}_O jest wektorem krętu punktu względem nieruchomego bieguna O , natomiast \vec{P} jest sumą sił zewnętrznych czynnych i biernych działających na punkt materialny, a \vec{M}_O jest sumą momentów tych sił względem nieruchomego bieguna O .

PRZYKŁAD 6.6.2

Korzystając z prawa zmienności pędu i prawa zmienności krętu, określić równania opisujące ruch wahadła matematycznego o długości l i masie m .

ROZWIĄZANIE



Rysunek 6.14: Wahadło matematyczne – pęd i pochodna pędu punktu materialnego

1) Wykorzystanie prawa zmienności pędu.

Stosując prawo zmienności pędu i podstawiając $\vec{Q} = m\vec{v}$, otrzymuje się równanie

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{P} \Rightarrow m\vec{a} = \vec{G} + \vec{S},$$

które jest identyczne z wektorowym równaniem dynamiki dla wahadła omawianego na str. 198. (Na tej podstawie otrzymać można równania skalarne, które będą takie same jak we wspomnianym przykładzie.)

2) Wykorzystanie prawa zmienności krętu.

Prawo zmienności krętu (6.50)

$$\frac{d\vec{K}_O}{dt} = \vec{M}_O,$$

wymaga określenia wektora krętu i jego pochodnej oraz momentu sił czynnych (\vec{G}) i sił biernych (reakcji \vec{S}) względem nieruchomego bieguna. Za biegun przyjmiemy punkt O , który jest punktem zawieszenia wahadła (rys. 6.14). Wektory krętu \vec{K}_O i momentu sił \vec{M}_O wyznacza się na podstawie iloczynów wektorowych:

$$\vec{K}_O = \vec{r} \times m\vec{v}, \quad \vec{M}_O = \vec{r} \times (\vec{G} + \vec{S}),$$

a wynikiem są wektory prostopadłe do płaszczyzny, w której porusza się wahadło – o wartościach:

$$K_o = l m v, \quad M_o = -G l \sin \varphi.$$

(znaki przy wartościach krętu i momentu przyjęte są zgodnie z regułą prawej dłoni). Wektory \vec{K}_o i \vec{M}_o można więc przedstawić jako

$$\vec{K}_o = \vec{k} l m v, \quad \vec{M}_o = -\vec{k} G l \sin \varphi.$$

Pochodna wektora krętu jest równa

$$\frac{d\vec{K}_o}{dt} = \vec{k} \frac{dK_o}{dt} = \vec{k} l m \frac{dv}{dt} = \vec{k} l m a_\tau.$$

Na podstawie prawa zmienności krętu otrzymuje się

$$\vec{k} l m a_\tau = -\vec{k} G l \sin \varphi$$

lub – w postaci skalarnej

$$l m a_\tau = -G l \sin \varphi.$$

Ostateczna postać równania opisującego ruch wahadła matematycznego jest (po podzieleniu przez l) taka sama jak w przykładzie ze strony 200. Otrzymane wcześniej – na podstawie równania dynamiki w postaci prawa Newtona – równania skalarne stanowią układ dwóch równań i zawierają niewiadomą siłę oddziaływania nici (reakcję S). \diamond

6.7 Rozwiązywanie zadań z dynamiki nieswobodnego punktu materialnego

Sposób rozwiązywania zadań dotyczących dynamiki nieswobodnego punktu materialnego można przedstawić w postaci ogólnego algorytmu.

1) Uwolnienie od więzów i wprowadzenie reakcji.

Rozpatrywany punkt należy w dowolnym położeniu (nie szczególnym) uwolnić od więzów, a ich działanie zastąpić odpowiadającymi im siłami reakcji.

2) Wybór metody analizy dynamiki (wybór metody generowania równań dynamiki).

W zależności od tego, które wielkości muszą być wyznaczone w rozpatrywanym zadaniu można dobrać odpowiednią do celu metodę analizy układu. Do dyspozycji są omówione wcześniej metody:

- a) drugie prawo dynamiki Newtona,

- b) prawo zmienności energii kinetycznej (twierdzenie o zmianie energii),
 - c) prawo zmienności pędu (twierdzenie o pochodnej pędu),
 - d) prawo zmienności krętu (twierdzenie o pochodnej krętu).
- 3) **Zastosowanie równań dynamiki dla rozpatrywanego układu – wybór układu współrzędnych i przedstawienie równań w postaci skalarnej.**
 - 4) **Porównanie liczby równań i liczby niewiadomych (uzupełnienie układu równań).**
 - 5) **Rozwiązanie układu równań.**

Uwagi:

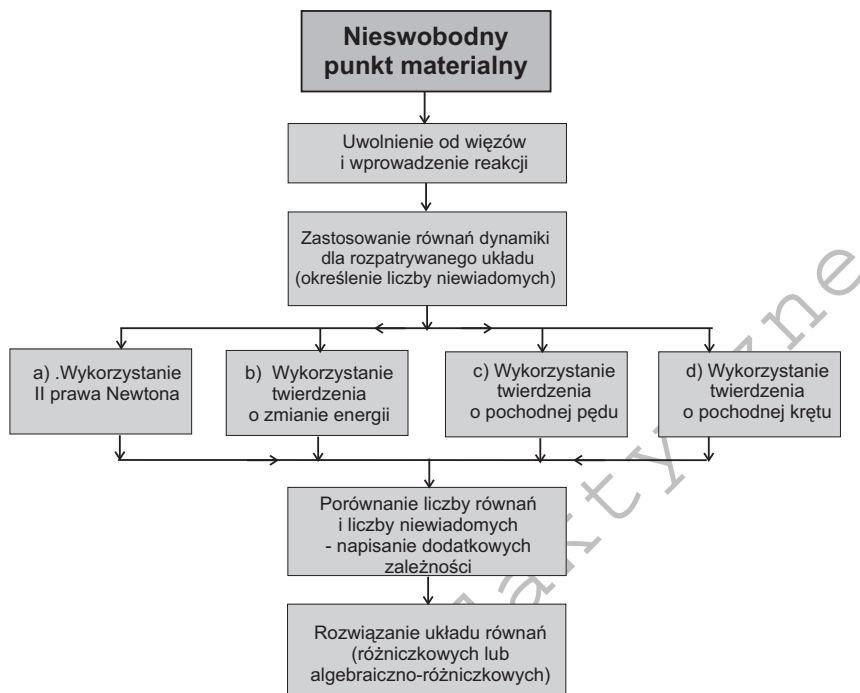
- ad 2a) Drugie prawo dynamiki Newtona prowadzi do równań różniczkowych drugiego rzędu ze względu na współrzędne określające położenie punktu¹⁰. Użycie tej metody pozwala na wyznaczenie sił reakcji więzów. Jej wadą jest większa liczba niewiadomych (i równań) niż w metodzie energetycznej.
- ad 2b) Prawo zmienności energii kinetycznej daje w efekcie równanie algebraiczne, w którym występują współrzędne położenia (albo przebyta droga) oraz wartości prędkości w dwóch położeniach. Z tego powodu metoda energetyczna jest stosowana zazwyczaj w przypadku, gdy poszukiwana jest prędkość dla określonego położenia punktu lub odwrotnie (wyznaczane położenie przy zadanych prędkościach). Jeśli poszukiwane są siły reakcji, to metoda energetyczna nie pozwala na ich wyznaczenie (poza niektórymi szczególnymi przypadkami).
- ad 2c) Prawo zmienności pędu w zastosowaniach praktycznie nie różni się od prawa dynamiki Newtona¹¹.
- ad 2d) Użycie prawo zmienności krętu w wielu przypadkach pozwala na uzyskanie równań dynamiki w prostszej formie i w mniejszej liczbie.
- ad 4) Jeśli liczba niewiadomych jest większa od liczby równań, to układ równań należy uzupełnić o niezbędne zależności kinematyczne lub związki fizyczne (zależności pomiędzy siłami – jak to ma miejsce w przypadku tarcia rozwiniętego).
- ad 5) W zależności od postaci otrzymanych równań (mogą to być równania różniczkowe, algebraiczne lub algebraiczno-różniczkowe) należy użyć odpowiedniej metody rozwiązania. W wielu przypadkach wyznaczenie rozwiązania w postaci analitycznej jest niemożliwe w dziedzinie funkcji elementarnych. Praktycznym sposobem ominięcia wielu trudności z wyznaczeniem rozwiązania jest wykorzystanie metod numerycznych i odpowiedniego oprogramowania komputera.

¹⁰Równania dynamiki otrzymane na podstawie prawa Newtona są równaniami różniczkowymi pierwszego rzędu ze względu na prędkości albo równaniami algebraicznymi – dla przyspieszeń.

¹¹W oryginalnym sformułowaniu prawo Newtona brzmi: *"mutationem motus proportionalem esse, vi motrici impressae et fieri secundum lineam rectam, qua vis illa imprimatur"*, co tłumaczy się: *"zmiana pędu jest proporcjonalna do działającej siły i jest skierowana stycznie do działającej siły"*.

Schemat blokowy podanego algorytmu jest pokazany na rys. 6.15.

Ilustracją zastosowania podanego algorytmu rozwiązywania zadań dotyczących dynamiki nieswobodnego punktu materialnego będzie pełne rozwiązanie zadania dotyczącego wahadła matematycznego.

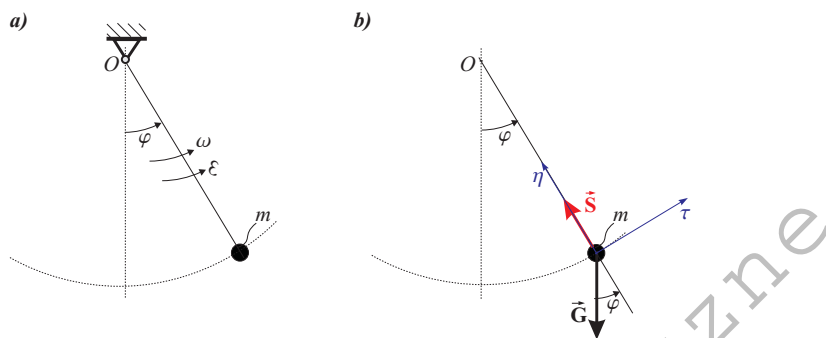


Rysunek 6.15: Algorytm rozwiązywanie zadań z dynamiki nieswobodnego punktu materialnego

PRZYKŁAD 6.7.3

Punkt materialny o masie m jest połączony lekką nicią o długości l z nieruchomą podporą i porusza się pod wpływem siły ciężkości. Wyznaczyć przebieg zmian siły oddziaływania więzów (nici) na punkt materialny.

ROZWIĄZANIE



Rysunek 6.16: Wahadło matematyczne – punkt materialny zawieszony na lekkiej nici

Siły działające na oswobodzony od więzów punkt materialny są pokazane na rys. 6.16b.

W celu wyznaczenia siły oddziaływania nici na punkt materialny odwołujemy się do prawa Newtona. Na tej podstawie – używając naturalnego układu współrzędnych – otrzymuje się równania:

$$ma_\tau = -G \sin \varphi, \quad ma_\eta = S - G \cos \varphi$$

a po zastąpieniu symboli a_τ , a_η odpowiednimi wielkościami:

$$m \frac{dv}{dt} = -G \sin \varphi, \quad m \frac{v^2}{l} = S - G \cos \varphi.$$

Ponieważ dwa równania dynamiki wahadła zawierają cztery zmienne: v , S , φ , t konieczne jest uzupełnienie układu o dodatkowe równania. Wykorzystując używane w kinematyce zależności:

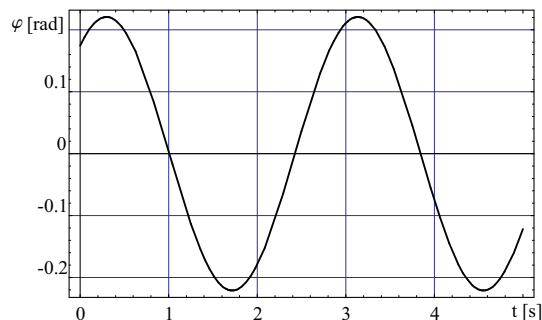
$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \varepsilon l, \quad \varepsilon = \frac{d\omega}{dt}, \quad \omega = \frac{d\varphi}{dt},$$

otrzymuje się układ trzech równań różniczkowych pierwszego rzędu:

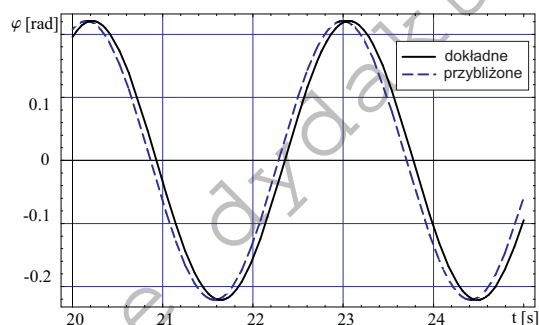
$$ml \frac{d\omega}{dt} = -mg \sin \varphi, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \omega, \\ ml \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = S - mg \cos \varphi$$

o niewiadomych $\varphi(t)$, $\omega(t)$, $S(t)$.

Wyniki rozwiązania numerycznego – dla zadanych wartości liczbowych parametrów (l oraz g) i zadanych warunków początkowych $v(t = 0)$ – zostały przedstawione na rys. 6.17 i rys. 6.18.



Rysunek 6.17: Wahadło matematyczne – wyniki rozwiązania numerycznego równań dynamiki (dane: $l = 2$ m, $g = 9,81$ m/s², $\varphi(0) = \pi/18$ rad, $\dot{\varphi}(0) = 0,3$ rad/s)



Rysunek 6.18: Wahadło matematyczne – porównanie wyników rozwiązania numerycznego równań dokładnych i przybliżonych (dane: $l = 2$ m, $g = 9,81$ m/s², $\varphi(0) = \pi/18$ rad, $\dot{\varphi}(0) = 0,3$ rad/s)

Uwaga: Często rozwiązuje się równanie różniczkowe opisujące w sposób przybliżony ruch wahadła matematycznego. Równanie to otrzymuje się przez zastąpienie funkcji $\sin \varphi$ przez przybliżoną jej wartość $\sin \varphi \cong \varphi$. Zamiast równania $m l^2 \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -m g l \sin \varphi$ używa się równania

$$m l^2 \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -m g l \varphi.$$

(Wielkość $m l^2$ występująca w tym wzorze jest nazywana momentem bezwładności punktu materialnego względem bieguna O , leżącego w odległości l od punktu. Oznacza się ją jako J_O .)

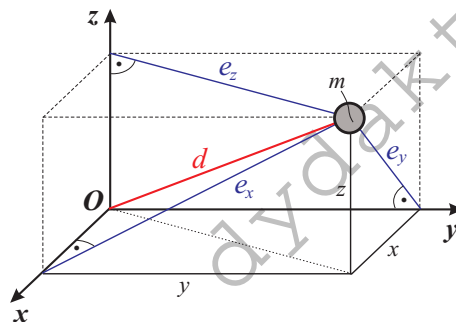
W takim przypadku rozwiązanie przyjmuje prostą formę, na przykład dla $\varphi(0) = 0$ rozwiązaniem jest funkcja

$$\varphi(t) = C \sin \sqrt{\frac{g}{l}} t. \quad \diamond$$

6.8 Masowe momenty bezwładności punktu materialnego

Masowy moment bezwładności punktu materialnego względem bieguna O jest równy iloczynowi masy punktu materialnego (m) i kwadratu odległości punktu materialnego od bieguna O (rys. 6.19), to znaczy

$$J_O = m d^2 = m(x^2 + y^2 + z^2). \quad (6.51)$$



Rysunek 6.19: Oznaczenia odległości (d , e_x , e_y , e_z) wykorzystywane przy definiowaniu masowych momentów bezwładności

Masowy moment bezwładności punktu materialnego względem płaszczyzny jest równy iloczynowi masy punktu materialnego (m) i kwadratu odległości punktu materialnego od tej płaszczyzny:

$$J_{(xy)} = m z^2, \quad J_{(yz)} = m x^2, \quad J_{(zx)} = m y^2. \quad (6.52)$$

Masowy moment bezwładności punktu materialnego względem osi jest równy iloczynowi masy punktu materialnego (m) i kwadratu odległości punktu materialnego od tej osi:

$$J_x = m e_x^2 = m(y^2 + z^2), \quad (6.53)$$

$$J_y = m e_y^2 = m (x^2 + z^2), \quad (6.54)$$

$$J_z = m e_z^2 = m (x^2 + y^2). \quad (6.55)$$

Z podanych definicji (6.51), (6.52) i (6.55) wynikają zależności pomiędzy momentem bezwładności J_O względem punktu (bieguna O), momentami względem płaszczyzn $J_{(xy)}$, $J_{(yz)}$, $J_{(zx)}$ i momentami względem osi J_x , J_y , J_z :

$$J_O = J_{(xy)} + J_{(yz)} + J_{(zx)} = \frac{1}{2} (J_x + J_y + J_z) = m (x^2 + y^2 + z^2). \quad (6.56)$$

Masowym momentem dewiacyjnym punktu materialnego (albo momentem odśrodkowym lub momentem zbieżności) w prostokątnym układzie współrzędnych xyz nazywa się iloczyn trzech wielkości: masy punktu i dwu współrzędnych, określających położenie punktu względem układu xyz .

Dla każdego punktu określone są trzy momenty dewiacyjne J_{xy} , J_{yz} , J_{zx} :

$$J_{xy} = m x y, \quad J_{yz} = m y z, \quad J_{zx} = m z x. \quad (6.57)$$

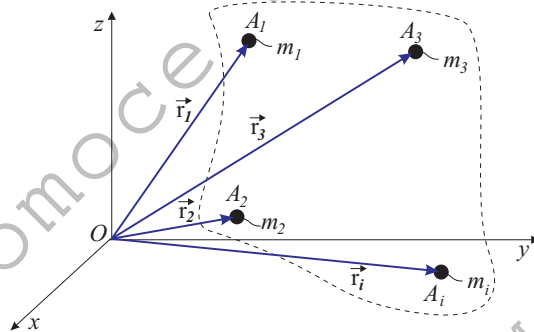
Jednostką masowych momentów bezwładności i masowych momentów dewiacyjnych jest 1 kg m^2 .

Rozdział 7

DYNAMIKA UKŁADU PUNKTÓW MATERIALNYCH

7.1 Podstawowe pojęcia i oznaczenia

Rozpatrzmy układ n punktów materialnych o masach m_i (rys. 7.1). Przypomnijmy, że pomiędzy punktami układu materialnego zachodzą wzajemne oddziaływania. (Punkt, na który nie oddziałuje żaden z pozostałych punktów materialnych nie należy do układu.)



Rysunek 7.1: Układ punktów materialnych

Położenia, prędkości i przyspieszenia punktów materialnych względem iner-

cjalnego układu odniesienia $Oxyz$ oznaczają wektory \vec{r}_i , \vec{v}_i i \vec{a}_i , przy czym:

$$\vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt} \equiv \dot{\vec{r}}_i, \quad \vec{a}_i = \frac{d\vec{v}_i}{dt} \equiv \dot{\vec{v}}_i. \quad (7.1)$$

Środkiem masy układu punktów materialnych nazywa się punkt, którego położenie jest określone jako

$$\vec{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{m}, \quad (7.2)$$

gdzie $m = \sum_{i=1}^n m_i$ oznacza masę całego układu. Współrzędne środka masy – w prostokątnym układzie współrzędnych – wynoszą odpowiednio:

$$\begin{cases} x_C = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{m}, \\ y_C = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{m}, \quad (i = 1, \dots, n), \\ z_C = \frac{\sum_{i=1}^n m_i z_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i z_i}{m}. \end{cases} \quad (7.3)$$

Z definicji środka masy (7.2) wynika ważna w dynamice zależność

$$m \vec{r}_C = \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i. \quad (7.4)$$

Dla każdego punktu materialnego należącego do układu można stosować prawo dynamiki w postaci wektorowej

$$m_i \vec{a}_i = \vec{P}_i, \quad (i = 1, \dots, n), \quad (7.5)$$

albo w formie skalarnej – na przykład w postaci rzutów na osie układu współrzędnych prostokątnych xyz :

$$\begin{cases} m_i \ddot{x} = P_{ix}, \\ m_i \ddot{y} = P_{iy}, \\ m_i \ddot{z} = P_{iz}, \end{cases} \quad (i = 1, \dots, n), \quad (7.6)$$

przy czym $\vec{P}_i = \vec{i}P_{ix} + \vec{j}P_{iy} + \vec{k}P_{iz}$ oznacza wektor wypadkowy wszystkich sił działających na punkt i .

Przy omawianiu warunków równowagi układu punktów materialnych (punkt 4.4) zastały wyróżnione siły wewnętrzne i zewnętrzne działające na taki układ. Suma wszystkich sił wewnętrznych \vec{W}_i działających na układ punktów materialnych jest równa zero

$$\sum_{i=1}^n \vec{W}_i = \vec{0}, \quad (7.7)$$

przy czym

$$\vec{W}_i = \vec{W}_{i1} + \vec{W}_{i2} + \dots + \vec{W}_{in} = \sum_{j=1}^n \vec{W}_{ij}, \quad (7.8)$$

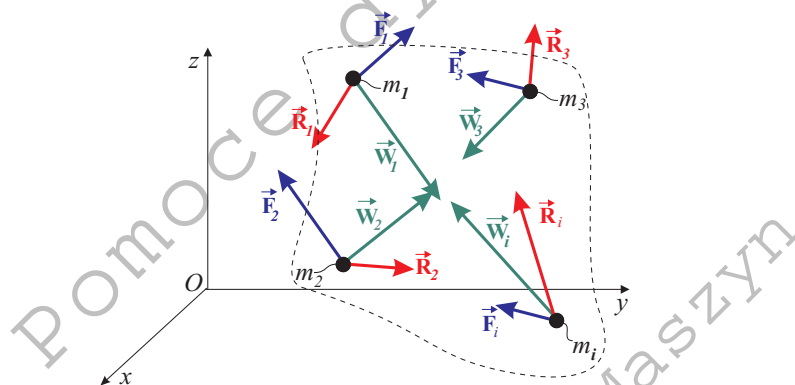
gdzie \vec{W}_{ij} oznacza siłę oddziaływania punktu i na punkt j , przy czym $\vec{W}_{ij} = -\vec{W}_{ji}$ ($\vec{W}_{ii} = \vec{0}$).

Tak, jak przyjęto wcześniej, będziemy rozróżniać:

- siły zewnętrzne czynne (\vec{F}_i),
- siły zewnętrzne bierne, zwane reakcjami – wynikające z oddziaływań więzów (\vec{R}_i).

Wielkości \vec{F}_i , \vec{R}_i oznaczają wektory wypadkowe wszystkich sił zewnętrznych działających na punkt i .

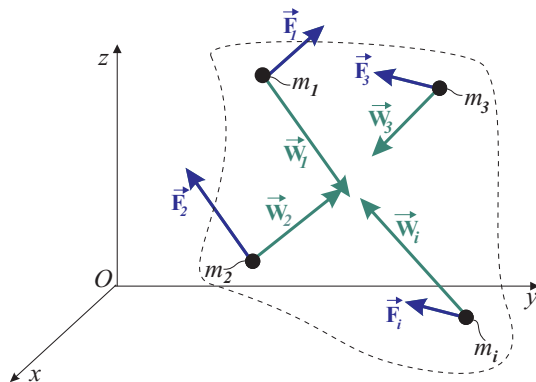
Zatem w każdym układzie punktów materialnych będziemy mieli do czynienia z układem sił, który – w sposób ogólny – został przedstawiony na rys. 7.2. W szczególnych przypadkach niektóre z tych sił mogą być równe zero.



Rysunek 7.2: Siły zewnętrzne (\vec{F}_i , \vec{R}_i) i wewnętrzne (\vec{W}_i) działające na układ punktów materialnych

7.2 Swobodny układ punktów materialnych

Rozpatrujemy układ n swobodnych punktów materialnych o masach m_i , obciążonych siłami zewnętrznymi \vec{F}_i i siłami wewnętrznymi \vec{W}_i (rys. 7.3). Po



Rysunek 7.3: Siły zewnętrzne (\vec{F}_i) i wewnętrzne (\vec{W}_i) działające na swobodny układ punktów materialnych

wprowadzeniu do równań Newtona sił zewnętrznych \vec{F}_i i sił wewnętrznych \vec{W}_i zależność opisującą ruch wszystkich punktów materialnych układu nieswobodnego można przedstawić w formie

$$m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i + \vec{W}_i, \quad (i = 1, \dots, n), \quad (7.9)$$

gdzie:

m_i – masa punktu i ,

\vec{a}_i – przyspieszenie punktu i ,

\vec{F}_i – wypadkowa sił aktywnych działających na punkt i ,

\vec{W}_i – wypadkowa sił wewnętrznych działających na punkt i .

7.3 Nieswobodny układ punktów materialnych

Rozpatrujemy układ n nieswobodnych punktów materialnych o masach m_i (rys. 7.4).

Po wprowadzeniu do równań Newtona sił aktywnych (czynnych, zadanych) \vec{F}_i oraz sił reakcji więzów \vec{R}_i i sił wewnętrznych \vec{W}_i zależność opisującą ruch każdego z punktów materialnych układu nieswobodnego można przedstawić w formie

$$m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i + \vec{R}_i + \vec{W}_i, \quad (i = 1, \dots, n), \quad (7.10)$$

gdzie:

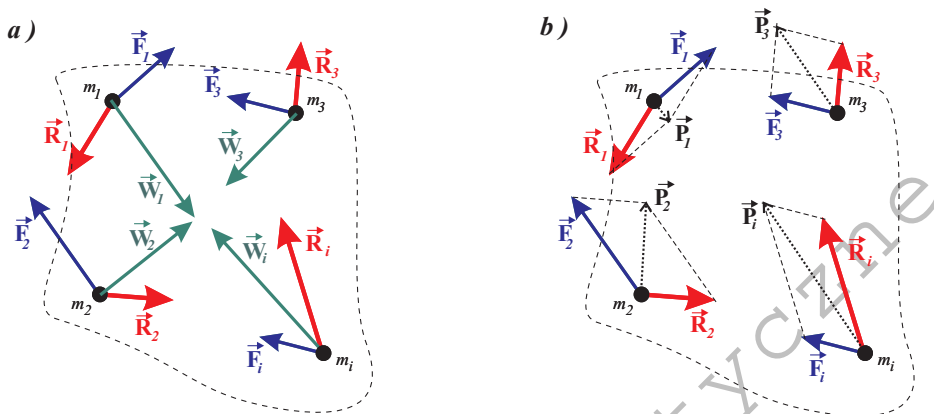
m_i – masa punktu i ,

\vec{a}_i – przyspieszenie punktu i ,

\vec{F}_i – wypadkowa sił aktywnych działających na punkt i ,

\vec{R}_i – wypadkowa sił reakcji działających na punkt i ,

\vec{W}_i – wypadkowa sił wewnętrznych działających na punkt i .



Rysunek 7.4: Siły działające na poszczególne punkty nieswobodnego układu materialnego (a) oraz siły zewnętrzne ($\vec{P}_i = \vec{F}_i + \vec{R}_i$) działające na układ (b). Oznaczenia: \vec{F}_i – siły zewnętrzne czynne (aktywne), \vec{R}_i – siły zewnętrzne bierne (reakcji), \vec{W}_i – siły wewnętrzne

7.3.1 Równania więzów

Analiza ruchu nieswobodnego układu punktów materialnych na podstawie n równań ruchu o postaci (7.10), to znaczy

$$\begin{aligned} m_1 \vec{a}_1 &= \vec{F}_1 + \vec{R}_1 + \vec{W}_1, \\ &\dots\dots\dots (7.11) \\ m_n \vec{a}_n &= \vec{F}_n + \vec{R}_n + \vec{W}_n, \end{aligned}$$

jest możliwa wówczas, gdy znane są wszystkie siły (\vec{F}_i , \vec{R}_i i \vec{W}_i) działające na poszczególne punkty układu.

W wielu przypadkach więzy nałożone na układ wymuszają ruch pewnych punktów układu po określonych torach (lub z określonymi prędkościami). W takich przypadkach oddziaływania więzów mogą być przedstawione w postaci związków:

$$f_i(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n, z_n) = 0, \quad (i = 1, \dots, k), \quad (7.12)$$

$$g_i(\dot{x}_1, \dot{y}_1, \dots, \dot{x}_n, \dot{y}_n, \dot{z}_n) = 0, \quad (i = 1, \dots, r), \quad (7.13)$$

zwanymi *równaniami więzów*.

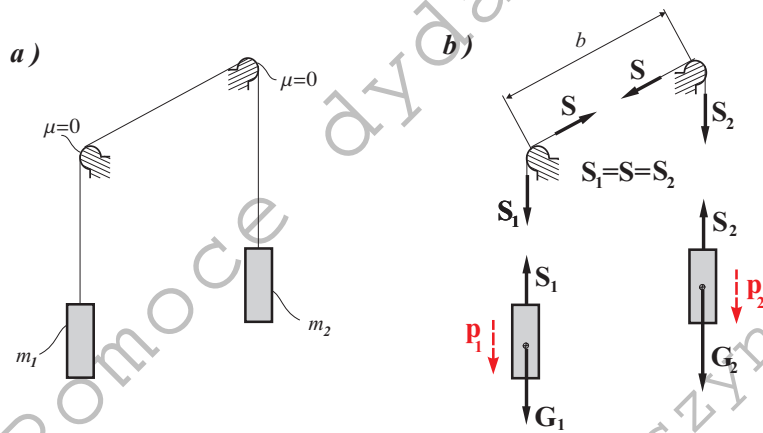
Różniczkując równania więzów względem czasu otrzymuje się zależności pomiędzy przyspieszeniami punktów. Zależności typu (7.12)¹ różniczkuje się dwukrotnie, a równania o postaci (7.13)² jednokrotnie. Otrzymane w ten sposób dodatkowe równania umożliwiają określenie ruchu nieswobodnego układu punktów materialnych. Liczba dodatkowych równań jest równa łącznej liczbie równań więzów ($k + r$).

PRZYKŁAD 7.3.4

Wyznaczyć prędkości, z jakimi będą poruszały się ciężarki połączone lekką, wiotką i nierozciągliwą liną (rys. 7.5a). Lina jest przerzucona przez dwie gładkie krawędzie. W chwili początkowej ciężarki były nieruchome. Dane: $m_1 = 2$ kg; $m_2 = 3$ kg.

ROZWIĄZANIE

Analizowany układ może być rozpatrywany jako układ punktów materialnych. Siły działające na poszczególne elementy układu są pokazane na rys. 7.5b.



Rysunek 7.5: Rozpatrywany układ i siły działające na elementy układu

¹Więzy ograniczające położenie układu – opisane równaniami o postaci (7.12) – są nazywane *wiązami geometrycznymi*.

²Więzy określające związki pomiędzy prędkościami punktów układu – opisane równaniami typu (7.12) – noszą nazwę *wiązy kinematyczne*.

Równania dynamiki dla każdego z punktów można zapisać w formie:

$$m_1 a_1 = G_1 - S_1 ,$$

$$m_2 a_2 = G_2 - S_2 .$$

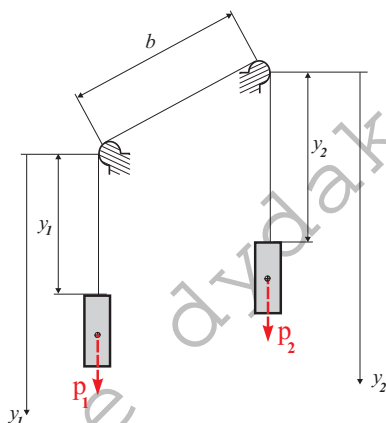
Założenie, że tarcie pomiędzy liną a krawędziami nie istnieje ($\mu = 0$) oraz pominięcie ciężaru liny oznacza, że siły we wszystkich przekrojach liny są jednakowe

$$S_1 = S = S_2 .$$

Dodatkową zależność – pomiędzy przyspieszeniami (a_1 i a_2) punktów – można otrzymać na podstawie równania więzów. Stała długość liny ($l = const$) oznacza, że w każdej chwili pomiędzy współrzędnymi określającymi położenia punktów (y_1 i y_2) zachodzi zależność (rys. 7.6)

$$y_1 + b + c + y_2 = l ,$$

w której przez c została oznaczona łączna długość odcinków liny opasujących zaokrąglone krawędzie.



Rysunek 7.6: Współrzędne określające położenie punktów materialnych

Zależność pomiędzy współrzędnymi (równanie więzów geometrycznych) można zróżniczkować. Dokonując dwukrotnego różniczkowania otrzymuje się

$$\frac{d^2 y_1}{dt^2} + \frac{d^2 y_2}{dt^2} = 0 .$$

Jeśli współrzędne y_1 i y_2 określają położenie każdego z punktów (rys. 7.5b), to ich drugie pochodne są przyspieszeniami tych punktów:

$$\frac{d^2 y_1}{dt^2} = a_1 , \quad \frac{d^2 y_2}{dt^2} = a_2 .$$

Pomiędzy przyspieszeniami, o tak założonych zwrotach jak na rys. 7.5b, zachodzi więc związek

$$a_1 + a_2 = 0 \quad \text{lub} \quad a_1 = -a_2 .$$

Równania opisujące ruch obu punktów materialnych można zatem przedstawić w formie:

$$\begin{aligned} m_1 (-a_2) &= m_1 g - S , \\ m_2 a_2 &= m_2 g - S . \end{aligned}$$

Po rozwiązaniu otrzymuje się:

$$a_2 = \frac{g (m_2 - m_1)}{m_1 + m_2} , \quad S = \frac{2 g m_1 m_2}{m_1 + m_2} .$$

Ponieważ przyspieszenia punktów ($a_1 = -a_2$) są niezależne od czasu, to wyznaczenie prędkości dla takich przyspieszeń nie jest kłopotliwe. Korzystając z zależności $a_1 = \frac{dv_1}{dt}$, $a_2 = \frac{dv_2}{dt}$ można przewidywać prędkości w postaci funkcji:

$$\begin{aligned} v_2 &= \frac{g (m_2 - m_1)}{m_1 + m_2} t + c_1 , \\ v_1 &= \frac{g (m_1 - m_2)}{m_1 + m_2} t + c_2 . \end{aligned}$$

Stałe c_1 i c_2 , wyznaczone na podstawie zadanych prędkości początkowych ($v_1(t=0) = 0$, $v_2(t=0) = 0$), są w tym przypadku równe zero ($c_1 = 0$, $c_2 = 0$). W związku z tym prędkości, z jakimi będą poruszały się rozpatrywane punkty materialne, będą określone przez:

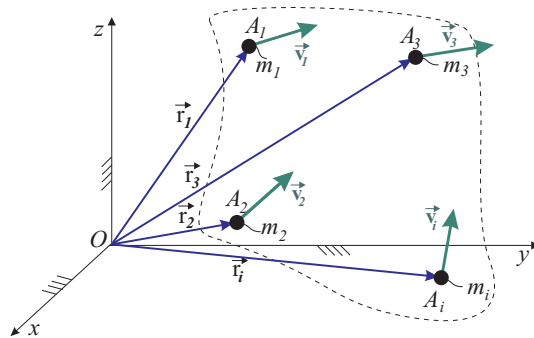
$$\begin{aligned} v_2 &= \frac{g (m_2 - m_1)}{m_1 + m_2} t , \\ v_1 &= \frac{g (m_1 - m_2)}{m_1 + m_2} t . \quad \diamond \end{aligned}$$

7.4 Energia układu punktów materialnych - zależności ogólne

Energia kinetyczna pojedynczego punktu materialnego o masie m_i została wcześniej określona jako $E_i = \frac{1}{2} m_i v_i^2$. Sumując energie kinetyczne poszczególnych punktów układu, otrzymuje się energię n punktów materialnych w postaci sumy

$$E = \sum_{i=1}^n E_i = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i v_i^2 . \quad (7.14)$$

Określona w ten sposób wielkość (E) nazywana jest energią kinetyczną układu materialnego (układu punktów materialnych).



Rysunek 7.7: Prędkości punktów układu materialnego

7.5 Prawo zmienności energii kinetycznej układu punktów materialnych

Prawo zmienności energii kinetycznej punktu materialnego ma postać (6.35), to znaczy

$$dE = d'L. \quad (7.15)$$

Wobec tego, dla każdego punktu układu materialnego jest spełniona zależność

$$d\left(\frac{1}{2} m_i v_i^2\right) = \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i + \vec{W}_i \cdot d\vec{r}_i + \vec{R}_i \cdot d\vec{r}_i, \quad (i = 1, \dots, n), \quad (7.16)$$

Sumując stronami wyrażenia (7.16) napisane dla wszystkich (n) punktów układu, otrzymuje się – z jednej strony sumę energii kinetycznych punktów, a z drugiej sumę elementarnych prac sił działających na punkty

$$d\left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_i^2\right) = \sum_{i=1}^n (\vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i + \vec{W}_i \cdot d\vec{r}_i + \vec{R}_i \cdot d\vec{r}_i). \quad (7.17)$$

Równanie (7.17) można zapisać w postaci

$$dE = d'L_F + d'L_W + d'L_R, \quad (7.18)$$

przy czym E oznacza energię kinetyczną układu materialnego (7.14), a $d'L_F$, $d'L_W$ i $d'L_R$ oznaczają odpowiednio sumę elementarnych prac sił zewnętrznych

(czynnych), sił wewnętrznych i sił reakcji:

$$d' L_F = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i, \quad d' L_W = \sum_{i=1}^n \vec{W}_i \cdot d\vec{r}_i, \quad d' L_R = \sum_{i=1}^n \vec{R}_i \cdot d\vec{r}_i. \quad (7.19)$$

Zależność (7.18) określa prawo zmienności energii kinetycznej układu punktów materialnych, które można sformułować jako:

- **Przyrost energii kinetycznej układu materialnego jest równy sumie elementarnych prac wykonanych przez siły zewnętrzne czynne, siły wewnętrzne oraz siły reakcji działające na poszczególne punkty materialne układu.**

7.6 Pęd układu punktów materialnych

Pęd układu punktów materialnych definiuje się jako sumę iloczynów mas (m_i) i wektorów prędkości \vec{v}_i wszystkich punktów materialnych należących do układu. Można go zapisać jako

$$\vec{Q} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i. \quad (7.20)$$

Korzystając z zależności (7.4), to jest

$$m \vec{r}_C = \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i. \quad (7.21)$$

można przedstawić pęd układu w formie

$$\vec{Q} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^n m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i = \frac{d}{dt} (m \vec{r}_C) \quad (7.22)$$

lub jako

$$\vec{Q} = m \frac{d\vec{r}_C}{dt} = m \vec{v}_C. \quad (7.23)$$

Pęd układu punktów materialnych – w zależności od prędkości środka masy układu (C) – można więc określić jako

$$\vec{Q} = m \vec{v}_C. \quad (7.24)$$

- **Pęd układu punktów materialnych jest równy iloczynowi masy całego układu i prędkości środka masy tego układu.**

Można powiedzieć, że pęd układu punktów materialnych jest równy pędowi punktu materialnego poruszającego się z prędkością środka masy układu i posiadającego masę wszystkich punktów materialnych.

7.7 Prawo zmienności pędu układu punktów materialnych

Prawo zmienności pędu punktu materialnego ma postać (6.46), to znaczy $\frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{P}$. W przypadku punktu należącego do nieswobodnego układu materialnego ($\vec{P}_i = \vec{F}_i + \vec{W}_i + \vec{R}_i$) można je przedstawić w postaci

$$\frac{d(m_i \vec{v}_i)}{dt} = \vec{F}_i + \vec{W}_i + \vec{R}_i, \quad (i = 1, \dots, n). \quad (7.25)$$

(dla swobodnego układu punktów materialnych $\vec{R}_i = \vec{0}$).

Sumując równania (7.25) dla wszystkich (n) punktów materialnych, otrzymuje się

$$\sum_{i=1}^n \frac{d(m_i \vec{v}_i)}{dt} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i + \sum_{i=1}^n \vec{W}_i + \sum_{i=1}^n \vec{R}_i, \quad (i = 1, \dots, n). \quad (7.26)$$

Lewą stronę równania (7.26) można zapisać jako

$$\sum_{i=1}^n \frac{d(m_i \vec{v}_i)}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i \right) = \frac{d\vec{Q}}{dt}, \quad (7.27)$$

Występująca po prawej stronie (7.26) suma sił wewnętrznych jest równa zeru ($\sum_{i=1}^n \vec{W}_i = \vec{0}$), zatem

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i + \sum_{i=1}^n \vec{R}_i. \quad (7.28)$$

Równanie (7.28) wyraża prawo zmienności pędu układu punktów materialnych:

- **Pochodna pędu układu punktów materialnych względem czasu jest równa sumie sił zewnętrznych czynnych i reakcji działających na ten układ.**

Używając oznaczenia

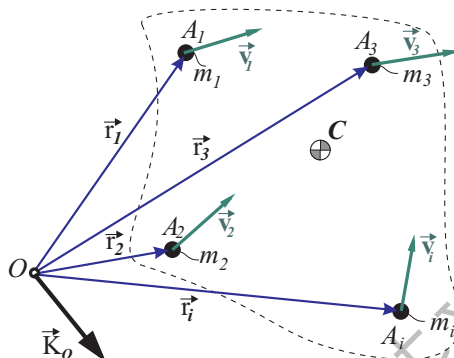
$$\vec{P} = \sum_{i=1}^n \vec{P}_i = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i + \sum_{i=1}^n \vec{R}_i, \quad (7.29)$$

równanie (7.28) można zapisać w postaci

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{P}. \quad (7.30)$$

7.8 Kręt układu punktów materialnych

Drugą – obok pędu – ważną wielkością charakteryzującą dynamikę układu punktów materialnych jest kręt układu względem wybranego punktu (bieguna). Jako bieguna można obrać dowolny – ruchomy lub nieruchomy punkt. W zagadnieniach dynamiki najczęściej wykorzystywany jest kręt względem nieruchomego bieguna (zazwyczaj jest to początek nieruchomego układu współrzędnych $Oxyz$) oraz kręt względem ruchomego bieguna (w tym przypadku często posługujemy się punktem C , który jest środkiem masy układu).



Rysunek 7.8: Kręt względem dowolnego bieguna (O)

Kręt punktu i względem bieguna O (rys. 7.8) jest zdefiniowany jako

$$\vec{K}_{O_i} = \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i = \vec{r}_i \times \vec{Q}_i. \quad (7.31)$$

Kręt układu punktów materialnych względem bieguna O jest równy sumie krętów – względem bieguna O – wszystkich n punktów materialnych, które należą do układu. Przedstawiają to zależności

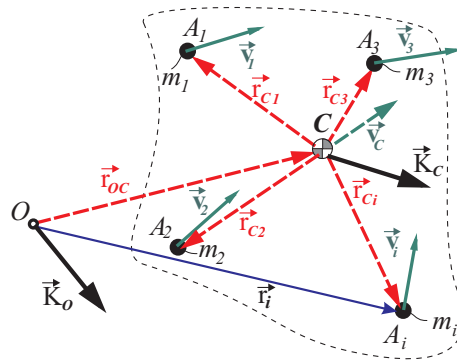
$$\vec{K}_O = \sum_{i=1}^n \vec{K}_{O_i} = \sum_{i=1}^n (\vec{r}_i \times \vec{Q}_i) = \sum_{i=1}^n (\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i). \quad (7.32)$$

Jeśli prędkości \vec{v}_i we wzorach (7.31) i (7.32) oznaczają bezwzględne prędkości punktów materialnych, to \vec{K}_O wyznaczone na ich podstawie nazywane jest krętem bezwzględnym.

Kręt bezwzględny układu punktów materialnych względem środka masy C jest określony przez

$$\vec{K}_C = \sum_{i=1}^n \vec{K}_{C_i} = \sum_{i=1}^n (\vec{r}_{C_i} \times m_i \vec{v}_i), \quad (7.33)$$

przy czym \vec{r}_{Ci} są wektorami poprowadzonymi ze środka masy C do poszczególnych punktów materialnych (rys. 7.9).



Rysunek 7.9: Kręt względem środka masy (C)

W niektórych przypadkach wygodnie jest posługiwać się krętem względnym – wyrażonym poprzez prędkości względne. W ten sposób przedstawiony będzie względny kręt wyznaczony dla środka masy C . Traktując prędkość każdego z punktów materialnych jako sumę

$$\vec{v}_i = \vec{v}_C + \vec{v}_{i/C}, \quad (7.34)$$

gdzie \vec{v}_C jest prędkością środka masy, a $\vec{v}_{i/C}$ prędkością punktu i względem środka masy, otrzymuje się

$$\begin{aligned} \vec{K}_C &= \sum_{i=1}^n (\vec{r}_{Ci} \times m_i (\vec{v}_C + \vec{v}_{i/C})) = \\ &= \sum_{i=1}^n (m_i \vec{r}_{Ci}) \times \vec{v}_C + \sum_{i=1}^n (\vec{r}_{Ci} \times m_i \vec{v}_{i/C}). \end{aligned} \quad (7.35)$$

Sumę $\sum_{i=1}^n (m_i \vec{r}_{Ci})$ występującą w pierwszym składniku po prawej stronie równania można zastąpić – na mocy (7.4) – wyrażeniem $m \vec{v}_C$. Drugi składnik po prawej stronie równania określa kręt względny układu punktów materialnych względem środka masy i będzie oznaczony symbolem $\vec{K}_{C(w)}$

$$\vec{K}_{C(w)} = \sum_{i=1}^n (\vec{r}_{Ci} \times m_i \vec{v}_{i/C}). \quad (7.36)$$

Tym samym zależność (7.35) można przedstawić w postaci

$$\vec{K}_C = \vec{r}_{OC} \times m \vec{v}_C + \vec{K}_{C(w)}. \quad (7.37)$$

Ważny jest jeszcze związek pomiędzy wektorem krętu względem dowolnego bieguna O i wektorem krętu względem środka masy C . Jeśli wektor \vec{r}_i (rys. 7.9) zostanie przedstawiony jako

$$\vec{r}_i = \vec{r}_{OC} + \vec{r}_{Ci} , \quad (7.38)$$

to bezwzględny kręt przy przyjęciu za biegun punktu O można zapisać jako

$$\vec{K}_O = \sum_{i=1}^n (\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i) = \sum_{i=1}^n ((\vec{r}_{OC} + \vec{r}_{Ci}) \times m_i \vec{v}_i) , \quad (7.39)$$

a po przekształceniu

$$\vec{K}_O = \vec{r}_{OC} \times m \vec{v}_C + \vec{K}_C . \quad (7.40)$$

Wykorzystane zostały przy tym zależności $\sum_{i=1}^n (m_i \vec{v}_i) = m \vec{v}_C$ oraz $\sum_{i=1}^n (\vec{r}_{Ci} \times m_i \vec{v}_i) = \vec{K}_C$. Używając jeszcze oznaczenia pędu $Q = m \vec{v}_C$ zależność (7.39) można przedstawić jako

$$\vec{K}_O = \vec{K}_C + \vec{r}_{OC} \times \vec{Q} . \quad (7.41)$$

7.9 Prawo zmienności krętu układu punktów materialnych

Prawo zmienności krętu punktu materialnego ma postać (6.47), to znaczy, że dla każdego punktu (i) należącego do układu $\frac{d\vec{K}_{O_i}}{dt} = \vec{M}_O = \vec{r}_i \times \vec{a}_i$. W przypadku punktu należącego do nieswobodnego układu materialnego ($\vec{P}_i = \vec{F}_i + \vec{W}_i + \vec{R}_i$) można je przedstawić w postaci

$$\frac{d\vec{K}_{O_i}}{dt} = \vec{r}_i \times (\vec{F}_i + \vec{W}_i + \vec{R}_i) . \quad (7.42)$$

Sumując stronami równania (7.42) dla wszystkich (n) punktów, otrzymuje się

$$\sum_{i=1}^n \frac{d\vec{K}_{O_i}}{dt} = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i + \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{W}_i + \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{R}_i . \quad (7.43)$$

Lewą stronę równania (7.43) można zapisać jako

$$\sum_{i=1}^n \frac{d\vec{K}_{O_i}}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n \vec{K}_{O_i} = \frac{d}{dt} \vec{K}_O = \frac{d\vec{K}_O}{dt} . \quad (7.44)$$

Przy rozpatrywaniu prawej strony równania (7.43) ważne jest stwierdzenie, że suma momentów sił wewnętrznych układu materialnego względem dowolnego bieguna jest równa zero (por. str. 103).

Sumując momenty pochodzące od wszystkich sił wewnętrznych \vec{W}_{ij} , przy czym sumowanie to może odbywać się parami $(\vec{W}_{ij}, \vec{W}_{ji})$, otrzymuje się

$$\sum_{i=1}^n \vec{M}_O(\vec{W}_i) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\vec{M}_O(\vec{W}_{ij}) + \vec{M}_O(\vec{W}_{ji})) = \vec{0}. \quad (7.45)$$

Wynika stąd, że suma momentów sił wewnętrznych układu materialnego względem dowolnego bieguna jest równa zero.

Sumę momentów sił zewnętrznych czynnych i sił reakcji można przedstawić jako

$$\sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \vec{M}_{gO}(\vec{F}_i), \quad \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{R}_i = \vec{M}_{gO}(\vec{R}_i). \quad (7.46)$$

Wielkości $\vec{M}_{gO}(\vec{F}_i)$ i $\vec{M}_{gO}(\vec{R}_i)$ są momentami głównymi sił zewnętrznych: czynnych i reakcji względem bieguna O .

Równanie (7.43) można, po uwzględnieniu (7.45) i (7.46), zapisać w postaci

$$\frac{d\vec{K}_O}{dt} = \vec{M}_{gO}(\vec{F}_i) + \vec{M}_{gO}(\vec{R}_i). \quad (7.47)$$

Przedstawia ono *prawo zmienności krętu układu punktów materialnych*, które można sformułować następująco:

- **Pochodna względem czasu krętu układu punktów materialnych względem nieruchomego bieguna jest równa sumie momentów głównych – względem tego bieguna – sił zewnętrznych czynnych i reakcji działających na układ.**

W zapisie skróconym prawo to przedstawia się w formie

$$\frac{d\vec{K}_O}{dt} = \vec{M}_O. \quad (7.48)$$

W podobny sposób można sformułować prawo zmienności krętu względem środka masy układu punktów materialnych. Zgodnie z (7.41)

$$\vec{K}_C = \vec{K}_O - \vec{r}_{OC} \times \vec{Q}. \quad (7.49)$$

Różniczkując (7.49) względem czasu, otrzymuje się

$$\frac{d\vec{K}_C}{dt} = \frac{d\vec{K}_O}{dt} - \frac{d\vec{r}_{OC}}{dt} \times \vec{Q} - \vec{r}_{OC} \times \frac{d\vec{Q}}{dt}. \quad (7.50)$$

Pochodną pędu występującą w tym wzorze można zastąpić – zgodnie z (7.30) – wektorem \vec{P} , który oznacza sumę wszystkich sił zewnętrznych (łącznie z reakcjami).

Jeśli jako biegun O zostanie obrany nieruchomy punkt, to pochodną krętu względem bieguna O można zastąpić wektorem \vec{M}_O (7.48). Ponadto, w przypadku, gdy punkt O jest nieruchomy pochodna $\frac{d\vec{r}_{OC}}{dt}$ jest równa bezwzględnej prędkości punktu C (\vec{v}_C), a zatem

$$\frac{d\vec{r}_{OC}}{dt} \times \vec{Q} = \vec{v}_C \times \vec{Q} = \vec{v}_C \times m \vec{v}_C = \vec{0}. \quad (7.51)$$

Zależność (7.50) przyjmuje w takim przypadku formę

$$\frac{d\vec{K}_C}{dt} = \vec{M}_O - \vec{r}_{OC} \times \vec{P}. \quad (7.52)$$

Dalsze uproszczenie zapisu tego prawa uzyskuje się po wykorzystaniu związku (2.68), to znaczy

$$\vec{M}_{gC} = \vec{M}_{gO} - \vec{r}_{OC} \times \vec{S}. \quad (7.53)$$

W ten sposób otrzymuje się prawo zmienności krętu względem środka masy o postaci

$$\frac{d\vec{K}_C}{dt} = \vec{M}_C. \quad (7.54)$$

Zależność (7.54) przedstawia *prawo zmienności krętu układu punktów materialnych względem środka masy*, które można sformułować następująco:

- **Pochodna względem czasu krętu układu punktów materialnych względem środka masy jest równa sumie momentów głównych – względem środka masy – sił zewnętrznych czynnych i reakcji działających na układ.**

W zapisie rozwiniętym prawo to można przedstawić

$$\frac{d\vec{K}_C}{dt} = \vec{M}_{gC}(\vec{F}_i) + \vec{M}_{gC}(\vec{R}_i). \quad (7.55)$$

7.10 Równania dynamiki układu punktów materialnych

Do wyprowadzenia równań opisujących ruch układu punktów materialnych pod działaniem obciążeń zewnętrznych (czynnych i biernych) wykorzystane bę-

dą zależności określające zmianę pędu i zmianę krętu układu materialnego względem układu inercjalnego – to jest:

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i + \sum_{i=1}^n \vec{R}_i, \quad \frac{d\vec{K}_O}{dt} = \vec{M}_{gO}(\vec{F}_i) + \vec{M}_{gO}(\vec{R}_i). \quad (7.56)$$

\vec{Q} oznacza wektor pędu punktów materialnych, natomiast \vec{K}_O jest wektorem krętu układu punktów względem nieruchomego bieguna O . Wektory stojące po prawych stronach równań oznaczają: wektor główny (sumę) wszystkich sił zewnętrznych czynnych ($\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$) i wektor główny sił reakcji więzów ($\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{R}_i$) oraz moment główny (sumę) momentów wszystkich sił zewnętrznych czynnych ($\vec{M}_{gO}(\vec{F}_i)$) i moment główny sił reakcji więzów ($\vec{M}_{gO}(\vec{R}_i)$) względem nieruchomego bieguna O .

Równania (7.56) mogą być zapisane w zwartej postaci jako:

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \sum_{i=1}^n \vec{P}_i = \vec{P}, \quad \frac{d\vec{K}_O}{dt} = \vec{M}_{gO}, \quad (7.57)$$

przy czym \vec{P} oznacza wektor główny wszystkich sił zewnętrznych, a \vec{M}_{gO} moment główny tych sił względem nieruchomego bieguna O .

Przy wyprowadzaniu równań ruchu dla ciała sztywnego wykorzystywane jest prawo zmienności krętu względem środka masy (położonego w punkcie C) układu. Wyraża się ono zależnością

$$\frac{d\vec{K}_C}{dt} = \vec{M}_{gC}(\vec{F}_i) + \vec{M}_{gC}(\vec{R}_i) \quad (7.58)$$

lub, krótko

$$\frac{d\vec{K}_C}{dt} = \vec{M}_{gC}. \quad (7.59)$$

7.11 Prawo ruchu środka masy układu punktów materialnych

Pęd układu punktów materialnych – zgodnie ze wzorem (7.24) – można przedstawić jako

$$\vec{Q} = m \vec{v}_C. \quad (7.60)$$

Podstawiając (7.60) do (7.56), otrzymuje się

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \frac{d(m\vec{v}_C)}{dt} = m\vec{a}_C = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i + \sum_{i=1}^n \vec{R}_i. \quad (7.61)$$

Zastępując $\sum_{i=1}^n \vec{F}_i + \sum_{i=1}^n \vec{R}_i$ wektorem głównym sił zewnętrznych \vec{P} , otrzymuje się

$m\vec{a}_C = \vec{P}.$	(7.62)
-------------------------	--------

Można zatem sformułować *prawo ruchu środka masy układu punktów materialnych*:

- Środek masy układu punktów materialnych porusza się tak, jak punkt materialny o masie równej masie wszystkich punktów materialnych, do którego przyłożone są wszystkie siły zewnętrzne działające na układ.

Równanie (7.62) w zapisie skalarnym ma postać:

$$\begin{aligned} m a_{Cx} &= P_x = \sum_{i=1}^n F_{ix} + \sum_{i=1}^n R_{ix}, \\ m a_{Cy} &= P_y = \sum_{i=1}^n F_{iy} + \sum_{i=1}^n R_{iy}, \\ m a_{Cz} &= P_z = \sum_{i=1}^n F_{iz} + \sum_{i=1}^n R_{iz}. \end{aligned} \quad (7.63)$$

Rozdział 8

DYNAMIKA CIAŁA SZTYWNEGO

Ciało sztywne można traktować jako szczególny przypadek układu punktów materialnych. Jego szczególność polega na tym, że podział ciała na nieskończenie małe elementy, które mogą być traktowane jako punkty materialne jest umowny (albo myślowy – czyli dokonany w myśli). Drugą charakterystyczną cechą takiego układu jest niezmienna odległość pomiędzy poszczególnymi punktami ciała sztywnego. Dzięki takiemu sposobowi podejścia prawa i zależności, które zostały wyprowadzone dla układu punktów materialnych mogą być stosowane dla ciała sztywnego. Różnice, jakie pojawiają się w zapisie praw mechaniki dla układu punktów materialnych i dla ciała sztywnego wynikają z przejścia od układu dyskretnego (złożonego z punktów) do układu ciągłego (jakim jest ciało). W miejsce sum występujących w zależnościach opisujących układ punktów dla ciała pojawiają się całki.

Analiza ruchu ciała sztywnego może być dokonana na podstawie praw zmienności pędu i krętu lub prawa zmienności energii kinetycznej¹. Równania ruchu ciała sztywnego będą tu wyprowadzone na podstawie praw zmienności pędu i krętu. Zanim jednak wyznaczony zostanie pęd i kręt ciała sztywnego zajmiemy się określeniem energii kinetycznej ciała.

8.1 Energia kinetyczna ciała sztywnego – zależności ogólne

Energia kinetyczna pojedynczego punktu materialnego o masie m_i została wcześniej określona jako $E_i = \frac{1}{2}m_i v_i^2$, a energia kinetyczna układu n punktów

¹Inne metody analizy dynamiki ciała są omawiane w ramach przedmiotu *mechanika analityczna*.

materiałnych w postaci sumy energii poszczególnych punktów

$$E = \sum_{i=1}^n E_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_i^2 . \quad (8.1)$$

Traktując ciało sztywne jako układ nieskończenie wielu ($n \rightarrow \infty$) punktów materiałnych, o masach m_i i prędkościach \vec{v}_i (których wartości są równe v_i), można wyrazić energię ciała sztywnego jako

$$E = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2} m_i v_i^2 . \quad (8.2)$$

Wyznaczając granicę do jakiej dąży energia (E) tak rozumianego układu $n \rightarrow \infty$ punktów materiałnych, przy założeniu, że masa każdego z punktów dąży do zera ($m_i \rightarrow 0$), otrzymuje się

$$E = \lim_{m_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \int_V v^2 dm , \quad (8.3)$$

przy czym \int_V jest symbolem całkowania dokonanego po całym obszarze rozpatrywanego ciała sztywnego.

Dla ciała sztywnego zbudowanego z niejednorodnego materiału o gęstości ρ , masę elementu o objętości dV można przedstawić jako $dm = \rho dV$, natomiast masę ciała wyznacza się na drodze całkowania

$$m = \int_V dm = \int_V \rho dV \equiv \iiint_V \rho dx dy dz . \quad (8.4)$$

(W przypadku materiału jednorodnego – o jednakowej gęstości ρ – masa ciała jest równa $m = \rho V$).

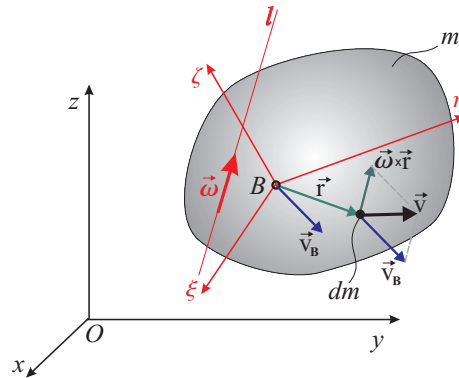
Podstawiając $dm = \rho dV = \rho dx dy dz$ do równania (8.3), otrzymuje się

$$E = \frac{1}{2} \int_V \rho v^2 dV = \frac{1}{2} \iiint_V \rho v^2 dx dy dz . \quad (8.5)$$

Prędkość nieskończenie małego elementu o objętości dV (masie dm i wymiarach dx, dy, dz), należącego do ciała sztywnego, wyznacza się tak, jak prędkość punktu ciała sztywnego. Zgodnie z tym, co zostało przedstawione w punkcie 5.3.2, prędkość dowolnego punktu (A) wyznacza się na podstawie zależności (5.90), to znaczy

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{\omega} \times \vec{r}_{BA} , \quad (8.6)$$

przy czym $\vec{\omega}$ oznacza wektor chwilowej prędkości kątowej ciała. Wektor $\vec{\omega}$ ma kierunek osi chwilowego obrotu (l) zaznaczonej na rys. 8.1.



Rysunek 8.1: Prędkość obranego bieguna (B) oraz dowolnie wybranego punktu ciała sztywnego

W dalszym ciągu opisu, dla oznaczenia prędkości elementarnego wycinka ciała będzie użyty wektor \vec{v} (bez żadnego indeksu), a dla oznaczenia jego położenia względem obranego bieguna wektor \vec{r} , tak jak na rys. 8.1.

Korzystając ze wzoru (8.6) napiszemy

$$\vec{v} = \vec{v}_B + \vec{\omega} \times \vec{r}, \quad (8.7)$$

natomiast kwadrat prędkości (v^2) tego elementu można wyznaczyć na podstawie iloczynu skalarnego ($v^2 = \vec{v} \cdot \vec{v}$) jako

$$v^2 = (\vec{v}_B + \vec{\omega} \times \vec{r}) \cdot (\vec{v}_B + \vec{\omega} \times \vec{r}). \quad (8.8)$$

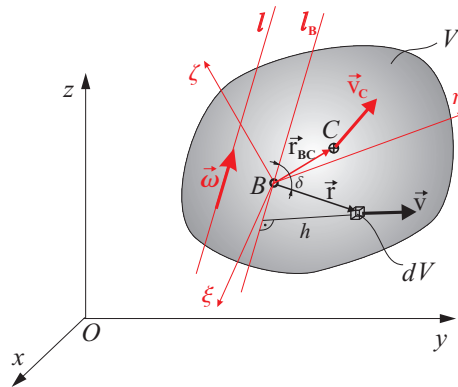
Energję kinetyczną ciała sztywnego można przedstawić w formie

$$E = \frac{1}{2} \int_V \rho (\vec{v}_B + \vec{\omega} \times \vec{r}) \cdot (\vec{v}_B + \vec{\omega} \times \vec{r}) dV = E_1 + E_2 + E_3, \quad (8.9)$$

gdzie:

$$E_1 = \frac{1}{2} \int_V \rho \vec{v}_B \cdot \vec{v}_B dV = \frac{1}{2} \vec{v}_B \cdot \vec{v}_B \int_V \rho dV = \frac{1}{2} m v_B^2, \quad (8.10)$$

$$\begin{aligned} E_2 &= \frac{1}{2} \cdot 2 \int_V \rho \vec{v}_B \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}) dV = \vec{v}_B \cdot (\vec{\omega} \times (\int_V \rho \vec{r} dV)) = \\ &= m \vec{v}_B \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_{BC}) = m \begin{vmatrix} v_{Bx} & v_{By} & v_{Bz} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ r_{BCx} & r_{BCy} & r_{BCz} \end{vmatrix}, \end{aligned} \quad (8.11)$$



Rysunek 8.2: Prędkość (\vec{v}) elementu (dV) oraz położenie i prędkość środka masy (C) ciała sztywnego

$$\begin{aligned}
 E_3 &= \frac{1}{2} \int_V \rho (\vec{\omega} \times \vec{r}) \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}) dV = \frac{1}{2} \int_V \rho (\omega r \sin \delta)^2 dV = \\
 &= \frac{1}{2} \omega^2 \int_V \rho (r \sin \delta)^2 dV = \frac{1}{2} \omega^2 \int_V \rho h^2 dV = \frac{1}{2} J_{l_B} \omega^2 . \quad (8.12)
 \end{aligned}$$

Przy przekształceniu wzoru (8.11) została wykorzystana zależność $\int_V \rho \vec{r} dV = m \vec{r}_{BC}$, która była wyprowadzona wcześniej (to znaczy, przy określaniu położenia środka masy ciała) w postaci

$$\vec{r}_{BC} = \frac{\int_V \rho \vec{r} dV}{\int_V \rho dV} = \frac{\int_V \rho \vec{r} dV}{m} . \quad (8.13)$$

Punkt oznaczony symbolem C na rys. 8.2 jest środkiem masy ciała, a jego położenie względem bieguna jest określone za pomocą wektora \vec{r}_{BC} . Do wyznaczenia iloczynów wektorów \vec{v}_B , $\vec{\omega}$, \vec{r}_{BC} , występujących we wzorze (8.11), zostały użyte zależności, które zawierają rzuty tych wektorów na osie prostokątnego układu współrzędnych xyz . Alternatywnie można by wykorzystać do tych obliczeń układ $\xi\eta\zeta$ i współrzędne wektorów w układzie $\xi\eta\zeta$.

Kąt δ we wzorze (8.12) oznacza kąt pomiędzy kierunkami wektorów $\vec{\omega}$ i \vec{r} (rys. 8.2), a h jest odległością rozpatrywanego punktu ciała od prostej l_B , przechodzącej przez punkt B i równoległej do prostej l (która jest osią chwilowego obrotu). Symbol J_{l_B} oznacza masowy moment bezwładności ciała względem prostej l_B .

Wielkości nazywane masowymi momentami bezwładności (oraz masowe momenty dewiacyjne) ciała są omówione w następnym rozdziale.

8.2 Masowe momenty bezwładności i masowe momenty dewiacyjne

8.2.1 Masowe momenty bezwładności i masowe momenty dewiacyjne ciała sztywnego

Masowe momenty bezwładności ciała definiuje się względem dowolnych osi, płaszczyzn czy punktów. Podane tu definicje będą odnosić się do układu współrzędnych xyz (rys. 8.3). W analogiczny sposób definiuje się momenty bezwładności oraz momenty dewiacyjne w układzie współrzędnych $x'y'z'$ czy $\xi\eta\zeta$.

Masowe momenty bezwładności ciała sztywnego i jego masowe momenty dewiacyjne są zdefiniowane jako sumy – odpowiednich momentów – obejmujące wszystkie punkty ciała sztywnego. Wyznacza się je jako granice do jakiej dąży suma odpowiednich momentów bezwładności (momentów dewiacyjnych) układu n punktów materialnych ($n \rightarrow \infty$), przy założeniu, że masa każdego z punktów dąży do zera ($m_i \rightarrow 0$). Tak określona granica oznacza całkę wyznaczoną dla całego obszaru rozpatrywanego ciała sztywnego.

Masowy moment bezwładności ciała sztywnego względem bieguna O jest równy sumie iloczynów mas (m_i) wszystkich punktów materialnych należących do ciała i kwadratów odległości tych punktów od bieguna O , to znaczy

$$J_O = \lim_{m_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{\infty} m_i d_i^2 = \int_V d^2 dm = \iiint_V \rho (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz . \quad (8.14)$$

Masowy moment bezwładności ciała sztywnego względem płaszczyzny jest równy sumie iloczynów mas (m_i) wszystkich punktów materialnych należących do ciała i kwadratów odległości tych punktów od tej płaszczyzny, to znaczy

$$J_{(xy)} = \lim_{m_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{\infty} m_i z_i^2 = \int_V z^2 dm = \iiint_V \rho z^2 dx dy dz , \quad (8.15)$$

podobnie:

$$J_{(yz)} = \int_V x^2 dm = \iiint_V \rho x^2 dx dy dz , \quad (8.16)$$

$$J_{(zx)} = \int_V y^2 dm = \iiint_V \rho y^2 dx dy dz .$$

Masowy moment bezwładności ciała sztywnego względem osi jest równy sumie iloczynów mas (m_i) wszystkich punktów materialnych należących do ciała i kwadratów odległości tych punktów od osi

$$J_x = \lim_{m_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{\infty} m_i e_{ix}^2 = \int_V (y^2 + z^2) dm = \iiint_V \rho (y^2 + z^2) dx dy dz , \quad (8.17)$$

podobnie:

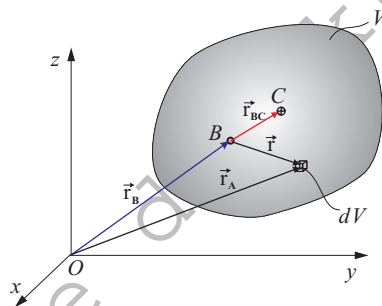
$$J_y = \int_V (x^2 + z^2) dm = \iiint_V \rho (x^2 + z^2) dx dy dz , \quad (8.18)$$

$$J_z = \int_V (x^2 + y^2) dm = \iiint_V \rho (x^2 + y^2) dx dy dz . \quad (8.19)$$

Z definicji (8.14), (8.15) i (8.17) wynikają zależności pomiędzy momentem bezwładności J_O względem punktu (bieguna O), momentami względem płaszczyzn $J_{(xy)}$, $J_{(yz)}$, $J_{(zx)}$ i momentami względem osi J_x , J_y , J_z dla ciała sztywnego, które są analogiczne do podanych dla punktu materialnego

$$\begin{aligned} J_O &= J_{(xy)} + J_{(yz)} + J_{(zx)} = \frac{1}{2} (J_x + J_y + J_z) = \\ &= \iiint_V \rho (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz . \end{aligned} \quad (8.20)$$

Ważną zależnością wykorzystywaną przy obliczaniu momentów bezwładności jest związek pomiędzy momentami bezwładności względem dwóch punktów. Wyprowadzimy najpierw zależność pomiędzy momentami bezwładności ciała względem punktu O i B (rys. 8.3).



Rysunek 8.3: Oznaczenia wykorzystywane przy definiowaniu masowych momentów bezwładności względem punktów O i B

Moment bezwładności ciała względem bieguna O – zgodnie z definicją określoną wzorem (8.14) – można przedstawić jako

$$J_O = \int_V d^2 dm = \int_V r_A^2 dm = \int_V \rho r_A^2 dV = \int_V \rho \vec{r}_A \cdot \vec{r}_A dV . \quad (8.21)$$

Przedstawiając wektor \vec{r}_A w postaci sumy wektorów \vec{r}_B i \vec{r} ($\vec{r}_A = \vec{r}_B + \vec{r}$), a kwadrat długości wektora \vec{r}_A za pomocą iloczynu skalarnego $r_A^2 = \vec{r}_A \cdot \vec{r}_A$ jako

$$r_A^2 = \vec{r}_A \cdot \vec{r}_A = (\vec{r}_B + \vec{r}) \cdot (\vec{r}_B + \vec{r}) = \vec{r}_B \cdot \vec{r}_B + 2 \vec{r}_B \cdot \vec{r} + \vec{r} \cdot \vec{r} \quad (8.22)$$

otrzymuje się

$$\begin{aligned}
 J_O &= \int_V \rho (\vec{r}_B \cdot \vec{r}_B + 2\vec{r}_B \cdot \vec{r} + \vec{r} \cdot \vec{r}) dV = \\
 &= \vec{r}_B \cdot \vec{r}_B \int_V \rho dV + 2m \vec{r}_B \cdot \left(\int_V \rho \vec{r} dV \right) + \int_V \rho \vec{r} \cdot \vec{r} dV .
 \end{aligned} \tag{8.23}$$

Wykorzystując zależność (8.13) oraz uwzględniając definicję momentu bezwładności ciała względem punktu B ($J_B = \int_V \rho \vec{r} \cdot \vec{r} dV$), można stwierdzić, że

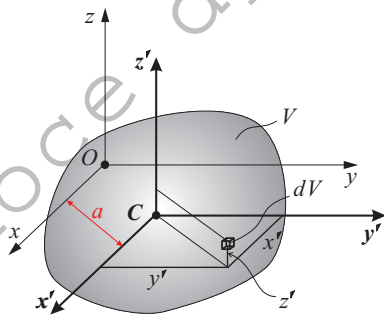
$$J_O = m \vec{r}_B \cdot \vec{r}_B + 2m \vec{r}_B \cdot \vec{r}_{BC} + J_B . \tag{8.24}$$

Zależność (8.24) przyjmuje prostszą postać, jeśli za biegun – w miejsce punktu B – zostanie obrany środek masy ciała C ($B \rightarrow C$). Wówczas $\vec{r}_B \rightarrow \vec{r}_C$, $\vec{r}_{BC} \rightarrow 0$, natomiast

$$J_O = m \vec{r}_C \cdot \vec{r}_C + J_C = J_C + m r_C^2 . \tag{8.25}$$

W podobny sposób wyprowadza się wzór określający związek pomiędzy momentami bezwładności względem dwu równoległych do siebie osi. Jest on nazywany wzorem Steinera lub Huygensa.

- **Moment bezwładności względem dowolnej osi można wyznaczyć, dodając do momentu bezwładności, określonego względem osi równoległej i przechodzącej przez środek masy, iloczyn masy ciała i kwadratu odległości pomiędzy osiami.**



Rysunek 8.4: Wyznaczanie momentów bezwładności względem osi równoległych x i x'

Przykładowo, dla osi Ox (rys. 8.4) – na podstawie podanego twierdzenia – otrzymuje się

$$J_{Ox} = J_{Cx'} + m a^2, \quad (8.26)$$

gdzie a oznacza odległość pomiędzy równoległymi osiami Ox i Cx' .

Masowym momentem dewiacyjnym (odśrodkowym, zboczenia) ciała nazywa się, wyznaczoną dla wszystkich punktów materialnych należących do ciała, sumę iloczynów wielkości: mas punktów i ich odległości od dwu płaszczyzn, to znaczy:

$$J_{xy} = \lim_{m_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{\infty} m_i x_i y_i = \int_V x y dm = \iiint_V \rho x y dx dy dz \quad (8.27)$$

oraz

$$J_{yz} = \int_V y z dm = \iiint_V \rho y z dx dy dz, \quad (8.28)$$

$$J_{zx} = \int_V z x dm = \iiint_V \rho z x dx dy dz. \quad (8.29)$$

Momenty bezwładności i momenty dewiacyjne ciał o nieregularnych kształtach można wyznaczyć (na podstawie tych samych reguł) przy pomocy komputera – wykorzystując do tego celu specjalne oprogramowanie. Procedury służące do wyznaczania momentów bezwładności są zawarte w systemach wspomagających projektowanie (systemy CAD, CAE), bądź wspomagających obliczenia (np. systemy analizy konstrukcji wykorzystujące metodę elementu skończonego, programy do analizy dynamiki układów mechanicznych). Spośród wielu istniejących programów można wymienić kilka, znanych i wykorzystywanych u nas systemów, takich jak AutoCad, Solid Edge, ANSYS, Working Model.

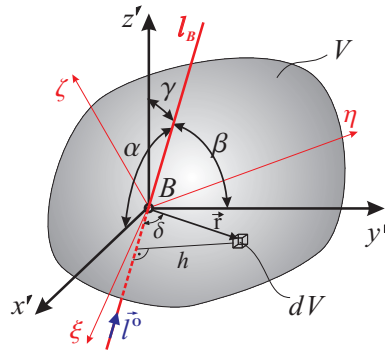
Możliwe jest też doświadczalne określenie masowych momentów bezwładności dla gotowych elementów maszyn i urządzeń. Polega ono zwykle na pomiarze okresu wahań badanego ciała, a następnie na pośrednim obliczeniu momentu bezwładności względem osi wahań.

Jednostką masowych momentów bezwładności i masowych momentów dewiacyjnych jest kgm^2 .

8.2.2 Masowy moment bezwładności ciała względem prostej o dowolnym kierunku

Symbol J_{lB} użyty we wzorze (8.12) oznacza masowy moment bezwładności ciała względem prostej l_B .

$$J_{lB} = \int_V \rho h^2 dV = \int_V \rho (r \sin \delta)^2 dV. \quad (8.30)$$



Rysunek 8.5: Położenie osi $x'y'z'$ i kąty α, β i γ określające orientację prostej l_B

Prawą stroną wzoru (8.30) można przekształcić w taki sposób, by masowy moment bezwładności ciała względem dowolnej prostej (l_B) wyrazić poprzez momenty bezwładności względem osi układu współrzędnych i cosinusów kierunkowych prostej l_B . W tym celu wyrażenie $(r \sin \delta)^2$ zostanie przedstawione w postaci iloczynów skalarnych wektorów \vec{r} i \vec{l}^0 (rys. 8.5) w formie

$$(r \sin \delta)^2 = r^2 - r^2 \cos^2 \delta = \vec{r} \cdot \vec{r} - (\vec{r} \cdot \vec{l}^0)^2, \quad (8.31)$$

przy czym wektor \vec{l}^0 o współrzędnych $(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ oznacza wektor jednostkowy o kierunku prostej l_B . Dalsze przekształcenie (8.31)

$$\vec{r} \cdot \vec{r} - (\vec{r} \cdot \vec{l}^0)^2 = (x'^2 + y'^2 + z'^2) - (x' \cos \alpha + y' \cos \beta + z' \cos \gamma)^2 \quad (8.32)$$

i wykorzystanie tożsamości $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma \equiv 1$ do podstawienia:

$$\begin{aligned} x'^2 &= x'^2 (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma), \\ y'^2 &= y'^2 (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma), \\ z'^2 &= z'^2 (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma), \end{aligned} \quad (8.33)$$

prowadzi do zależności

$$\begin{aligned} \vec{r} \cdot \vec{r} - (\vec{r} \cdot \vec{l}^0)^2 &= x'^2 \cos^2 \beta + x'^2 \cos^2 \gamma + y'^2 \cos^2 \alpha + y'^2 \cos^2 \gamma + \\ &+ z'^2 \cos^2 \alpha + z'^2 \cos^2 \beta - 2x'y' \cos \alpha \cos \beta + \\ &- 2x'z' \cos \alpha \cos \gamma - 2y'z' \cos \beta \cos \gamma, \end{aligned} \quad (8.34)$$

która po podstawieniu do (8.30) i wykorzystaniu oznaczeń:

$$\begin{aligned} J_{x'} &= \int_V (y'^2 + z'^2) dm, & J_{y'} &= \int_V (x'^2 + z'^2) dm, & J_{z'} &= \int_V (x'^2 + y'^2) dm, \\ J_{x'y'} &= \int_V x'y' dm, & J_{y'z'} &= \int_V y'z' dm, & J_{z'x'} &= \int_V z'x' dm, \end{aligned} \quad (8.35)$$

prowadzi do równania

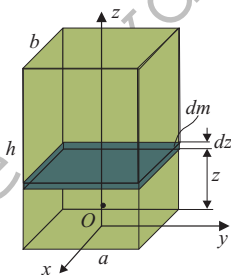
$$J_{iB} = J_{x'} \cos^2 \alpha + J_{y'} \cos^2 \beta + J_{z'} \cos^2 \gamma - 2J_{x'y'} \cos \alpha \cos \beta - 2J_{y'z'} \cos \beta \cos \gamma - 2J_{z'x'} \cos \alpha \cos \gamma. \quad (8.36)$$

Określa ono masowy moment bezwładności ciała względem prostej l_B za pomocą innych wielkości niż wzór (8.30). Wielkości oznaczone symbolami $J_{x'}$, $J_{y'}$, $J_{z'}$ są momentami bezwładności ciała względem osi x' , y' i z' , które są równoległe do osi xyz i przechodzą przez bieżun (B). Wielkości, które zostały oznaczone jako $J_{x'y'}$, $J_{y'z'}$, $J_{z'x'}$ są masowymi momentami dewiacyjnymi ciała względem osi $x'y'z'$. Kąty α , β i γ są kątami pomiędzy osiami $x'y'z'$ a prostą l_B (rys. 8.5).

Podane niżej definicje momentów bezwładności względem płaszczyzny, prostej (osi) i punktu oraz zależności pomiędzy tymi wielkościami pozwalają na wyznaczenie momentów bezwładności dla ciał o elementarnych kształtach (np. prostopadłościan, walec, kula)². Pozwalają też na określenie masowych momentów bezwładności i momentów dewiacyjnych dla ciał o bardziej skomplikowanych, ale regularnych kształtach – poprzez podział na ciała elementarne i sumowanie momentów bezwładności elementarnych ciał.

8.2.3 Masowe momenty bezwładności i masowe momenty dewiacyjne wybranych ciał sztywnych

Dla zilustrowania sposobu wyznaczania masowych momentów bezwładności ciała sztywnego przedstawione zostały obliczenia wybranych brył: prostopadłościanu (o wymiarach a , b , h) i walca (o wymiarach R , h).



Rysunek 8.6: Prostopadłościan – wyznaczenie momentu bezwładności względem płaszczyzny xy

Moment bezwładności prostopadłościanu względem płaszczyzny xy można wyznaczyć na podstawie zależności (8.15). Przyjmując, że gęstość materiału jest

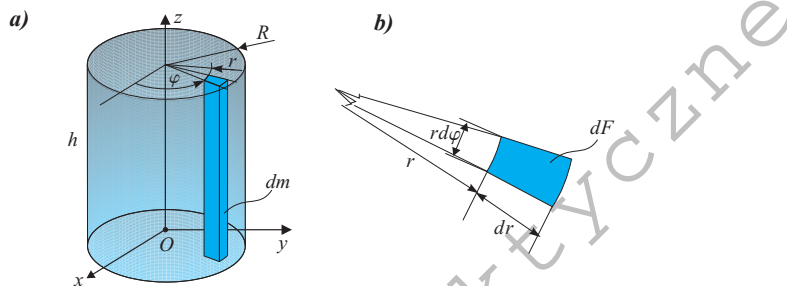
²Należy zwrócić uwagę, że wielkości analogiczne do masowych momentów bezwładności są wykorzystywane przy obliczaniu wytrzymałości elementów konstrukcji. Różnica polega jedynie na tym, że w wytrzymałości materiałów używa się momentów bezwładności powierzchni, a w analizie dynamiki ciała – momentów bezwładności masy.

równa ρ w każdym punkcie ciała, jego masę można zapisać jako $m = \rho abh$. Po stwierdzeniu, że momenty bezwładności względem płaszczyzny xy , dla wszystkich punktów leżących w płaszczyźnie równoległej do płaszczyzny xy , są jednakowe, wystarczy określić wartość momentu bezwładności ($dJ_{(xy)}$) dla elementarnej warstwy o masie $dm = \rho ab dz$ (rys. 8.6)

$$dJ_{(xy)} = z^2 dm = z^2 \rho ab dz, \quad (8.37)$$

a następnie scałkować w granicach od 0 do h

$$J_{(xy)} = \int_V z^2 dm = \int_0^h z^2 \rho ab dz = \rho ab \int_0^h z^2 dz = \rho ab \frac{z^3}{3} \Big|_0^h = m \frac{h^2}{3}. \quad (8.38)$$



Rysunek 8.7: Walec – wyznaczanie momentu bezwładności względem osi z

Moment bezwładności walca względem osi z można wyznaczyć w sposób zilustrowany na rys. 8.7. Dziąc walec na elementy pokazane na rys. 8.7a o powierzchni przekroju $dF = r d\varphi dr$, objętości $dV = h dF = h r d\varphi dr$ i masie równej $dm = \rho dF h = \rho h r d\varphi dr$, można określić momenty bezwładności takich elementów jako

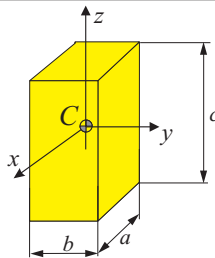
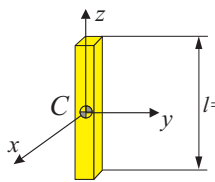
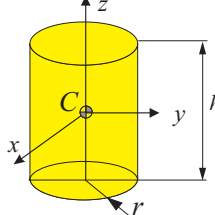
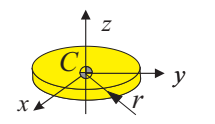
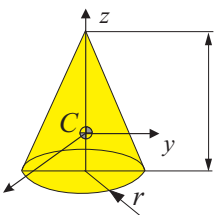
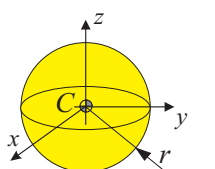
$$dJ_z = dm r^2 = \rho h r d\varphi dr r^2 = \rho h r^3 dr d\varphi. \quad (8.39)$$

Moment bezwładności całego walca jest granicą, do jakiej dąży suma momentów bezwładności takich elementarnych wycinków, przy założeniu, że wymiary elementów (dr i $d\varphi$) dążą do zera

$$J_z = \int_0^{2\pi} \int_0^R \rho h r^3 dr d\varphi = \rho h \int_0^{2\pi} \left(\frac{r^4}{4} \Big|_0^R \right) d\varphi = 2\pi \rho h \frac{R^4}{4}. \quad (8.40)$$

Podstawiając $m = \rho \pi R^2 h$, otrzymuje się

$$J_z = m \frac{R^2}{2}. \quad (8.41)$$

Nazwa	Masowe momenty bezwładności
Prostopadłościan 	$J_x = m \frac{b^2 + c^2}{12}$ $J_y = m \frac{a^2 + c^2}{12}$ $J_z = m \frac{a^2 + b^2}{12}$
Pręt - prostopadłościan o wymiarach: $a \rightarrow 0$ $b \rightarrow 0$ 	$J_x = J_y = m \frac{l^2}{12}$ $J_z = 0$
Walec 	$J_x = m \left(\frac{r^2}{4} + \frac{h^2}{12} \right)$ $J_y = m \left(\frac{r^2}{4} + \frac{h^2}{12} \right)$ $J_z = m \frac{r^2}{2}$
Krążek - walec o wymiarze $h \rightarrow 0$ 	$J_x = J_y = m \frac{r^2}{4}$ $J_z = m \frac{r^2}{2}$
Stożek 	$J_x = m \frac{12r^2 + 3h^2}{80}$ $J_y = m \frac{12r^2 + 3h^2}{80}$ $J_z = \frac{3}{10} m r^2$
Kula 	$J_x = \frac{2}{5} m r^2$ $J_y = \frac{2}{5} m r^2$ $J_z = \frac{2}{5} m r^2$

Rysunek 8.8: Masowe momenty bezwładności brył względem osi przechodzących przez środek masy

8.3 Energia kinetyczna ciała sztywnego – przypadki szczególne

Wzory (8.9)–(8.12) pozwalają na wyznaczenie energii kinetycznej ciała sztywnego na podstawie wartości: prędkości dowolnego punktu ciała (bieguna B), prędkości kątowej ciała (ω) oraz wektora określającego położenie środka masy (r_{BC}). Ponadto wymagana jest znajomość wartości masy ciała i masowego momentu bezwładności ciała (J_{IB}) względem prostej l_B (rys. 8.2), przechodzącej przez biegun (B) i równoległej do osi chwilowego obrotu (l). Zależność określającą energię ciała w takim przypadku można przedstawić w postaci

$$E = \frac{1}{2} m v_B^2 + m \begin{vmatrix} v_{Bx} & v_{By} & v_{Bz} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ r_{BCx} & r_{BCy} & r_{BCz} \end{vmatrix} + \frac{1}{2} J_{IB} \omega^2 . \quad (8.42)$$

Na podstawie tej ogólnej zależności można określić energię kinetyczną ciała w szczególnych przypadkach ruchu ciała.

Dla ciała poruszającego się ruchem postępowym ($\omega \equiv 0$, $v_B \equiv v_C \equiv v$) otrzymuje się

$$E = \frac{1}{2} m v^2 , \quad (8.43)$$

gdzie v oznacza prędkość dowolnego punktu ciała.

Dla ciała poruszającego się ruchem obrotowym – jeśli jako biegun zostanie obrany punkt leżący na nieruchomej osi obrotu (l) ciała, to $v_B \equiv 0$ – otrzymuje się

$$E = \frac{1}{2} J_i \omega^2 . \quad (8.44)$$

gdzie J_i oznacza masowy moment bezwładności ciała względem nieruchomej osi obrotu (l).

Analogiczna, do podanej wzorem (8.44), zależność może być wykorzystana przy określaniu energii ciała poruszającego się dowolnym ruchem, w przypadku, gdy znane jest położenie osi chwilowego obrotu (i moment bezwładności wokół tej osi) oraz wiadomo, że prędkość punktu leżącego na osi chwilowego obrotu jest równa zeru. Przyjmując za biegun punkt leżący na osi chwilowego obrotu i wiedząc, że $v_B = 0$ otrzymuje się³

$$E = \frac{1}{2} J_{IB} \omega^2 , \quad (8.45)$$

³Punkty leżące na osi chwilowego obrotu nie zawsze mają prędkość równą zeru. W *ruchu śrubowym* prędkości punktów związanych z poruszającym się ciałem i leżących na osi chwilowego obrotu mają prędkość różną od zera. Kierunek wektora prędkości tych punktów pokrywa się z kierunkiem osi chwilowego obrotu.

przy czym J_{IB} oznacza masowy moment bezwładności ciała względem osi chwilowego obrotu (l_B).

Warto zwrócić uwagę na możliwość wykorzystania zależności (8.45) dla ciała poruszającego się ruchem płaskim. W sytuacji, gdy znane jest położenie środka chwilowego obrotu ciała (takiego punktu S , związanego z ciałem poruszającym się ruchem płaskim, którego prędkość jest w danej chwili równa zeru, to jest $v_S = 0$), obierając jako biegun środek chwilowego obrotu, otrzymuje się

$$E = \frac{1}{2} J_{IS} \omega^2, \quad (8.46)$$

przy czym J_{IS} oznacza masowy moment bezwładności ciała względem osi chwilowego obrotu (l) (przechodzącej przez środek chwilowego obrotu (S)).

Na podstawie ogólnej zależności (8.42) można też podać wyrażenie, które umożliwi określenie energii kinetycznej ciała w prostszy sposób. Przyjęcie środka masy (C) jako bieguna oznacza, że $r_{BC} \equiv 0$ oraz $v_B \equiv v_C$. Zatem ze wzoru (8.42) otrzymuje się

$$E = \frac{1}{2} m v_C^2 + \frac{1}{2} J_{IC} \omega^2, \quad (8.47)$$

gdzie J_{IC} oznacza masowy moment bezwładności ciała względem prostej l_C , przechodzącej przez środek masy (C) i równoległej do osi chwilowego obrotu (l).

Zależność (8.47) jest matematycznym sformulowaniem (zapisem) *twierdzenia Koeniga*.

- **Energia kinetyczna ciała sztywnego (o ruchu ogólnym) jest równa sumie energii kinetycznej ciała w ruchu postępowym z prędkością środka masy i energii wynikającej z ruchu obrotowego wokół osi (l_C) przechodzącej przez środek masy – równoległej do osi chwilowego obrotu ciała.**

8.4 Praca sił działających na ciało sztywne

Pracę siły działającej na ciało sztywne wyznacza się na podstawie definicji pracy siły (6.15) albo równoważnemu jej wyrażeniu (6.17), to jest jako

$$d'L = \vec{P} \cdot d\vec{r} = \vec{P} \cdot \vec{v} dt, \quad (8.48)$$

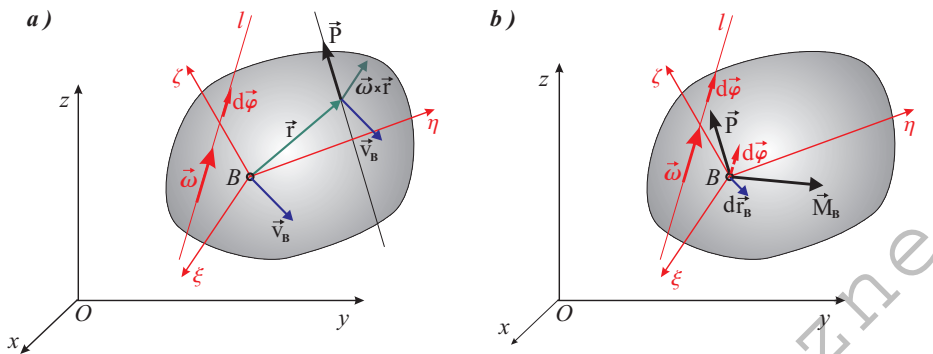
gdzie \vec{v} oznacza prędkość punktu (rys. 8.9), do którego jest przyłożona siła⁴.

W przypadku ciała sztywnego wygodnie jest uzależnić pracę sił działających na ciało od prędkości obranego bieguna \vec{v}_B i prędkości kątowej ciała $\vec{\omega}$. W tym

⁴Zwracamy jeszcze raz uwagę na to, że punkt przyłożenia siły do ciała sztywnego jest pojęciem umownym – może nim być dowolny punkt leżący na prostej działania siły.

celu wykorzystujemy zależność $\vec{v} = \vec{v}_B + \vec{\omega} \times \vec{r}$, która pozwala zapisać (8.48) jako

$$d'L = \vec{P} \cdot (\vec{v}_B + \vec{\omega} \times \vec{r}) dt. \quad (8.49)$$



Rysunek 8.9: Siła (\vec{P}) działająca na ciało sztywne (a) oraz odpowiadające jej obciążenie (\vec{P} i \vec{M}_B) po redukcji do punktu B (b)

Przed wykonaniem dalszych przekształceń wyrażenia na elementarną pracę siły dokonamy kilku pomocniczych operacji. Wyrażenie

$$\vec{v} dt = (\vec{v}_B + \vec{\omega} \times \vec{r}) dt, \quad (8.50)$$

zapiszemy jako

$$\vec{v} dt = \vec{v}_B dt + \vec{\omega} dt \times \vec{r} = d\vec{r}_B + d\vec{\varphi} \times \vec{r}, \quad (8.51)$$

przy czym $d\vec{r}_B$ oznacza elementarne przemieszczenie bieguna, a $d\vec{\varphi}$ elementarny obrót ciała. Wektor $d\vec{\varphi}$ jest nazywany wektorem małego obrotu ciała ($d\varphi$ jest kątem małego obrotu). Wektor $d\vec{r}_B$ ma kierunek wektora \vec{v}_B , a $d\vec{\varphi}$ kierunek $\vec{\omega}$.

Zatem pracę siły \vec{P} działającej na ciało sztywne można przedstawić jako

$$d'L = \vec{P} \cdot (d\vec{r}_B + d\vec{\varphi} \times \vec{r}) = \vec{P} \cdot d\vec{r}_B + \vec{P} \cdot (d\vec{\varphi} \times \vec{r}). \quad (8.52)$$

Jeśli wykorzystamy jeszcze tę własność iloczynu mieszanego wektorów⁵, która pozwala na zmianę kolejności wektorów, to

$$d'L = \vec{P} \cdot d\vec{r}_B + d\vec{\varphi} \cdot (\vec{r} \times \vec{P}) \quad (8.53)$$

⁵Iloczyn mieszany trzech wektorów \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} nie zmienia wartości przy cyklicznej zmianie kolejności wektorów, to znaczy

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}).$$

albo

$$d'L = \vec{P} \cdot d\vec{r}_B + d\vec{\varphi} \cdot \vec{M}_B . \quad (8.54)$$

Elementarną pracę siły \vec{P} działającej na ciało sztywne można więc przedstawić jako

$$d'L = \vec{P} \cdot d\vec{r}_B + \vec{M}_B \cdot d\vec{\varphi} , \quad (8.55)$$

gdzie $d\vec{r}_B$ jest wektorem elementarnego przemieszczenia bieguna, a $\vec{M}_B = \vec{r} \times \vec{P}$ momentem siły względem bieguna B .

W szczególnych przypadkach ruchu ciała sztywnego wyrażenie na pracę siły \vec{P} (8.55) przyjmuje formę zależną od wyboru bieguna:

- w ruchu postępowym ($\vec{r}_B = \vec{r}$, $d\vec{\varphi} = 0$ – ciało nie doznaje obrotu)

$$d'L = \vec{P} \cdot d\vec{r} \quad (8.56)$$

lub $d'L = a_{Cx} dr_{Cx} + a_{Cy} dr_{Cy}$ – jeśli ruch odbywa się w płaszczyźnie xy ;

- w ruchu obrotowym ($\vec{r}_B = \vec{0}$ – bieżnik leży na osi obrotu)

$$d'L = \vec{M}_B \cdot d\vec{\varphi} = Md\varphi , \quad (8.57)$$

gdzie M oznacza moment siły względem osi obrotu ciała;

- w ruchu płaskim ($\vec{r}_B \rightarrow \vec{r}_C$ – jako bieżnik przyjmuje się środek masy ciała)

$$d'L = \vec{P} \cdot d\vec{r}_C + \vec{M}_C \cdot d\vec{\varphi} \quad (8.58)$$

lub

$$d'L = a_{Cx} dr_{Cx} + a_{Cy} dr_{Cy} + M_C d\varphi \quad (8.59)$$

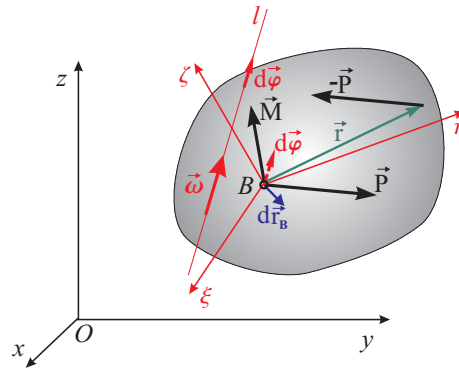
przy ruchu w płaszczyźnie xy ;

- w ruchu kulistym ($\vec{r}_B = \vec{0}$ – bieżnik jest nieruchomym punktem ciała)

$$d'L = \vec{M}_B \cdot d\vec{\varphi} . \quad (8.60)$$

Elementarną pracę pary sił (\vec{P} i $-\vec{P}$), o momencie \vec{M} , działających na ciało sztywne (rys. 8.10) można zapisać w formie

$$d'L = \vec{P} \cdot d\vec{r}_B - \vec{P} \cdot (d\vec{r}_B + d\vec{\varphi} \times \vec{r}) . \quad (8.61)$$



Rysunek 8.10: Para sił o momencie \vec{M} działających na ciało sztywne

Po przekształceniu otrzymuje się

$$d'L = \vec{P} \cdot d\vec{r}_B - \vec{P} \cdot d\vec{r}_B - \vec{P} \cdot (d\vec{\varphi} \times \vec{r}) = d\vec{\varphi} \cdot (\vec{r} \times (-\vec{P})) . \quad (8.62)$$

Podstawiając \vec{M} w miejsce $\vec{r} \times (-\vec{P})$, otrzymuje się wyrażenie określające **elementarną pracę pary sił** o momencie \vec{M}

$$d'L = \vec{M} \cdot d\vec{\varphi} . \quad (8.63)$$

Przypomnijmy, że wektor momentu pary sił (\vec{M}) działających na ciało sztywne jest wektorem swobodnym (związanym z tym ciałem).

8.5 Prawo zmienności energii kinetycznej dla ciała sztywnego

Prawo zmienności energii kinetycznej dla układu punktów materialnych ma postać (7.18), to znaczy

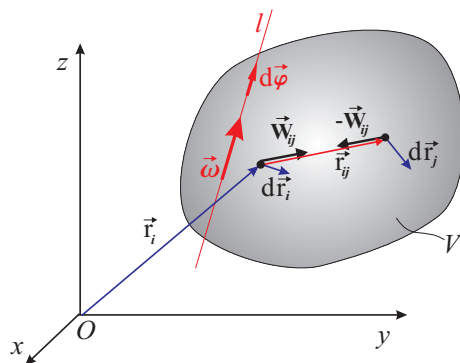
$$d'E = d'L_F + d'L_W + d'L_R , \quad (8.64)$$

przy czym E oznacza energię kinetyczną układu materialnego (7.14), a $d'L_F$, $d'L_W$ i $d'L_R$ oznaczają odpowiednio sumę elementarnych prac sił zewnętrznych (czynnych), sił wewnętrznych i sił reakcji.

W przypadku ciała sztywnego, które może być traktowane jako szczególny przypadek układu punktów materialnych, elementarna praca sił wewnętrznych jest równa zero

$$d'L_W = \sum_{i=1}^n \vec{W}_i \cdot d\vec{r}_i = 0 . \quad (8.65)$$

Dla uzasadnienia tej zależności rozpatrzmy pracę sił wzajemnego oddziaływania pomiędzy dwoma punktami ciała sztywnego (rys. 8.11).



Rysunek 8.11: Siły wewnętrzne w ciele sztywnym – siły oddziaływania pomiędzy dwoma punktami ciała sztywnego

Wektory elementarnych przemieszczeń punktu i i punktu j przedstawimy jako

$$d\vec{r}_i = \vec{v}_i dt, \quad d\vec{r}_j = \vec{v}_j dt = (\vec{v}_i + \vec{\omega} \times \vec{r}_{ij}) dt, \quad (8.66)$$

gdzie wykorzystana została zależność pomiędzy prędkościami dwóch punktów ciała sztywnego w postaci $\vec{v}_j = \vec{v}_i + \vec{\omega} \times \vec{r}_{ij}$. Wektor $d\vec{r}_j$ zapiszemy podobnie jak w zależności (8.51) w postaci

$$d\vec{r}_j = \vec{v}_i dt + \vec{\omega} dt \times \vec{r}_{ij} = d\vec{r}_i + d\vec{\varphi} \times \vec{r}_{ij}. \quad (8.67)$$

Suma prac sił \vec{W}_{ij} i $-\vec{W}_{ij}$ jest równa

$$\begin{aligned} d' L_{W_{ij}} &= \vec{W}_{ij} \cdot d\vec{r}_i + (-\vec{W}_{ij}) \cdot d\vec{r}_j = \\ &= \vec{W}_{ij} \cdot d\vec{r}_i - \vec{W}_{ij} \cdot (d\vec{r}_i + d\vec{\varphi} \times \vec{r}_{ij}) = -\vec{W}_{ij} \cdot (d\vec{\varphi} \times \vec{r}_{ij}). \end{aligned}$$

Zmieniając kolejność wektorów w iloczynie mieszanym $\vec{W}_{ij} \cdot (d\vec{\varphi} \times \vec{r}_{ij})$, otrzymuje się

$$d' L_{W_{ij}} = -d\vec{\varphi} \cdot (\vec{r}_{ij} \times \vec{W}_{ij}) = 0, \quad (8.68)$$

gdyż wektory \vec{r}_{ij} i \vec{W}_{ij} mają ten sam kierunek ($\vec{r}_{ij} \times \vec{W}_{ij} = \vec{0}$).

Jeśli ciało sztywne potraktujemy jako zbiór nieskończenie wielu takich par punktów materialnych jak rozpatrywane tu punkty i oraz j , to suma prac sił wewnętrznych dla wszystkich par punktów będzie równa zero ($d' L_W = 0$).

Prawo zmienności energii kinetycznej (8.64) dla ciała sztywnego przyjmuje postać

$$dE = d'L_F + d'L_R, \quad (8.69)$$

i można sformułować jako:

- **Przyrost elementarnej energii kinetycznej ciała sztywnego jest równy sumie elementarnych prac wykonanych przez siły zewnętrzne czynne oraz siły reakcji działające na ciało.**

8.6 Pęd ciała sztywnego

Jak wspomniano wcześniej, równania dynamiki ciała sztywnego wyznacza się zazwyczaj na podstawie prawa zmienności pędu i prawa zmienności krętu ciała. W kolejnych rozdziałach prawa te zostaną przedstawione, a następnie przejdziemy do wyprowadzenia równań opisujących ruch ciała sztywnego pod wpływem sił działających na ciało.

Ciało może być rozpatrywane jako graniczny przypadek zbioru punktów materialnych (taki przypadek, w którym liczba punktów zmierza do nieskończoności, a wartość ich masy dąży do zera). Ciało sztywne charakteryzuje się również tym, że odległości pomiędzy wszystkimi punktami tego zbioru pozostają niezmiennie.

Pęd ciała sztywnego jest równy sumie iloczynów mas (m_i) i wektorów prędkości \vec{v}_i wszystkich punktów materialnych należących do ciała. Można go zapisać jako

$$\vec{Q} = \lim_{m_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{\infty} m_i \vec{v}_i = \int_V \vec{v} dm = \iiint_V \rho \vec{v} dx dy dz. \quad (8.70)$$

Podstawiając do (8.70), w miejsce prędkości, zależność (8.7) (to jest $\vec{v} = \vec{v}_B + \vec{\omega} \times \vec{r}$) otrzymuje się

$$\vec{Q} = \int_V (\vec{v}_B + \vec{\omega} \times \vec{r}) dm = \int_V \vec{v}_B dm + \int_V (\vec{\omega} \times \vec{r}) dm. \quad (8.71)$$

Ponieważ prędkość bieguna \vec{v}_B i prędkość kątowa ciała $\vec{\omega}$ są wspólne dla wszystkich punktów rozpatrywanego ciała, to można je wyłączyć przed znak całki – wówczas

$$\vec{Q} = \vec{v}_B \int_V dm + \vec{\omega} \times \left(\int_V \vec{r} dm \right) = m \vec{v}_B + \vec{\omega} \times m \vec{r}_{BC}, \quad (8.72)$$

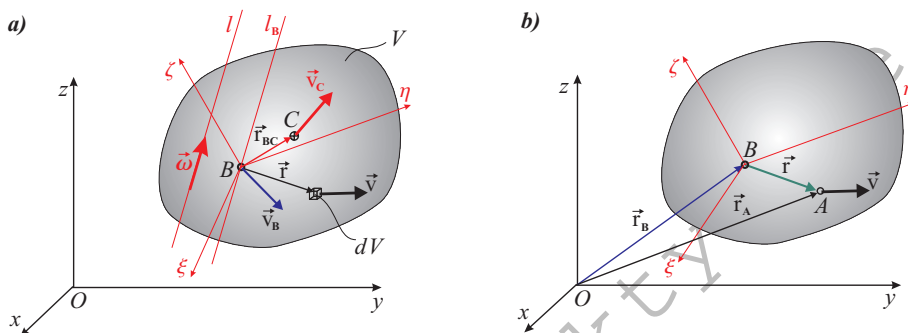
gdzie wykorzystane zostały tożsamości $\int_V dm \equiv m$ i $\int_V \vec{r} dm \equiv m \vec{r}_{BC}$.

Pęd ciała sztywnego – w zależności od prędkości (\vec{v}_B) dowolnie wybranego bieguna i prędkości kątowej ciała $\vec{\omega}$ – można przedstawić w formie

$$\vec{Q} = m(\vec{v}_B + \vec{\omega} \times \vec{r}_{BC}) \quad (8.73)$$

lub, wiedząc, że prędkość środka masy ciała (C) można określić na podstawie prędkości bieguna (B) jako $\vec{v}_C = \vec{v}_B + \vec{\omega} \times \vec{r}_{BC}$ (rys. 8.12a) zapisać go w postaci

$$\vec{Q} = m \vec{v}_C . \quad (8.74)$$



Rysunek 8.12: Wektory prędkości i położenia wybranych punktów ciała sztywnego

Pęd ciała sztywnego jest równy iloczynowi masy ciała i prędkości środka masy tego ciała. Można powiedzieć, że pęd ciała jest równy pędowi punktu materialnego poruszającego się z prędkością środka masy ciała i posiadającego masę całego ciała.

8.7 Kręt ciała sztywnego

Drugą – obok pędu – ważną wielkością charakteryzującą dynamikę ciała jest kręt ciała względem wybranego punktu. Przy wyprowadzeniu równań opisujących dynamikę ciała sztywnego podstawowym równaniem będzie prawo zmienności krętu ciała.

Kręt ciała sztywnego względem nieruchomego⁶ punktu O jest równy sumie momentów pędu względem punktu O wszystkich punktów materialnych, które

⁶W ten sam sposób definiuje się kręt względem dowolnie poruszającego się punktu O . W mechanice ogólnej praktycznie wykorzystywany jest kręt wyznaczony względem nieruchomego punktu O .

należą do ciała. Przedstawia to zależność

$$\vec{K}_O = \lim_{m_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{\infty} \vec{r}_i \times (m_i \vec{v}_i) . \quad (8.75)$$

8.7.1 Kręt ciała sztywnego w układzie inercyjnym

Jeśli prędkość (\vec{v}) dowolnego punktu ciała sztywnego jest określona względem inercyjnego (nieruchomego) układu odniesienia, to kręt względem punktu O przedstawiają zależności

$$\vec{K}_O = \lim_{m_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{\infty} \vec{r}_i \times (m_i \vec{v}_i) = \int_V \vec{r}_A \times \vec{v} dm = \int_V \rho \vec{r}_A \times \vec{v} dV . \quad (8.76)$$

Kręt względem bieżuna O można wyrazić w innej formie – jeśli wprowadzi się wektor \vec{r}_A o postaci $\vec{r}_A = \vec{r}_B + \vec{r}$ (rys. 8.12b). Wówczas

$$\vec{K}_O = \int_V (\vec{r}_B + \vec{r}) \times \vec{v} dm = \int_V \vec{r}_B \times \vec{v} dm + \int_V \vec{r} \times \vec{v} dm . \quad (8.77)$$

Całki występujące po prawej stronie we wzorze (8.77) można przedstawić jako

$$\int_V \vec{r}_B \times \vec{v} dm = \vec{r}_B \times m \vec{v}_C , \quad \int_V \vec{r} \times \vec{v} dm \equiv \vec{K}_B , \quad (8.78)$$

przy czym \vec{K}_B oznacza kręt względem bieżuna B (to jest punktu należącego do ciała i poruszającego się razem z ciałem). Zatem kręt względem bieżuna O można wyrazić formie

$$\boxed{\vec{K}_O = \vec{K}_B + \vec{r}_B \times m \vec{v}_C .} \quad (8.79)$$

Kręt względem bieżuna O można też wyznaczyć na podstawie prędkości bieżuna B oraz prędkości kątowej ciała. Podstawiając w (8.75) $\vec{v} = \vec{v}_B + \vec{\omega} \times \vec{r}$ oraz $\vec{r}_A = \vec{r}_B + \vec{r}$ (rys. 8.12) otrzymuje się

$$\vec{K}_O = \int_V (\vec{r}_B + \vec{r}) \times (\vec{v}_B + \vec{\omega} \times \vec{r}) dm \quad (8.80)$$

co – pamiętając, że wektory \vec{r}_B , \vec{v}_B , $\vec{\omega}$ są jednakowe w obrębie całego ciała i mogą być wyniesione przed znak całki – można przedstawić jako

$$\begin{aligned} \vec{K}_O = \vec{r}_B \times \vec{v}_B \int_V dm + \vec{r}_B \times (\vec{\omega} \times (\int_V \vec{r} dm)) + (\int_V \vec{r} dm) \times \vec{v}_B + \\ + \int_V \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) dm . \end{aligned} \quad (8.81)$$

Wykorzystując ponownie związki:

$$\int_V dm \equiv m, \quad \int_V \vec{r} dm \equiv m \vec{r}_{BC}, \quad (8.82)$$

i wprowadzając oznaczenie $\vec{K}_{B(w)}$ (dla składowej krętu ciała względem bieguna B wynikającej jedynie z obrotu ciała)

$$\vec{K}_{B(w)} = \int_V \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) dm, \quad (8.83)$$

zależność (8.81) zapiszemy jako

$$\vec{K}_O = m \vec{r}_B \times \vec{v}_B + m \vec{r}_B \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{BC}) + m \vec{r}_{BC} \times \vec{v}_B + \vec{K}_{B(w)}. \quad (8.84)$$

Zdefiniowany wzorem (8.83) wektor krętu $\vec{K}_{B(w)}$ oznacza jedynie tę część krętu ciała względem ruchomego bieguna B , która wynika ze zmiany przestrzennej orientacji ciała (z obrotu ciała).

Wyrażenie (8.84) można zapisać w formie

$$\vec{K}_O = m \vec{r}_B \times (\vec{v}_B + \vec{\omega} \times \vec{r}_{BC}) + m \vec{r}_{BC} \times \vec{v}_B + \vec{K}_{B(w)}, \quad (8.85)$$

lub – po wprowadzeniu oznaczenia $\vec{v}_B + \vec{\omega} \times \vec{r}_{BC} \equiv \vec{v}_C$ i zmianie kolejności składników – jako

$$\vec{K}_O = \vec{K}_{B(w)} + m \vec{r}_B \times \vec{v}_C + m \vec{r}_{BC} \times \vec{v}_B. \quad (8.86)$$

Wprowadzając pęd ciała ($\vec{Q} = m \vec{v}_C$) do wzoru (8.86), otrzymuje się

$$\vec{K}_O = \vec{K}_{B(w)} + \vec{r}_B \times \vec{Q} + m \vec{r}_{BC} \times \vec{v}_B. \quad (8.87)$$

Zależność (8.87) pozwala na określenie krętu względem punktu O na podstawie wektorów: krętu względem bieguna B , położenia (\vec{r}_B) i prędkości (\vec{v}_B) bieguna B oraz pędu ciała \vec{Q} i położenia (\vec{r}_{BC}) środka masy ciała (C).

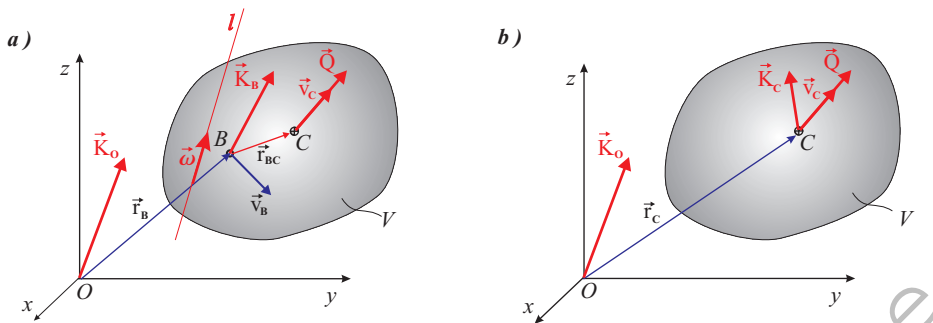
Przyjęcie środka masy (C) jako bieguna oznacza, że $\vec{r}_{BC} \equiv 0$, $\vec{v}_B \equiv \vec{v}_C$ oraz $\vec{r}_B \equiv \vec{r}_C$ (rys. 8.13). W takim przypadku kręt ciała sztywnego względem punktu O jest określony zależnością

$$\vec{K}_O = \vec{K}_C + \vec{r}_C \times \vec{Q}. \quad (8.88)$$

8.7.2 Kręt ciała sztywnego względem ruchomego (nieinercyjnego) układu odniesienia

Zdefiniowany wzorem (8.83) wektor krętu $\vec{K}_{B(w)}$ oznacza jedynie tę część krętu ciała względem ruchomego bieguna B , która wynika z obrotu ciała (ze

zmiany przestrzennej orientacji ciała). Można go nazywać względnym krętem, gdyż wynika on jedynie z ruchu ciała względem bieguna. Jeżeli ciało nie doznaje obrotu ($\vec{\omega} = \vec{0}$), to $\vec{K}_{B(w)} = \vec{0}$.



Rysunek 8.13: Kręt względem punktu O i jego składowe wyznaczone dla bieguna B (a) i dla bieguna C (b)

Przy wyprowadzaniu równań ruchu ciała sztywnego przydatna jest zależność określająca bezwzględny (całkowity) kręt ciała względem ruchomego bieguna (B) zdefiniowany jako

$$\vec{K}_B = \int_V \vec{r} \times \vec{v} dm = \int_V \vec{r} \times \rho \vec{v} dV, \quad (8.89)$$

gdzie \vec{r} oznacza promień wektor określający położenie elementarnego wycinka ciała o masie dm , natomiast \vec{v} jest bezwzględną (całkowitą) prędkością tego elementu.

Po podstawieniu $\vec{v} = \vec{v}_B + \vec{\omega}_B \times \vec{r}$ do wzoru (8.89) otrzymuje się zależność pomiędzy krętem bezwzględnym \vec{K}_B , wyznaczonym dla bieguna B , a krętem względnym $\vec{K}_{B(w)}$ określonym dla tego samego bieguna

$$\vec{K}_B = \int_V \rho \vec{r} \times \vec{v}_B dV + \int_V \rho \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) dV = m \vec{r}_{BC} \times \vec{v}_B + \vec{K}_{B(w)}. \quad (8.90)$$

Na zakończenie tego rozdziału podamy, jak określa się kręt względny ciała sztywnego ($\vec{K}_{B(w)} = \int_V \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) dm$) w przypadku, gdy wektory \vec{r} i $\vec{\omega}$ są zadane poprzez ich współrzędne w układzie $\xi\eta\zeta$. Występujący we wzorze (8.83) podwójny iloczyn wektorowy można przedstawić w postaci wyznacznika

$$\vec{K}_{B(w)} = \int_V \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) dm =$$

$$= \int_V \begin{vmatrix} \vec{\xi}^o & \vec{\eta}^o & \vec{\zeta}^o \\ \xi & \eta & \zeta \\ (\omega_\eta \zeta - \omega_\zeta \eta) & (\omega_\zeta \xi - \omega_\xi \zeta) & (\omega_\xi \eta - \omega_\eta \xi) \end{vmatrix} dm, \quad (8.91)$$

w którym $\vec{\xi}^o$, $\vec{\eta}^o$, $\vec{\zeta}^o$ oznaczają wektory jednostkowe osi $\xi\eta\zeta$ związanych z ciałem, (ξ, η, ζ) są współrzędnymi wektora \vec{r} , a $(\omega_\xi, \omega_\eta, \omega_\zeta)$ oznaczają współrzędne wektora $\vec{\omega}$.

Obliczoną na podstawie (8.91) wielkość można przedstawić symbolicznie jako

$$\vec{K}_{B(w)} = \vec{\xi}^o K_{B\xi} + \vec{\eta}^o K_{B\eta} + \vec{\zeta}^o K_{B\zeta}. \quad (8.92)$$

Symbole $K_{B\xi}$, $K_{B\eta}$, $K_{B\zeta}$ są współrzędnymi wektora $\vec{K}_{B(w)}$ w układzie $\xi\eta\zeta$ związanym z poruszającym się ciałem. Współrzędne te są równe:

$$K_{B\xi} = J_{B\xi}\omega_\xi - J_{B\xi\eta}\omega_\eta - J_{B\xi\zeta}\omega_\zeta, \quad (8.93)$$

$$K_{B\eta} = J_{B\eta}\omega_\eta - J_{B\eta\zeta}\omega_\zeta - J_{B\eta\xi}\omega_\xi, \quad (8.94)$$

$$K_{B\zeta} = J_{B\zeta}\omega_\zeta - J_{B\zeta\xi}\omega_\xi - J_{B\zeta\eta}\omega_\eta. \quad (8.95)$$

W podanych wzorach $J_{B\xi}$, $J_{B\eta}$, $J_{B\zeta}$ są masowymi momentami bezwładności względem osi $\xi\eta\zeta$ – o początku w punkcie B , a $J_{B\xi\eta}$, $J_{B\xi\zeta}$ i $J_{B\eta\zeta}$ masowymi momentami dewiacyjnymi ciała względem tych samych osi, to jest:

$$J_{B\xi} = \int_V (\eta^2 + \zeta^2) dm, \quad J_{B\eta} = \int_V (\xi^2 + \zeta^2) dm, \quad J_{B\zeta} = \int_V (\xi^2 + \eta^2) dm, \quad (8.96)$$

$$J_{B\xi\eta} = \int_V \xi\eta dm, \quad J_{B\eta\zeta} = \int_V \eta\zeta dm, \quad J_{B\zeta\xi} = \int_V \zeta\xi dm. \quad (8.97)$$

8.8 Równania dynamiki ciała sztywnego

Równania opisujące dynamikę są wyprowadzone przy założeniu, że ciało sztywne można traktować jako szczególny przypadek układu punktów materialnych, w którym liczba punktów dąży do nieskończoności ($n \rightarrow \infty$), a masa każdego punktu dąży do zera ($m_i \rightarrow 0$).

Do wyprowadzenia równań opisujących ruch ciała pod działaniem obciążeń zewnętrznych (czynnych i biernych) wykorzystane będą zależności określające zmianę pędu (7.30) i zmianę krętu (7.48) układu punktów materialnych względem układu inercjalnego, to jest:

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{P}, \quad \frac{d\vec{K}_O}{dt} = \vec{M}_O. \quad (8.98)$$

\vec{Q} oznacza wektor pędu układu punktów materialnych, który dla ciała sztywnego wyznaczyć można na podstawie zależności (8.73) lub (8.74), natomiast \vec{K}_O jest wektorem krętu względem nieruchomego punktu O , który dla ciała może być określony zgodnie ze wzorami (8.79), (8.87) lub (8.88). Wektory stojące po prawych stronach równań oznaczają: \vec{P} – wektor główny (sumę) wszystkich sił zewnętrznych czynnych i reakcji więzów; \vec{M}_O – moment główny (sumę) momentów wszystkich sił zewnętrznych czynnych i reakcji więzów działających na ciało względem nieruchomego bieguna O .

Podstawiając do wzorów (8.98) pęd i kręt opisany za pomocą zależności (8.73) i (8.87), otrzymuje się najbardziej ogólne równania dynamiki ciała sztywnego. Wynika to z przyjęcia za biegun dowolnego punktu (B) związanego z poruszającym się ciałem.

Użycie środka masy (punktu C) jako bieguna i zależności (8.74) oraz (8.88) do określenia pędu i krętu we wzorach (8.98) prowadzi do równań zwanych równaniami Newtona-Eulera. Równania Newtona-Eulera charakteryzują się prostszą budową i z tego względu są szeroko stosowane w zagadnieniach dynamiki ciała sztywnego.

8.8.1 Równania dynamiki ciała sztywnego w postaci ogólnej

Równaniami dynamiki ciała sztywnego w postaci ogólnej nazywa się takie równania, które umożliwiają analizę dowolnego ruchu ciała pod działaniem dowolnych sił i pozwalają na wyznaczenie sił oddziaływania więzów na ciało (sił reakcji).

Równania dynamiki ciała sztywnego w postaci ogólnej są wykorzystywane do analizy ruchu ciał poruszających się ruchem ogólnym. Mogą to być ciała swobodne (np. obiekty latające) lub ciała nieswobodne.

Na podstawie tych równań łatwo otrzymać równania dynamiki ciała sztywnego w szczególnych przypadkach ruchu, to jest w ruchu postępowym, obrotowym, płaskim, itd.

Podstawiając do wzorów (8.98) pęd i kręt opisany za pomocą zależności (8.73) i (8.87), otrzymuje się

$$\frac{d}{dt} (m (\vec{v}_B + \vec{\omega} \times \vec{r}_{BC})) = \vec{P} , \quad (8.99)$$

$$\frac{d}{dt} (\vec{K}_{B(w)} + \vec{r}_B \times \vec{Q} + m \vec{r}_{BC} \times \vec{v}_B) = \vec{M}_O . \quad (8.100)$$

Po zróżniczkowaniu lewej strony – w przypadku pierwszego z równań, otrzymuje się

$$m \left(\frac{d\vec{v}_B}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}_{BC} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}_{BC}}{dt} \right) = \vec{P} , \quad (8.101)$$

co można zapisać jako

$$m(\vec{a}_B + \vec{\varepsilon} \times \vec{r}_{BC} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{BC})) = \vec{P}. \quad (8.102)$$

W równaniu (8.101) zostały wykorzystane następujące oznaczenia i związki:

$$\frac{d\vec{v}_B}{dt} = \vec{a}_B, \quad \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\varepsilon}, \quad (8.103)$$

oraz

$$\frac{d\vec{r}_{BC}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r}_C - \vec{r}_B) = \vec{v}_C - \vec{v}_B, \quad \vec{v}_C = \vec{v}_B + \vec{\omega} \times \vec{r}_{BC}. \quad (8.104)$$

Różniczkowanie lewej strony równania (8.100) prowadzi do

$$\frac{d\vec{K}_{B(w)}}{dt} + \frac{d\vec{r}_B}{dt} \times \vec{Q} + \vec{r}_B \times \frac{d\vec{Q}}{dt} + m \frac{d\vec{r}_{BC}}{dt} \times \vec{v}_B + m \vec{r}_{BC} \times \frac{d\vec{v}_B}{dt} = \vec{M}_O. \quad (8.105)$$

Korzystając z zależności:

$$\frac{d\vec{r}_B}{dt} = \vec{v}_B, \quad \frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{P}, \quad \frac{d\vec{r}_{BC}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{BC}, \quad (8.106)$$

oraz

$$\vec{v}_B \times \vec{Q} = \vec{v}_B \times m \vec{v}_C, \quad (8.107)$$

$$m(\vec{\omega} \times \vec{r}_{BC}) \times \vec{v}_B = m(\vec{v}_C - \vec{v}_B) \times \vec{v}_B = -\vec{v}_B \times m \vec{v}_C \quad (8.108)$$

i podstawiając

$$\vec{M}_O = \vec{M}_B + \vec{r}_B \times \vec{P}, \quad (8.109)$$

dochodzi się do wzoru o postaci

$$\frac{d\vec{K}_{B(w)}}{dt} + m \vec{r}_{BC} \times \vec{a}_B = \vec{M}_B. \quad (8.110)$$

Równania wektorowe:

$$m(\vec{a}_B + \vec{\varepsilon} \times \vec{r}_{BC} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{BC})) = \vec{P}. \quad (8.111)$$

$$\frac{d\vec{K}_{B(w)}}{dt} + m \vec{r}_{BC} \times \vec{a}_B = \vec{M}_B, \quad (8.112)$$

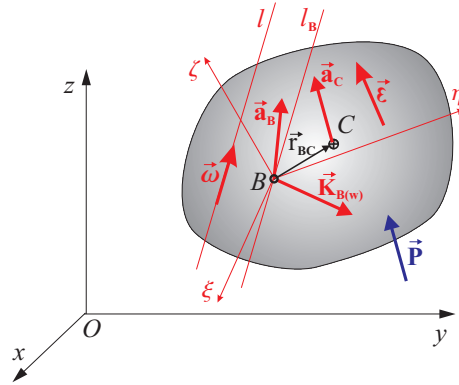
są równaniami dynamiki ciała sztywnego w postaci ogólnej⁷.

⁷Taka forma równań dynamiki ciała sztywnego jest przyjęta w pracy [3]. W podręczniku [15] podawana jest inna, równoważna tej, postać równań:

$$m \vec{a}_C = \vec{P}, \quad (8.113)$$

$$\frac{d\vec{K}_B}{dt} + m \vec{v}_B \times \vec{v}_C = \vec{M}_B. \quad (8.114)$$

Wielkości wektorowe występujące w tych wzorach można przedstawić w nieruchomym układzie współrzędnych xyz lub w układzie ruchomym $\xi\eta\zeta$, związanym z poruszającym się ciałem, o początku pokrywającym się z bieżącym B (rys. 8.14).



Rysunek 8.14: Wektory występujące w równaniach dynamiki ciała sztywnego

Pochodną wektora $\vec{K}_{B(w)}$ względem czasu w przypadku, gdy jest on określony w układzie ruchomym $\xi\eta\zeta$, wyznacza się z zależności

$$\frac{d\vec{K}_{B(w)}}{dt} = \frac{\hat{d}\vec{K}_{B(w)}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{K}_{B(w)}. \quad (8.115)$$

w której pierwszy składnik prawej strony oznacza pochodną lokalną wektora (albo względną) i przedstawia zmianę wektora $\vec{K}_{B(w)}$ względem ruchomego układu odniesienia, natomiast drugi składnik opisuje zmianę tego wektora wynikającą z obrotu układu $\xi\eta\zeta$.

Podane zależności (8.111) i (8.112) pozwalają na sformułowanie równań dla szczególnych przypadków ruchu ciała.

8.8.2 Równania Newtona-Eulera

Jak wspomniano, równaniami Newtona-Eulera są nazywane takie równania dynamiki ciała, które w opisie ruchu bazują na środku masy ciała oraz układzie osi $\xi\eta\zeta$ o początku w środku masy ciała. Podstawiając we wzorach (8.98) pęd i kręt opisany za pomocą zależności (8.74) i (8.88), to znaczy

$$\vec{Q} = m \vec{v}_C, \quad \vec{K}_O = \vec{K}_C + \vec{r}_C \times \vec{Q},$$

otrzymuje się

$$\frac{d}{dt}(m \vec{v}_C) = \vec{P}, \quad (8.116)$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{\mathbf{K}}_C + \vec{\mathbf{r}}_C \times \vec{\mathbf{Q}}) = \vec{\mathbf{M}}_O . \quad (8.117)$$

Lewą stronę równania (8.116) najczęściej zapisuje się – wobec stałej masy ciała – w postaci $m \vec{\mathbf{a}}_C$. Pochodną lewej strony równania (8.117) można przedstawić jako $\frac{d\vec{\mathbf{K}}_C}{dt} + \vec{\mathbf{v}}_C \times \vec{\mathbf{Q}} + \vec{\mathbf{r}}_C \times \frac{d\vec{\mathbf{Q}}}{dt}$, a prawą stronę zastąpić wyrażeniem $\vec{\mathbf{M}}_O = \vec{\mathbf{M}}_C + \vec{\mathbf{r}}_C \times \vec{\mathbf{P}}$. Wówczas otrzymuje się

$$\frac{d\vec{\mathbf{K}}_C}{dt} + \vec{\mathbf{v}}_C \times \vec{\mathbf{Q}} + \vec{\mathbf{r}}_C \times \frac{d\vec{\mathbf{Q}}}{dt} = \vec{\mathbf{M}}_C + \vec{\mathbf{r}}_C \times \vec{\mathbf{P}} , \quad (8.118)$$

a po wykorzystaniu związków $\vec{\mathbf{Q}} = m \vec{\mathbf{v}}_C$ oraz $\frac{d\vec{\mathbf{Q}}}{dt} = \vec{\mathbf{P}}$ równanie (8.118) przybiera formę

$$\frac{d\vec{\mathbf{K}}_C}{dt} + \vec{\mathbf{v}}_C \times m \vec{\mathbf{v}}_C + \vec{\mathbf{r}}_C \times \vec{\mathbf{P}} = \vec{\mathbf{M}}_C + \vec{\mathbf{r}}_C \times \vec{\mathbf{P}} . \quad (8.119)$$

Drugi składnik po lewej stronie równania jest wektorem zerowym, a trzeci składnik jest identyczny jak ostatni składnik po prawej stronie. Ostatecznie otrzymuje się

$$\frac{d\vec{\mathbf{K}}_C}{dt} = \vec{\mathbf{M}}_C . \quad (8.120)$$

Prawa zmienności pędu i zmienności krętu – wyznaczonego względem środka masy – dla ciała sztywnego można przedstawić w postaci:

$$m \vec{\mathbf{a}}_C = \vec{\mathbf{P}} \quad (8.121)$$

$$\frac{d\vec{\mathbf{K}}_C}{dt} = \vec{\mathbf{M}}_C . \quad (8.122)$$

Równania Newtona-Eulera⁸ w postaci skalarnej przedstawia się symbolicznie w formie:

$$m a_{Cx} = P_x , \quad m a_{Cy} = P_y , \quad m a_{Cz} = P_z , \quad (8.124)$$

$$\left(\frac{d\vec{\mathbf{K}}_C}{dt} \right)_{\xi} = M_{C\xi} , \quad \left(\frac{d\vec{\mathbf{K}}_C}{dt} \right)_{\eta} = M_{C\eta} , \quad \left(\frac{d\vec{\mathbf{K}}_C}{dt} \right)_{\zeta} = M_{C\zeta} . \quad (8.125)$$

⁸Przy analizie dynamiki ciała poruszającego się ruchem kulistym często wykorzystywane są równania

$$\left(\frac{d\vec{\mathbf{K}}_O}{dt} \right)_{\xi} = M_{O\xi} , \quad \left(\frac{d\vec{\mathbf{K}}_O}{dt} \right)_{\eta} = M_{O\eta} , \quad \left(\frac{d\vec{\mathbf{K}}_O}{dt} \right)_{\zeta} = M_{O\zeta} . \quad (8.123)$$

Są to równania Eulera dla ciała poruszającego się ruchem kulistym, przy czym nieruchomym punktem ciała jest punkt O .

Należy zwrócić uwagę, że wektor przyspieszenia środka masy oraz siły rzutuje się na osie nieruchomego układu współrzędnych xyz . Kręt względem punktu C najczęściej wyznacza się na podstawie jego składowych o kierunkach osi ruchomego układu współrzędnych $C\xi\eta\zeta$. Pochodna wektora krętu i momenty sił względem punktu C są rzutowane na osie $C\xi\eta\zeta$.

Równania otrzymane na podstawie równań (8.125) są – w ogólnym przypadku – dość skomplikowane. Dla ciała, dla którego osie $\xi\eta\zeta$ są osiami głównymi (momenty dewiacyjne dla osi głównych są równe zero: $J_{C\xi\eta} = 0$, $J_{C\eta\zeta} = 0$, $J_{C\xi\zeta} = 0$) z równań (8.125) otrzymuje się równania o postaci:

$$J_{C\xi} \frac{d\omega_\xi}{dt} - (J_{C\eta} - J_{C\zeta}) \omega_\eta \omega_\zeta = M_{C\xi} , \quad (8.126)$$

$$J_{C\eta} \frac{d\omega_\eta}{dt} - (J_{C\zeta} - J_{C\xi}) \omega_\zeta \omega_\xi = M_{C\eta} , \quad (8.127)$$

$$J_{C\zeta} \frac{d\omega_\zeta}{dt} - (J_{C\xi} - J_{C\eta}) \omega_\xi \omega_\eta = M_{C\zeta} . \quad (8.128)$$

Są to równania, które łącznie z zależnościami (8.124) umożliwiają analizę dynamiki ciała sztywnego poruszającego się ruchem ogólnym w przypadku, gdy osie $\xi\eta\zeta$ są osiami głównymi i centralnymi (o początku w środku masy C).

8.8.3 Prawa dynamiki dla ciała sztywnego

Podsumowaniem przedstawionych rozważań dotyczących opisu dynamiki ciała sztywnego będzie sformułowanie praw ruchu dla ciała sztywnego, nawiązujące do praw dynamiki podanych przez Newtona.

Przedstawione wcześniej prawa opisujące ruch ciała sztywnego wykorzystują zależności określające zmianę pędu i zmianę krętu ciała sztywnego względem układu inercjalnego. Na podstawie tych zależności można opisać zarówno ruch ciał o stałej masie, jak i ciał o zmiennej masie⁹.

Korzystając z równań Newtona-Eulera o postaci:

$$m \vec{a}_C = \vec{P} , \quad (8.129)$$

$$\frac{d\vec{K}_C}{dt} = \vec{M}_C , \quad (8.130)$$

⁹Dla ciał o zmiennej masie (masa ciała jest zależna od czasu $m = m(t)$) przy wyznaczaniu pochodnej pędu ciała otrzymuje się

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \frac{d(m\vec{v}_C)}{dt} = \frac{dm}{dt} \vec{v}_C + m \vec{a}_C .$$

Zatem ruch środka masy dla ciała o zmiennej masie jest opisany równaniem

$$\frac{dm}{dt} \vec{v}_C + m \vec{a}_C = \vec{P} .$$

można określić, w sposób ogólny, zachowanie się ciała sztywnego o stałej masie w zależności od działających na nie sił.

I. Pierwsze prawo dynamiki dla ciała sztywnego

- *Ciało sztywne, na które nie działa żadna siła lub działają siły, których wektor główny jest wektorem zerowym ($\vec{P} = \vec{0}$) oraz moment główny względem środka masy ciała jest wektorem zerowym ($\vec{M}_C = \vec{0}$), pozostaje w spoczynku lub porusza się w taki sposób, że pęd ciała i jego kręt względem środka masy nie ulegają zmianie.*

Oznacza to, że środek masy ciała jest nieruchomy lub porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym, a zmiana orientacji ciała w przestrzeni (obrót ciała) może zachodzić tylko w taki sposób, by kręt ciała względem środka masy był stały.

II. Drugie prawo dynamiki dla ciała sztywnego

- *Przyspieszenie środka masy ciała sztywnego jest proporcjonalne do wektora głównego (\vec{P}) sił działających na ciało, a zmiana orientacji ciała w przestrzeni (obrót ciała) zależy od wektora momentu względem środka masy (\vec{M}_C) sił działających na ciało.*

Prawo to przedstawiają wzory (8.129) i (8.130).

III. Trzecie prawo dynamiki dla ciała sztywnego

- *Z każdym działaniem ciała sztywnego na drugie ciało związane jest oddziaływanie tego drugiego ciała. Siły wzajemnego oddziaływania pomiędzy ciałami mają jednakowy kierunek i jednakowe wartości, a zwroty tych sił są przeciwne.*

8.9 Dynamika ciała sztywnego – szczególne przypadki ruchu

Rozpatrzmy kilka szczególnych przypadków ruchu ciała sztywnego i określmy postać równań dynamiki ciała dla tych przypadków. Szczególne przypadki ruchu były scharakteryzowane (str. 171) na podstawie kierunków i wartości wektorów prędkości i przyspieszenia (\vec{v}_B , \vec{a}_B) wybranego bieguna (B) oraz prędkości kątowej i przyspieszenia kątowego ciała ($\vec{\omega}$, $\vec{\epsilon}$). Przypomnijmy, że ciało porusza się:

- **ruchem postępowym** – jeśli $\vec{\omega} = \vec{0}$ i $\vec{\epsilon} = \vec{0}$;

- **ruchem obrotowym** – dla $\vec{v}_B = \vec{0}$ i $\vec{a}_B = \vec{0}$ oraz $\vec{\omega}^o = \text{const}$ (wektor $\vec{\omega}$ nie zmienia kierunku);
- **ruchem płaskim** – przy $\vec{\omega} \perp \vec{v}_B$, $\vec{\omega}^o = \text{const}$ (wektor $\vec{\omega}$ nie zmienia kierunku);
- **ruchem kulistym** – dla $\vec{v}_B = \vec{0}$ (i $\vec{a}_B = \vec{0}$);
- **ruchem śrubowym** – jeśli $\vec{\omega} \parallel \vec{v}_B$.

Uwzględniając powyższe warunki w równaniach dynamiki ciała w postaci ogólnej (8.111) i (8.112), to znaczy:

$$m(\vec{a}_B + \vec{\varepsilon} \times \vec{r}_{BC} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{BC})) = \vec{P}, \quad (8.131)$$

$$\frac{d\vec{K}_{B(w)}}{dt} + m\vec{r}_{BC} \times \vec{a}_B = \vec{M}_B, \quad (8.132)$$

otrzymuje się równania ruchu dla szczególnych przypadków ruchu ciała sztywnego.

8.9.1 Równania dynamiki ciała sztywnego o ruchu postępowym

W przypadku ciała poruszającego się ruchem postępowym wszystkie punkty ciała poruszają się z jednakowymi prędkościami i przyspieszeniami ($\vec{a}_B = \vec{a}_C = \vec{a}$). Prędkość i przyspieszenie katowe ciała o ruchu postępowym są równe zeru ($\vec{\omega} = \vec{0}$, $\vec{\varepsilon} = \vec{0}$), a co za tym idzie i kręt względny jest równy zeru ($\vec{K}_{B(w)} = \vec{0}$).

Najprostszą formę równań uzyskuje się, przyjmując za biegun punkt C ($B \rightarrow C$, $\vec{a}_B \rightarrow \vec{a}_C$, $\vec{r}_{BC} \rightarrow \vec{r}_{CC} = \vec{0}$). Po podstawieniu takich wielkości do (8.131) i (8.132) otrzymuje się równania, które opisują ruch postępowy ciała sztywnego obciążonego siłami zewnętrznymi czynnymi i reakcjami więzów, których wektor główny jest równy \vec{P} , a moment względem środka masy \vec{M}_C . Mają one postać:

$$m\vec{a}_C = \vec{P}, \quad \vec{0} = \vec{M}_C. \quad (8.133)$$

Pierwsze równanie pozwala na wyznaczenie przyspieszenia środka masy ciała (a tym samym każdego punktu ciała), natomiast drugie równanie nakłada warunek, jaki muszą spełniać siły działające na ciało.

Przy rozwiązywaniu zadań korzysta się z odpowiadających tym równaniom zależności skalarnych:

$$m a_{Cx} = P_x, \quad m a_{Cy} = P_y, \quad m a_{Cz} = P_z, \quad (8.134)$$

$$M_{C\xi} = 0, \quad M_{C\eta} = 0, \quad M_{C\zeta} = 0. \quad (8.135)$$

Osie $\xi\eta\zeta$ o początku w biegunie, którym jest w tym przypadku środek masy (C), poruszają się razem z ciałem ruchem postępowym, a więc stale pozostają równoległe do swojego położenia początkowego.

W przypadku, gdy ruch postępowy jest ograniczony (w wyniku działania więzów) do jednej płaszczyzny, np. xy , a także działające siły leżą w tej płaszczyźnie, wykorzystuje się jedynie trzy równania:

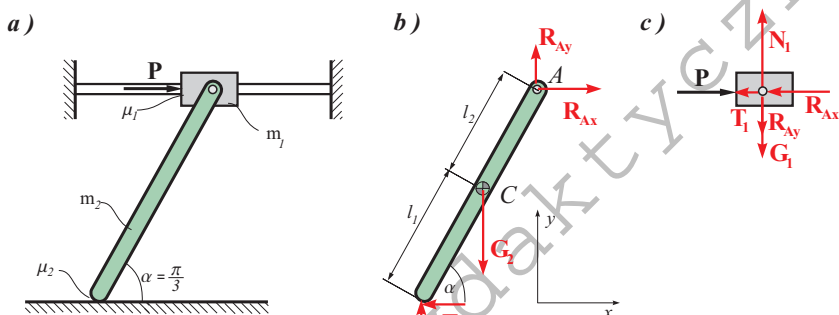
$$m a_{Cx} = P_x, \quad m a_{Cy} = P_y, \quad M_{Cz} = 0, \quad (8.136)$$

a pozostałe trzy równania układu (8.134) – (8.135) są tożsamościowo równe zero.

PRZYKŁAD 8.9.5

Pręt połączony przegubowo z suwakiem i opierający się o poziomą powierzchnię jest przesuwany w płaszczyźnie pionowej (rys. 8.15). Ruch pręta jest wymuszony działaniem siły P . Wyznaczyć przyspieszenie dowolnego punktu pręta dla zadanych wartości: $P = 100 \text{ N}$; $m_1 = 0,5 \text{ kg}$; $m_2 = 2 \text{ kg}$; $l_1 = 0,7 \text{ m}$; $l_2 = 0,6 \text{ m}$; $\mu_1 = 0,1$; $\mu_2 = 0,3$; $\alpha = 60^\circ$.

ROZWIĄZANIE



Rysunek 8.15: Ruch postępowy ciał (w jednej płaszczyźnie)

Pręt będzie przesuwany jednym końcem po poziomej powierzchni jedynie w przypadku, gdy spełniony będzie warunek $N_2 > 0$.

Po uwolnieniu każdego z ciał od więzów i zastąpieniu działania więzów odpowiednimi reakcjami (rys. 8.15b i c) należy wykorzystać równania o postaci (8.136).

1) Dla pręta (po podstawieniu $G_2 = m_2 g$) równania przyjmują formę:

$$\begin{aligned} m_2 a_{Cx} &= -T_2 + R_{Ax}, \\ m_2 a_{Cy} &= N_2 - m_2 g + R_{Ay}, \\ -N_2 l_1 \cos \alpha + R_{Ay} l_2 \cos \alpha - R_{Ax} l_2 \sin \alpha - T_2 l_1 \sin \alpha &= 0, \end{aligned}$$

przy czym – jeśli koniec pręta styka się stale z podłożem – przyspieszenie jego środka masy w kierunku pionowym jest równe zero

$$a_{Cy} = 0.$$

2) Dla suwaka (po podstawieniu $G_1 = m_1 g$) równania są następujące:

$$\begin{aligned} m_1 a_{Ax} &= P - R_{Ax} - T_1, \\ m_1 a_{Ay} &= N_1 - m_1 g - R_{Ay}, \\ 0 &= 0, \end{aligned}$$

a ze względu na więzy nałożone na suwak

$$a_{Ay} = 0.$$

3) Zależność pomiędzy przyspieszeniami ciał

$$a_{Ax} = a_{Cx}.$$

4) Dodatkowe zależności pomiędzy siłami reakcji wynikające z praw tarcia:

$$T_1 = \mu_1 N_1, \quad T_2 = \mu_2 N_2,$$

przy czym wartości sił T_1 , N_1 , T_2 , N_2 muszą być dodatnie.

W ten sposób powstał układ 10 równań o dziesięciu niewiadomych (formalnie równań jest 10, ale do wyznaczenia jest osiem niewiadomych: a_{Ax} , a_{Cx} , R_{Ax} , R_{Ay} , T_1 , N_1 , T_2 , N_2 , gdyż $a_{Ay} = a_{Cy} = 0$). Po podstawieniu zadanych wartości i rozwiązaniu równań otrzymano wyniki¹⁰:

$$a_{Ax} = 39.8497 \text{ m/s}^2, \quad a_{Cx} = 39.8497 \text{ m/s}^2, \quad R_{Ax} = 76.5843 \text{ N}, \quad R_{Ay} = 30.0036 \text{ N},$$

$$T_1 = 3.49086 \text{ N}, \quad T_2 = -3.11507 \text{ N}, \quad N_1 = 34.9086 \text{ N}, \quad N_2 = -10.3836 \text{ N}.$$

Dla otrzymanego rozwiązania warunek $N_2 > 0$ (i $T_2 > 0$) nie jest spełniony. Ruch pręta nie jest ruchem postępowym. Dolny koniec pręta unosi się podczas ruchu – zatem pręt porusza się ruchem płaskim.

Zmniejszając wartość siły P , można doprowadzić do spełnienia warunków: $N_2 > 0$, $T_2 > 0$ i uzyskać ruch postępowy pręta. Jeśli spełniony jest warunek $P < 44,9 \text{ N}$, to ruch pręta jest ruchem postępowym. Na przykład wyniki rozwiązania dla $P = 40 \text{ N}$ są następujące:

$$a_{Ax} = 14.9446 \text{ m/s}^2, \quad a_{Cx} = 14.9446 \text{ m/s}^2, \quad R_{Ax} = 30.1682 \text{ N}, \quad R_{Ay} = 18.6902 \text{ N},$$

$$T_1 = 2.35952 \text{ N}, \quad T_2 = 0.278933 \text{ N}, \quad N_1 = 23.5952 \text{ N}, \quad N_2 = 0.929777 \text{ N}.$$

¹⁰Rozwiązanie równań uzyskano, korzystając z systemu *Mathematica*.

8.9.2 Równania dynamiki ciała sztywnego o ruchu obrotowym

Jeśli ciało porusza się ruchem obrotowym, to jego ruch jest opisany poprzez prędkość kątową ciała $\vec{\omega}$ (i przyspieszenie $\vec{\varepsilon}$). Kierunki tych wektorów pokrywają się z osią obrotu ciała. Środek masy C nie musi leżeć na osi obrotu, a zatem jego przyspieszenie może być różne od zera ($\vec{a}_C \neq 0$). Jako biegun B wygodnie jest przyjąć w tym przypadku punkt leżący na osi obrotu (nieruchomy punkt ciała, taki, że $\vec{a}_B = 0$).

Równania dynamiki ciała sztywnego o ruchu obrotowym można przedstawić na podstawie zależności (8.131) i (8.132) – po podstawieniu w nich $\vec{a}_B = \vec{0}$ – w postaci:

$$m(\vec{\varepsilon} \times \vec{r}_{BC} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{BC})) = \vec{P}, \quad (8.137)$$

$$\frac{d\vec{K}_{B(w)}}{dt} = \vec{M}_B. \quad (8.138)$$

Ponadto, przyjmując kierunki osi ruchomych $\xi\eta\zeta$ (o początku w punkcie B) w taki sposób, by oś ζ pokrywała się z osią obrotu ciała i biorąc pod uwagę, że wektor prędkości kątowej można w takim przypadku przedstawić jako

$$\vec{\omega} = \vec{\zeta}^o \omega, \quad (\omega_\zeta = \omega, \quad \omega_\xi = 0, \quad \omega_\eta = 0), \quad (8.139)$$

otrzymuje się, na podstawie zależności (8.92) – (8.95), wektor krętu określony jako¹¹

$$\vec{K}_{B(w)} = -\vec{\xi}^o J_{\xi\zeta} \omega - \vec{\eta}^o J_{\eta\zeta} \omega + \vec{\zeta}^o J_\zeta \omega. \quad (8.140)$$

Pochodna wektora krętu w rozpatrywanym przypadku – zgodnie z (8.115) – jest równa

$$\frac{d\vec{K}_{B(w)}}{dt} = \frac{\hat{d}\vec{K}_{B(w)}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{K}_{B(w)}, \quad (8.141)$$

przy czym – na podstawie (8.140) – otrzymuje się

$$\frac{\hat{d}\vec{K}_{B(w)}}{dt} = -\vec{\xi}^o J_{\xi\zeta} \varepsilon - \vec{\eta}^o J_{\eta\zeta} \varepsilon + \vec{\zeta}^o J_\zeta \varepsilon, \quad (8.142)$$

a pomnożenie (8.139) i (8.140) daje

$$\vec{\omega} \times \vec{K}_{B(w)} = -\vec{\eta}^o J_{\xi\zeta} \omega^2 + \vec{\xi}^o J_{\eta\zeta} \omega^2. \quad (8.143)$$

¹¹Dla uproszczenia zapisu użyto oznaczeń $J_{\xi\zeta}$, $J_{\eta\zeta}$, J_ζ , zamiast $J_{B\xi\zeta}$, $J_{B\eta\zeta}$, $J_{B\zeta}$.

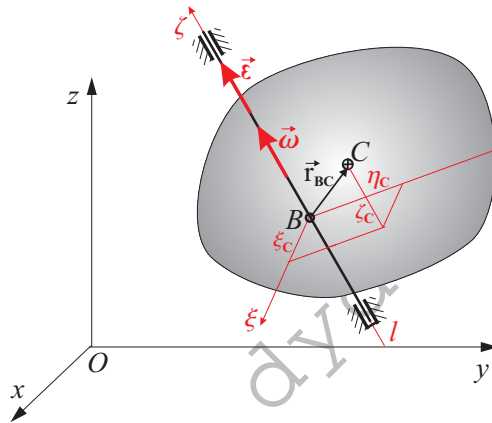
Wielkość ε występująca we wzorze (8.142) oznacza wartość przyspieszenia kątownego ciała ($\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$). Po podstawieniu (8.142) i (8.143) do (8.138) otrzymuje się

$$\frac{d\vec{K}_{B(w)}}{dt} = \vec{\xi}^o (-J_{\xi\xi} \varepsilon + J_{\eta\xi} \omega^2) + \vec{\eta}^o (-J_{\eta\xi} \varepsilon - J_{\xi\xi} \omega^2) + \vec{\zeta}^o J_{\zeta} . \quad (8.144)$$

Równania (8.144) i (8.137) są wektorowymi równaniami dynamiki ciała poruszającego się ruchem obrotowym wokół osi ζ . W postaci skalarnej można je przedstawić – po zrzutowaniu na obracające się razem z ciałem osie $\xi\eta\zeta$ (rys. 8.16) – jako:

$$-m\varepsilon\eta_c - m\omega^2\xi_c = a_\xi , \quad m\varepsilon\xi_c - m\omega^2\eta_c = a_\eta , \quad 0 = a_\zeta , \quad (8.145)$$

$$-J_{\xi\xi} \varepsilon + J_{\eta\xi} \omega^2 = M_\xi , \quad -J_{\eta\xi} \varepsilon - J_{\xi\xi} \omega^2 = M_\eta , \quad J_{\zeta} \varepsilon = M_\zeta . \quad (8.146)$$



Rysunek 8.16: Ciało poruszające się ruchem obrotowym

W wielu prostych zadaniach dotyczących ruchu obrotowego ciała niektóre z podanych równań są spełnione tożsamościowo. Do wyznaczenia przyspieszenia kątownego ciała poruszającego się wokół nieruchomej osi obrotu wystarczą jedno skalarne równanie ruchu – ostatnie z równań układu (8.145), (8.146). Można je zapisać jako

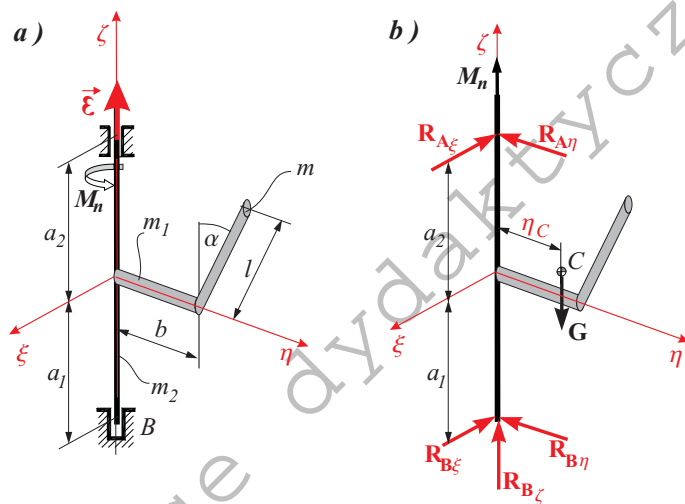
$$J_l \varepsilon = M_l , \quad (8.147)$$

gdzie J_l oznacza masowy moment bezwładności względem osi obrotu ciała l (pokrywającej się z osią ζ), ε jest przyspieszeniem kątowym ciała, a M_l oznacza sumę momentów sił zewnętrznych i reakcji względem tej osi.

Ponieważ oś obrotu ζ jest osią nieruchomą, to często przyjmuje się, że nieruchoma oś z pokrywa się z osią ζ – wówczas $J_\zeta \equiv J_z$, $M_\zeta \equiv M_z$, a ostatnie z równań (8.146) przedstawia się jako $J_z \varepsilon = M_z$.

PRZYKŁAD 8.9.6

Układ złożony ze sztywno połączonych ze sobą prętów (rys. 8.17a) obraca się wokół pionowej osi ze stałym przyspieszeniem $\varepsilon = \varepsilon_o$ (a jego prędkość początkowa była równa ω_o). Wyznaczyć reakcje łożysk podczas ruchu oraz moment M_n , jaki jest wymagany do zapewnienia stałego przyspieszenia kąтового. Dane są wymiary układu (a_1 , a_2 , b , l) oraz masy poszczególnych odcinków prętów (m , m_1 , $m_2 = 0$).



Rysunek 8.17: Ruch obrotowy układu złożonego z prętów – reakcje łożysk

ROZWIĄZANIE

Wprowadzamy układ współrzędnych $\xi\eta\zeta$ związanych z obracającym się ciałem, taki, że oś ζ ma kierunek osi obrotu. Pokazany na rys. 8.17 układ współrzędnych jest przyjęty w taki sposób, by pręty leżały w płaszczyźnie $\zeta\eta$. Ważne jest stwierdzenie, że dla takich osi: $\xi_C = 0$, $J_{\xi\eta} = 0$, $J_{\xi\zeta} = 0$.

Po uwolnieniu układu od więzów i wprowadzeniu reakcji (rys. 8.17b) można – na podstawie równań (8.145) i (8.146) – napisać następujące zależności:

$$-m \varepsilon \eta_c = -R_{A\xi} - R_{B\xi},$$

$$-m \omega^2 \eta_c = -R_{A\eta} - R_{B\eta},$$

$$0 = R_{B\zeta} - G,$$

$$J_{\eta\zeta} \omega^2 = R_{A\eta} a_2 - R_{B\eta} a_1 - G \eta_c,$$

$$-J_{\eta\zeta} \varepsilon = R_{B\xi} a_1 - R_{A\xi} a_2,$$

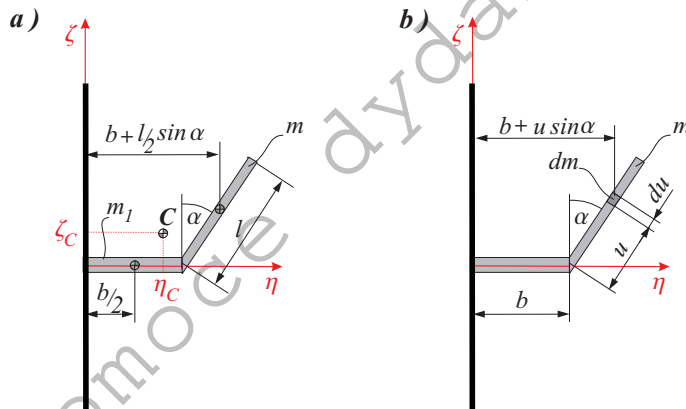
$$J_{\zeta} \varepsilon = M_n,$$

gdzie $G = m_1 g + m g$.

Do rozwiązania zadania konieczne jest jeszcze określenie współrzędnej położenia środka ciężkości η_c , momentu bezwładności J_{ζ} oraz momentu dwiacyjnego $J_{\eta\zeta}$.

Położenie środka ciężkości (rys. 8.18a) jest określone wzorem

$$\eta_c = \frac{m_1 \frac{b}{2} + m(b + \frac{l}{2} \sin \alpha)}{m_1 + m}.$$



Rysunek 8.18: Ruch obrotowy układu złożonego z prętów

Moment bezwładności względem osi ζ jest równy sumie momentów bezwładności poszczególnych prętów, przy czym – dla poziomego pręta

$$J_{1\zeta} = \frac{m_1 b^2}{3},$$

natomiast dla pręta nachylnego pod kątem α można – na podstawie definicji momentu bezwładności – zapisać go jako

$$J_{2\zeta} = \int_L \eta^2 dm = \int_0^l (b + u \sin \alpha)^2 \frac{m}{l} du ,$$

gdzie wprowadzona została pomocnicza zmienna u i masa elementarna pręta $dm = \frac{m}{l} du$ (rys. 8.18b). Po scałkowaniu otrzymuje się

$$\begin{aligned} J_{2\zeta} &= \frac{m}{l} (b^2 u|_0^l + bu^2|_0^l \sin \alpha + \frac{1}{3} u^3|_0^l \sin^2 \alpha) \\ &= m(b^2 + bl \sin \alpha + \frac{l^2}{3} \sin^2 \alpha) . \end{aligned}$$

Zatem

$$J_{\zeta} = J_{1\zeta} + J_{2\zeta} = \frac{m_1 b^2}{3} + m(b^2 + bl \sin \alpha + \frac{l^2}{3} \sin^2 \alpha) .$$

W podobny sposób wyznacza się moment dewiacyjny układu, z tym, że $J_{1\eta\zeta} = 0$. Przy wyznaczaniu $J_{2\eta\zeta}$ podstawiamy $\zeta = u \cos \alpha$ oraz $\eta = b + u \sin \alpha$ (rys. 8.18a), stąd

$$\begin{aligned} J_{\eta\zeta} = J_{2\eta\zeta} &= \int_L \eta\zeta dm = \int_0^l u \cos \alpha (b + u \sin \alpha) \frac{m}{l} du = \\ &= m(\frac{bl}{2} \cos \alpha + \frac{l^2}{3} \cos \alpha \sin \alpha) . \end{aligned}$$

Po podstawieniu $\varepsilon = \varepsilon_o$ ($\omega = \varepsilon_o t + \omega_o$) i rozwiązaniu równań można wyznaczyć niewiadome wielkości:

$$M_n = \varepsilon_o J_{\zeta} ,$$

$$R_{A\xi} = \frac{\varepsilon_o (-J_{\eta\zeta} + a_1 \eta_C m)}{a_1 + a_2} ,$$

$$\begin{aligned} R_{A\eta} &= \frac{\eta_C g (m + m_1) + (J_{\eta\zeta} + a_1 \eta_C m) \omega_o^2 + 2 \varepsilon_o J_{\eta\zeta} \omega_o t + 2 a_1 \varepsilon_o \eta_C m \omega_o t +}{a_1 + a_2} + \\ &+ \frac{\varepsilon_o^2 J_{\eta\zeta} t^2 + a_1 \varepsilon_o^2 \eta_C m t^2}{a_1 + a_2} , \end{aligned}$$

$$R_{B\xi} = \frac{\varepsilon_o (J_{\eta\zeta} + a_2 \eta_C m)}{a_1 + a_2} ,$$

$$\begin{aligned} R_{B\eta} &= \frac{-\eta_C g (m + m_1) + (J_{\eta\zeta} - a_2 \eta_C m) \omega_o^2 + 2 \varepsilon_o J_{\eta\zeta} \omega_o t - 2 a_2 \varepsilon_o \eta_C m \omega_o t +}{a_1 + a_2} + \\ &+ \frac{\varepsilon_o^2 J_{\eta\zeta} t^2 - a_2 \varepsilon_o^2 \eta_C m t^2}{a_1 + a_2} , \end{aligned}$$

$$R_{B\zeta} = g (m + m_1) .$$

Ciało wyrównoważone dynamicznie – równania dynamiki w ruchu obrotowym

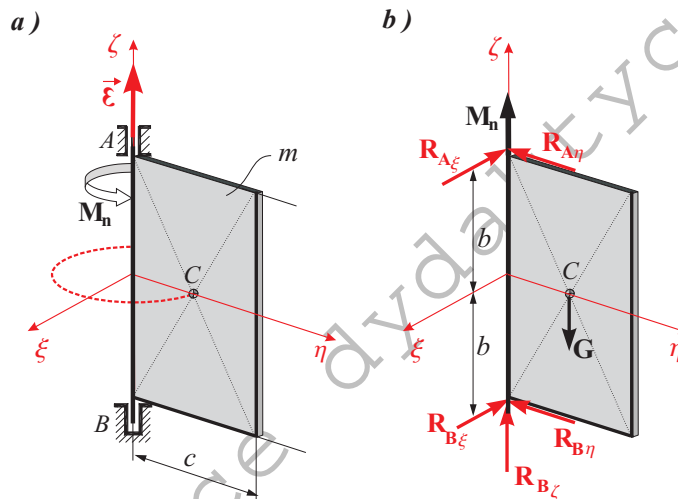
Jeśli momenty dewiacyjne występujące w równaniach (8.146) są równe zero ($J_{\xi\zeta} = 0$ i $J_{\eta\zeta} = 0$), to ciało jest wyrównoważone (albo wyważone) dynamicznie. Równania opisujące ruch obrotowy takiego ciała sprowadzają się do:

$$-m\varepsilon\eta_C - m\omega^2\xi_C = a_\xi, \quad m\varepsilon\xi_C - m\omega^2\eta_C = a_\eta, \quad 0 = a_\zeta, \quad (8.148)$$

$$0 = M_\xi, \quad 0 = M_\eta, \quad J_\zeta\varepsilon = M_\zeta. \quad (8.149)$$

PRZYKŁAD 8.9.7

Prostokątna płyta obraca się wokół osi przechodzącej przez pionową krawędź płyty (rys. 8.19). Wyznaczyć przyspieszenie kątowe płyty oraz reakcje łożysk w przypadku, gdy do płyty jest przyłożony moment napędzający o wartości określonej jako $M_n = M_o + kt$. Dane są wymiary płyty c i b oraz jej masa m .



Rysunek 8.19: Ruch obrotowy ciała

ROZWIĄZANIE

Wprowadzamy układ współrzędnych $\xi\eta\zeta$ związanych z obracającym się ciałem, taki, że oś ζ ma kierunek osi obrotu. Pokazany na rys. 8.19 układ przyjęty został w taki sposób, by jedna z osi przechodziła przez środek masy płyty (C). Ważne jest stwierdzenie, że dla takich osi: $\xi_C = 0$, $\eta_C = \frac{c}{2}$, $J_{\eta\zeta} = 0$, $J_{\xi\eta} = 0$, $J_{\xi\zeta} = 0$, $J_\zeta = \frac{mc^2}{3}$.

Po uwolnieniu płyty od więzów i wprowadzeniu reakcji (rys. 8.19b) można – na podstawie równań (8.145) i (8.146) lub (8.148), (8.149) – napisać następujące

zależności:

$$\begin{aligned}
 -m \varepsilon \frac{c}{2} &= -R_{A\xi} - R_{B\xi}, & -m \omega^2 \frac{c}{2} &= -R_{A\eta} - R_{B\eta}, & 0 &= R_{B\zeta} - G, \\
 0 &= R_{A\eta} b - R_{B\eta} b - G \frac{c}{2}, & 0 &= -R_{A\xi} b - R_{B\xi} b, & \frac{mc^2}{3} \varepsilon &= M_n.
 \end{aligned}$$

Po podstawieniu $M_n = M_o + kt$ i rozwiązaniu równań¹² można wyznaczyć niewiadome wielkości: $\varepsilon, R_{A\xi}, R_{A\eta}, R_{B\xi}, R_{B\eta}, R_{B\zeta}$. \diamond

Ciało wyrównoważone statycznie i dynamicznie – równania dynamiki w ruchu obrotowym

Jeśli momenty dewiacyjne występujące w równaniach (8.146) są równe zero ($J_{\xi\xi} = 0$ i $J_{\eta\xi} = 0$), a ponadto środek masy ciała leży na osi obrotu ($\xi_c = 0$ i $\eta_c = 0$), to ciało jest wyrównoważone (albo wyważone) statycznie i dynamicznie. Równania opisujące ruch obrotowy takiego ciała sprowadzają się do:

$$0 = a_\xi, \quad 0 = a_\eta, \quad 0 = a_\zeta, \quad (8.150)$$

$$0 = M_\xi, \quad 0 = M_\eta, \quad J_\zeta \varepsilon = M_\zeta. \quad (8.151)$$

8.9.3 Równania dynamiki ciała sztywnego o ruchu płaskim

W przypadku ciała poruszającego się ruchem płaskim wszystkie punkty ciała poruszają się w płaszczyznach równoległych do płaszczyzny kierującej. Jako płaszczyznę kierującą przyjmiemy płaszczyznę xy . Kierunki wektorów prędkości kątowej ($\vec{\omega}$) i przyspieszenia kątowego ciała poruszającego się ruchem postępowym są niezmiennie i prostopadłe do płaszczyzny kierującej ($\vec{\omega} \perp \vec{v}_B, \vec{\varepsilon} \parallel \vec{\omega}$).

Najprostszą formę równań uzyskuje się, przyjmując za biegun środek masy ciała C ($B \Rightarrow C$). Oznacza to, że $\vec{r}_{BC} \Rightarrow \vec{r}_{CC} = \vec{0}$.

Uwzględniając powyższe warunki w równaniach dynamiki ciała w postaci ogólnej (8.131) i (8.132), otrzymuje się równania dla ruchu płaskiego ciała sztywnego w formie:

$$m \vec{a}_C = \vec{P}, \quad (8.152)$$

$$\frac{d\vec{K}_{C(w)}}{dt} = \vec{M}_C. \quad (8.153)$$

¹²Zwracamy uwagę na fakt, że równania jak i rozwiązanie znacznie się komplikują, jeśli oś obrotu ciała nie będzie osią pionową. W takim przypadku momenty siły \vec{G} względem osi ξ i ζ będą zależęły od kąta φ określającego położenie płyty.

Podobnie jak dla ruchu obrotowego ciała, przyjmujemy kierunki osi ruchomych $\xi\eta\zeta$ (o początku w punkcie C) w taki sposób, by oś ζ była prostopadła do płaszczyzny kierującej (a tym samym równoległa do wektorów $\vec{\omega}$ i $\vec{\varepsilon}$). W związku z tym wektor prędkości kątowej można przedstawić jako

$$\vec{\omega} = \vec{\zeta}^o \omega, \quad (\omega_\zeta = \omega, \quad \omega_\xi = 0, \quad \omega_\eta = 0). \quad (8.154)$$

Względny kręt ciała $\vec{\mathbf{K}}_{C(w)}$, określony na podstawie zależności (8.92) – (8.95), przybiera postać

$$\vec{\mathbf{K}}_{C(w)} = -\vec{\xi}^o J_{C\xi\xi}\omega - \vec{\eta}^o J_{C\eta\xi}\omega + \vec{\zeta}^o J_{C\xi}\omega. \quad (8.155)$$

Pochodna wektora krętu w rozpatrywanym przypadku – zgodnie z (8.115) – jest równa

$$\frac{d\vec{\mathbf{K}}_{C(w)}}{dt} = \frac{\hat{d}\vec{\mathbf{K}}_{C(w)}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{\mathbf{K}}_{C(w)}, \quad (8.156)$$

przy czym – na podstawie (8.155) – otrzymuje się

$$\frac{\hat{d}\vec{\mathbf{K}}_{C(w)}}{dt} = -\vec{\xi}^o J_{C\xi\xi}\varepsilon - \vec{\eta}^o J_{C\eta\xi}\varepsilon + \vec{\zeta}^o J_{C\xi}\varepsilon, \quad (8.157)$$

a pomnożenie (8.154) i (8.155) daje

$$\vec{\omega} \times \vec{\mathbf{K}}_{C(w)} = -\vec{\eta}^o J_{C\xi\xi}\omega^2 + \vec{\xi}^o J_{C\eta\xi}\omega^2. \quad (8.158)$$

Wielkość ε występująca we wzorze (8.157) oznacza wartość przyspieszenia kątowego ciała ($\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$). Po podstawieniu (8.157) i (8.158) do (8.156) otrzymuje się

$$\frac{d\vec{\mathbf{K}}_{C(w)}}{dt} = \vec{\xi}^o (-J_{C\xi\xi}\varepsilon + J_{C\eta\xi}\omega^2) + \vec{\eta}^o (-J_{C\eta\xi}\varepsilon - J_{C\xi\xi}\omega^2) + \vec{\zeta}^o J_{C\xi}. \quad (8.159)$$

Równania (8.159) i (8.152) są wektorowymi równaniami dynamiki ciała poruszającego się ruchem płaskim, przy czym oś ζ jest prostopadła do płaszczyzny kierującej (do płaszczyzny ruchu każdego punktu ciała). W postaci skalarnej równania ruchu płaskiego dla ciała można przedstawić jako:

$m a_{Cx} = P_x, \quad m a_{Cy} = P_y, \quad 0 = P_z, \quad (8.160)$
$-J_{C\xi\xi}\varepsilon + J_{C\eta\xi}\omega^2 = M_{C\xi}, \quad -J_{C\eta\xi}\varepsilon - J_{C\xi\xi}\omega^2 = M_{C\eta}, \quad J_{C\xi}\varepsilon = M_{C\xi} \quad (8.161)$

Należy podkreślić, że momenty bezwładności i momenty dewiacyjne występujące w tych równaniach są określone względem osi $\xi\eta\zeta$, o początku w środku masy ciała (C) i poruszających się z ciałem. Moment sił zewnętrznych działających na ciało i sił reakcji więzów $M_{C\xi}$ jest określony względem osi ζ przechodzącej

przez punkt C . Symbole a_{Cx} i a_{Cy} oznaczają rzuty przyspieszenia środka masy ciała (C) na nieruchome osie x oraz y , natomiast ε jest przyspieszeniem kątowym ciała.

W przypadku, gdy momenty dewiacyjne $J_{C\xi\xi}$ i $J_{C\eta\eta}$ są równe zero (co ma miejsce w przypadku, gdy płaszczyzna $\xi\eta$ jest płaszczyzną symetrii ciała lub, gdy dwie płaszczyzny $\xi\zeta$ i $\eta\zeta$ są płaszczyznami symetrii ciała), równania (8.160), (8.161) sprowadzają się do:

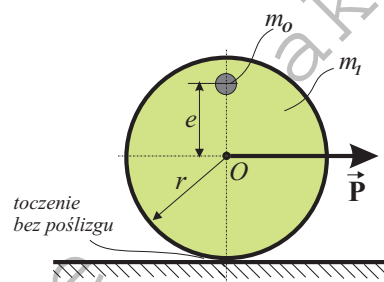
$$m a_{Cx} = P_x, \quad m a_{Cy} = P_y, \quad 0 = P_z, \quad (8.162)$$

$$0 = M_{C\xi}, \quad 0 = M_{C\eta}, \quad J_{C\zeta} \varepsilon = M_{C\zeta}. \quad (8.163)$$

W wielu przypadkach mamy do czynienia z sytuacją, w której ruch jest ograniczony (w wyniku działania więzów) do jednej płaszczyzny (np. xy), momenty dewiacyjne $J_{C\xi\xi}$ i $J_{C\eta\eta}$ są równe zero, a ponadto wszystkie działające siły leżą w tej płaszczyźnie. Wówczas wykorzystuje się jedynie trzy równania:

$$m a_{Cx} = P_x, \quad m a_{Cy} = P_y, \quad J_{C\zeta} \varepsilon = M_{C\zeta}. \quad (8.164)$$

PRZYKŁAD 8.9.8



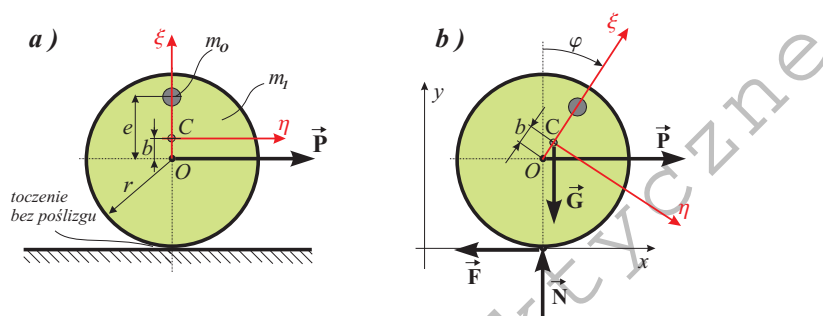
Rysunek 8.20: Niejednorodny krążek toczący się po poziomej płaszczyźnie

Do krążka o masie m_1 i promieniu r jest przyczepiony punkt materialny o masie m_0 (rys. 8.20). Wyznaczyć przyspieszenie kątowe krążka w przypadku, gdy krążek jest obciążony siłą P przyłożoną w środku krążka przy założeniu, że toczenie odbywa się bez poślizgu i, że podczas ruchu krążek pozostaje stale w tej samej płaszczyźnie. Dane są wartości: siły P , promienia r , odległości punktu materialnego od środka krążka e oraz mas m_1 i m_0 .

ROZWIĄZANIE

Krażek z dołączonym do niego punktem materialnym można traktować jako niejednorodne ciało sztywne (środek masy ciała nie leży w środku geometrycznym krążka). Rozpoczynamy od wprowadzenia związanego z ciałem układu współrzędnych $\xi\eta\zeta$, o początku w środku masy C i osi ζ o kierunku prostopadłym do płaszczyzny ruchu krążka. Odległość środka masy od środka krążka została oznaczona literą b (rys. 8.21), a jej wartość określa zależność

$$b = \frac{m_1 \cdot 0 + m_o e}{m_1 + m_o} = \frac{m_o e}{m_1 + m_o} .$$



Rysunek 8.21: Krażek – układy współrzędnych i działające siły

Po stwierdzeniu, że momenty dewiacyjne $J_{C\xi\zeta} = 0$, i $J_{C\eta\zeta} = 0$ są równe zero i że spełnione są pozostałe warunki pozwalające na użycie równań podanych wzorami (8.164), wykorzystamy te wzory do rozwiązania zadania. Uwolnienie ciała od więzów, wprowadzenie odpowiednich reakcji i przyjęcie nieruchomego układu współrzędnych xy (rys. 8.21b) pozwala na napisanie równań o postaci:

$$m a_{Cx} = P - F, \quad m a_{Cy} = N - G, \quad J_{C\zeta} \varepsilon = M_{C\zeta},$$

gdzie $m = m_1 + m_o$ jest masą ciała, $G = (m_1 + m_o)g$, natomiast moment sił zewnętrznych względem osi przechodzącej przez środek masy ciała $M_{C\zeta}$ jest równy

$$M_{C\zeta} = Nb \sin \varphi + F(r + b \cos \varphi) - Pb \cos \varphi .$$

Masowy moment bezwładności ciała względem osi ζ , przechodzącej przez punkt C , jest sumą momentu bezwładności krążka i punktu materialnego, to znaczy

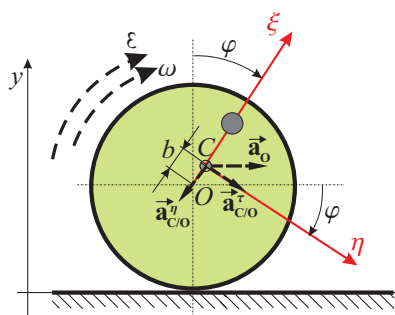
$$J_{C\zeta} = \frac{m_1 r^2}{2} + m_1 b^2 + m_o (e - b)^2 .$$

Zależności kinematyczne niezbędne do rozwiązania zadania to składowe przyspieszenia środka masy ciała wyznaczone na podstawie równania

$$\vec{a}_C = \vec{a}_O + \vec{a}_{C/O}^r + \vec{a}_{C/O}^n = \vec{a}_O + \vec{\varepsilon} \times \vec{r}_{OC} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{OC}),$$

które w postaci skalarnej przyjmuje formę (rys. 8.22):

$$\begin{aligned} a_{Cx} &= \varepsilon r + \varepsilon b \cos \varphi - \omega^2 b \sin \varphi, \\ a_{Cy} &= -\varepsilon b \sin \varphi - \omega^2 b \cos \varphi. \end{aligned}$$



Rysunek 8.22: Składowe wektora przyspieszenia środka masy ciała

Po dokonaniu podstawień otrzymuje się trzy równania:

$$\begin{aligned} (m_1 + m_o)(\varepsilon r + \varepsilon b \cos \varphi - \omega^2 b \sin \varphi) &= P - F, \\ (m_1 + m_o)(-\varepsilon b \sin \varphi - \omega^2 b \cos \varphi) &= N - (m_1 + m_o)g, \\ \left(\frac{m_1 r^2}{2} + m_1 b^2 + m_o(e - b)^2\right)\varepsilon &= N b \sin \varphi + F(r + b \cos \varphi) - P b \cos \varphi. \end{aligned}$$

z których można – po wyeliminowaniu F i N – wyznaczyć przyspieszenie kątowe ciała (ε). Wyznaczone w ten sposób przyspieszenie jest zależne od kąta obrotu ciała (φ).

Istotne jest jeszcze zastrzeżenie, że podane równania opisują toczenie ciała pod warunkiem, że $N > 0$ oraz $F < \mu N$, gdzie μ oznacza współczynnik tarcia pomiędzy krążkiem a podłożem.

Warto dodać, że w przypadku, gdy do krążka nie jest dołączona dodatkowa masa ($m_o = 0$), to w wyprowadzonych tu równaniach należy podstawić $b = 0$. Wówczas otrzymamy równania o prostej budowie:

$$\begin{aligned} m_1 \varepsilon r &= P - F, \\ 0 &= N - m_1 g, \\ \frac{m_1 r^2}{2} \varepsilon &= F r. \end{aligned}$$

W tym przypadku przyspieszenie kątowe ciała (ε) jest wielkością stałą (równą $\varepsilon = \frac{2P}{3m_1 r}$). \diamond

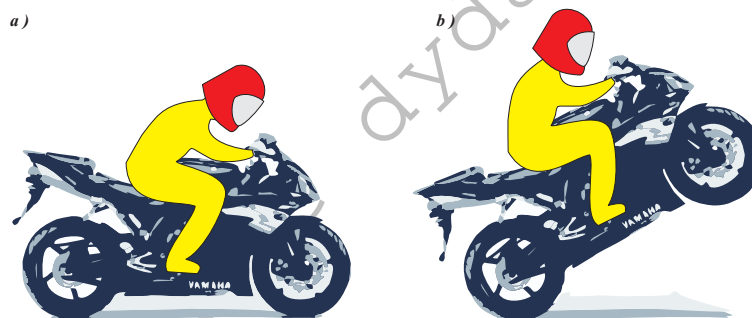
8.10 Dynamika układu ciał

Analiza dynamiki modelu maszyny czy urządzenia, a więc układu złożonego z wielu ciał może być przeprowadzona po dokonaniu podziału układu na podukłady¹³. W przypadku zagadnień dynamiki podukładami są poszczególne ciała należące do układu. Równania opisujące dynamikę złożonego układu mechanicznego tworzy się w podany niżej sposób.

1. Podział układu na ciała.
2. Do każdego ciała należy przyłożyć siły zewnętrzne działające na to ciało oraz reakcje więzów.
3. Dla każdego ciała oddzielnie formułuje się równania dynamiki – ich postać zależy od rodzaju ruchu jakim porusza się ciało.
4. Dodatkowo należy określić związki pomiędzy przyspieszeniami poszczególnych ciał. (Na ogół są to zależności określające relacje pomiędzy przyspieszeniami środków mas ciał należących do układu oraz związki pomiędzy przyspieszeniami kątowymi ciał.)
5. W tych przypadkach, w których występuje tarcie pomiędzy elementami układu niezbędne są dodatkowe zależności wynikające z przyjętego modelu tarcia (np. $T_{gr} = \mu N$, $S_1 = S_2 e^{\mu \alpha}$).

PRZYKŁAD 8.10.9

Wyznaczyć moment (M_n), jakim musi być napędzane tylne koło, by podczas startu przednie koło motocykla zostało oderwane od jezdni (rys. 8.23b).



Rysunek 8.23: Motocyklista – start na jednym kole

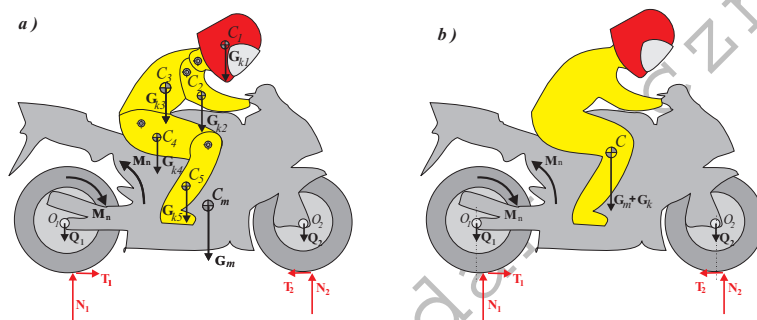
¹³ Analizę złożonych układów mechanicznych, nazwanych też *układami wieloczłonowymi*, można prowadzić korzystając z bardziej wyrafinowanych metod mechaniki. Przykładem może być praca W. Blajera *Metody dynamiki układów wieloczłonowych* [3], w której takie metody są opisane, a także zilustrowane przykładami rozwiązań.

Dane: masa motocykla ($m_m = 200$ kg), masa kierowcy ($m_k = 75$ kg), masy kół ($m_1 = 5$ kg; $m_2 = 4$ kg), podstawowe wymiary – pokazane na rys. 8.25 ($c = 1,0$ m; $b = 2,2$ m; $d_1 = 0,5$ m; $d_2 = 0,55$ m; $r_1 = 0,35$ m; $r_2 = 0,3$ m), współczynnik tarcia pomiędzy kołami a jezdnią ($\mu = 0,6$), opór toczenia ($f_1 = 0,02$ m; $f_2 = 0,02$ m). Przyjęto, że momenty bezwładności są równe: $J_{C_m} = 5$ kg m²; $J_{C_k} = 0,39$ kg m²; $J_1 = 0,31$ kg m²; $J_2 = 0,18$ kg m².

ROZWIĄZANIE

Do napisania równań służących do opisu dynamiki konieczny jest podział układu na ciała. (Wszystkie ciała wchodzące w skład modelu są dalej uważane za ciała sztywne.)

Proste modele układu kierowca-motocykl są przedstawione na rys. 8.24. Rozpatrywany układ składa się z ośmiu ciał – w przypadku pokazanym na rys. 8.24a lub z trzech ciał – w modelu widocznym na rys. 8.24b.



Rysunek 8.24: Modele układu motocyklista-motocykl: a) model złożony z ośmiu ciał, b) model z wyróżnionymi trzema ciałami

Analiza modelu o większej liczbie ciał pozwala na uwzględnienie oddziaływania kierowcy na pojazd (na przykład poprzez zmianę ułożenia ciała). Jeśli założyć, że zachowanie motocyklisty jest bierne, to układ ciał kierowca-motocykl (bez kół) można traktować jako jedno ciało sztywne. Koła muszą być rozpatrywane jako oddzielne ciała, gdyż poruszają się z innymi przyspieszeniami kątowymi niż układ ciał kierowca-motocykl.

Na rysunku 8.25 są pokazane siły działające na poszczególne ciała układu – dla modelu złożonego z trzech ciał.

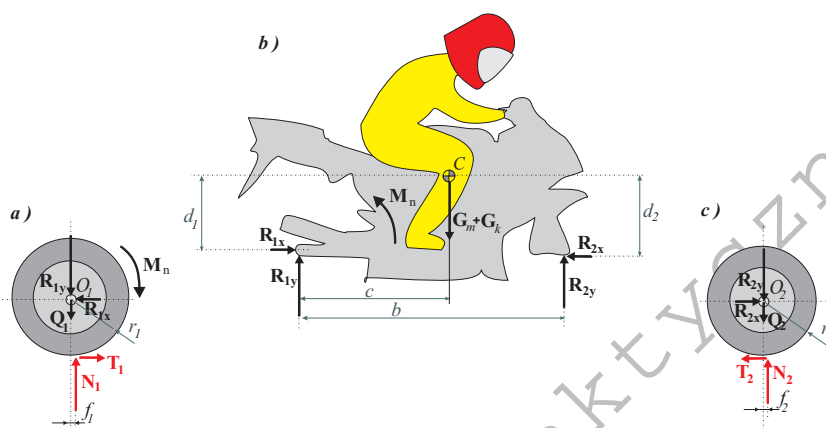
Zakładając kierunki przyspieszeń środków mas ciał rozpatrywanego modelu oraz przyspieszeń kątowych tych ciał – tak jak zaznaczono na rys. 8.26 – można napisać równania dynamiki dla poszczególnych ciał. Użyte zostały następujące oznaczenia: ciężar motocykla (bez kół) $G_m = m_m g$ i ciężar kierowcy $G_k = m_k g$, J_{C_m} – masowy moment bezwładności motocykla względem punktu C , J_{C_k} – masowy moment bezwładności kierowcy względem punktu C , przy

czym C oznacza środek ciężkości układu ciał motocykl-kierowca. Równania dynamiki takiego układu mają postać:

$$(m_m + m_k) a_{Cx} = R_{1x} - R_{2x} ,$$

$$(m_m + m_k) a_{Cy} = R_{1y} + R_{2y} - (G_m + G_k) ,$$

$$(J_{Cm} + J_{Ck}) \varepsilon = R_{2y}(b - c) - R_{2x} d_2 - R_{1y} c + R_{1x} d_1 + M_n .$$



Rysunek 8.25: Podział modelu na ciała sztywne

Kolejne równania dynamiki:

– dla tylnego koła

$$m_1 a_{1x} = -R_{1x} + T_1 ,$$

$$m_1 a_{1y} = -R_{1y} - Q_1 + N_1 ,$$

$$J_1 \varepsilon_1 = M_n - T_1 r_1 - N_1 f_1 ,$$

– dla przedniego koła

$$m_2 a_{2x} = R_{2x} - T_2 ,$$

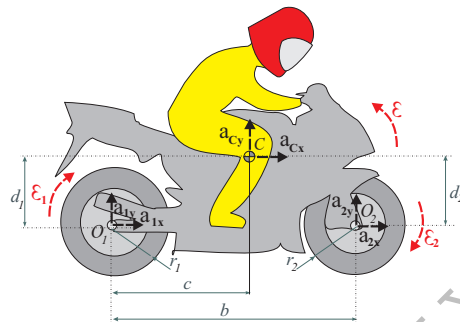
$$m_2 a_{2y} = -R_{2y} - Q_2 + N_2 ,$$

$$J_2 \varepsilon_2 = T_2 r_2 - N_2 f_2 .$$

Liczba równań dynamiki – 9, a liczba niewiadomych znajdujących się w tych równaniach wynosi 18 (są to: a_{Cx} , R_{1x} , R_{2x} , a_{Cy} , R_{1y} , R_{2y} , ε , M_n , a_{1x} , T_1 , a_{1y} , N_1 , ε_1 , a_{2x} , T_2 , a_{2y} , N_2 , ε_2).

Równania dynamiki muszą być uzupełnione o dodatkowe zależności pomiędzy przyspieszeniami. Zakładając, że toczenie tylnego koła odbywa się bez poślizgu, otrzymuje się

$$a_{1x} = \varepsilon_1 r_1 .$$



Rysunek 8.26: Przyspieszenia układu

Pomiędzy przyspieszeniami punktów O_1 , C i O_2 należących do układu ciał motocykl-kierowca (rys. 8.26) zachodzą związki:

$$\begin{aligned} a_{Cx} &= a_{1x} - \varepsilon d_1 - \omega^2 c , \\ a_{Cy} &= a_{1y} + \varepsilon c - \omega^2 d_1 , \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} a_{2x} &= a_{1x} + \varepsilon (r_2 - r_1) - \omega^2 b , \\ a_{2y} &= a_{1y} + \varepsilon b - \omega^2 (r_2 - r_1) . \end{aligned}$$

Zależności te ulegają uproszczeniu z uwagi na zerową początkową prędkość kątową ciał w momencie startu (dla $t = 0$ prędkość początkowa $\omega = 0$).

Warunki świadczące o tym, że, w momencie odrywania się przedniego koła od jezdni, tylne koło pozostaje w kontakcie z podłożem, można zapisać jako:

$$N_2 = 0 , \quad T_2 = 0 , \quad a_{1y} = 0 .$$

Łącznie mamy do dyspozycji układ 17 równań.

Rozwiązanie układu 17 równań z 18 niewiadomymi nie jest jednoznaczne. Można jednak wyznaczyć 17 niewiadomych wielkości w zależności od nieznannej

wartości momentu M_n :

$$\begin{aligned} a_{Cx} &= 0,1570 + 0,0094 M_n, & a_{Cy} &= -9,2114 + 0,0076 M_n, \\ \varepsilon &= -9,2114 + 0,0076 M_n, \\ a_{1x} &= -4,4487 + 0,0132 M_n, & \varepsilon_1 &= -12,71 + 0,0377 M_n, \\ a_{2x} &= -4,9092 + 0,0136 M_n, & a_{2y} &= -20,27 + 0,0168 M_n, & \varepsilon_2 &= 0, \\ R_{1x} &= 23,55 + 2,634 M_n, & R_{1y} &= 122,8 + 2,165 M_n, \\ R_{2x} &= -19,637 + 0,05431 M_n, & R_{2y} &= 41,82 - 0,0671 M_n, \\ T_1 &= 1,302 + 2,700 M_n, & N_1 &= 171,8 + 2,165 M_n. \end{aligned}$$

Dla otrzymanego rozwiązania możemy poszukiwać takiej wartości M_n , dla której $\varepsilon > 0$ (oraz $a_{2y} > 0$), co ma miejsce w sytuacji, gdy przednie koło odrywa się od podłoża. W rozpatrywanym tu przypadku:

$$-9,2114 + 0,0076 M_n > 0 \quad \Rightarrow \quad M_n > 1212 \text{ Nm}.$$

Dalsze obliczenia można przeprowadzić przyjmując $M_n > 1212$. Na przykład dla $M_n = 1212,1 \text{ Nm}$ pojazd zacznie się poruszać z następującymi przyspieszeniami:

$$\begin{aligned} a_{Cx} &= 11,53 \text{ m/s}^2, & a_{Cy} &= 0,036 \text{ m/s}^2, & \varepsilon &= 0,036 \text{ rad/s}^2, \\ a_{1x} &= 11,55 \text{ m/s}^2, & a_{1y} &= 0, & \varepsilon_1 &= 32,99 \text{ rad/s}^2, \\ a_{2x} &= 11,55 \text{ m/s}^2, & a_{2y} &= 0,0806 \text{ m/s}^2, & \varepsilon_2 &= 0. \end{aligned}$$

Siły reakcji w momencie startu (dla $M_n = 1212,1 \text{ Nm}$) będą równe:

$$\begin{aligned} R_{1x} &= 3217 \text{ N}, & R_{1y} &= 2747 \text{ N}, \\ R_{2x} &= 46,19 \text{ N}, & R_{2y} &= -39,56 \text{ N}, \\ T_1 &= 3274 \text{ N}, & N_1 &= 2796 \text{ N}. \end{aligned}$$

Minimalny współczynnik tarcia konieczny do tego, by toczenie tylnego koła odbywało się bez poślizgu jest, w tym przypadku, równy $\mu_{min} = \frac{T_1}{N_1} = \frac{3274}{2796} = 1,171$.

W sytuacji, gdy wartość współczynnika tarcia pomiędzy jezdnią a kołem jest mniejsza od μ_{min} (w danych przyjęto $\mu = 0,6$), zadanie należy rozwiązać ponownie – przy założeniu, że toczeniu towarzyszy poślizg.

Jeśli toczenie odbywa się z poślizgiem, to zależność $a_{1x} = \varepsilon_1 r_1$ nie jest spełniona i musi być zastąpiona przez równanie

$$T_1 = \mu N_1.$$

Dla tak zmodyfikowanego układu równań otrzymano następujące wyniki rozwiązania (dla $\mu = 0,6$):

$$\begin{aligned} a_{Cx} &= 0,6460 + 0,002652 M_n, & a_{Cy} &= -8,9875 + 0,004549 M_n, \\ \varepsilon &= -8,9875 + 0,004549 M_n, \\ a_{1x} &= -3,847 + 0,004926 M_n, & \varepsilon_1 &= -176,8 + 2,296 M_n, \\ a_{2x} &= -4,297 + 0,0052 M_n, & a_{2y} &= -19,77 + 0,01001 M_n, & \varepsilon_2 &= 0, \\ R_{1x} &= 160,5 + 0,7499 M_n, & R_{1y} &= 186,3 + 1,2909 M_n, \\ R_{2x} &= -17,19 + 0,02061 M_n, & R_{2y} &= 39,85 - 0,04003 M_n, \\ T_1 &= 141,2 + 0,7745 M_n, & N_1 &= 235,4 + 1,291 M_n. \end{aligned}$$

Na podstawie tego rozwiązania można wyznaczyć wartość M_n , dla której $\varepsilon > 0$ (oraz $a_{2y} > 0$). Ma to miejsce w przypadku, gdy:

$$-8,9875 + 0,004549 M_n > 0 \quad \Rightarrow \quad M_n > 1975,7 \text{ Nm} .$$

Dla wartości momentu spełniającej warunek $M_n > 1975,7$ dojdzie do oderwania przedniego koła od jezdni. Na przykład dla $M_n = 1976,5 \text{ Nm}$ pojazd zacznie się poruszać z następującymi przyspieszeniami:

$$\begin{aligned} a_{Cx} &= 5,888 \text{ m/s}^2, & a_{Cy} &= 0,002592 \text{ m/s}^2, & \varepsilon &= 0,002592 \text{ rad/s}^2, \\ a_{1x} &= 5,889 \text{ m/s}^2, & a_{1y} &= 0, & \varepsilon_1 &= 4361 \text{ rad/s}^2, \\ a_{2x} &= 5,889 \text{ m/s}^2, & a_{2y} &= 0,005702 \text{ m/s}^2, & \varepsilon_2 &= 0. \end{aligned}$$

Siły reakcji w momencie startu (dla $M_n = 1976,5 \text{ Nm}$) będą równe:

$$\begin{aligned} R_{1x} &= 1643 \text{ N}, & R_{1y} &= 2738 \text{ N}, \\ R_{2x} &= 23,56 \text{ N}, & R_{2y} &= -39,26 \text{ N}, \\ T_1 &= 1672 \text{ N}, & N_1 &= 2787 \text{ N}. \end{aligned}$$

Po oderwaniu przedniego koła od jezdni konieczne jest zmniejszenie wartości momentu napędzającego (M_n). W przeciwnym razie pojazd "wykona "salto w tył".
◇

Bibliografia

- [1] **Arczewski K., Goraj Z., Pietrucha J.:** *Elementy modelowania w mechanice*. Wydawnictwo Politechniki Warszawskiej, Warszawa 1983.
- [2] **Beer F.P., Johnston E.R.:** *Vector Mechanics for Engineers - Statics and Dynamics*. McGraw-Hill Book Company, 1977.
- [3] **Blajer W.:** *Metody dynamiki układów wieloczłonowych*. Wydawnictwo Politechniki Radomskiej, Radom 1998.
- [4] **Dietrich M.** (redakcja): *Podstawy konstrukcji maszyn*. PWN, Warszawa 1989.
- [5] **Dobrowolska K., Dyczka W., Jakuszenkow H.:** *Matematyka dla studentów studiów technicznych*. Wydawnictwo HELPMATH, Łódź 2002.
- [6] **Głowacki H., Majewski T., Sokołowska R.:** *Przewodnik do ćwiczeń laboratoryjnych z mechaniki technicznej*. Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 1998.
- [7] **Grabski J., Mianowski B., Strzałko J.:** *Wybrane zagadnienia mechaniki*. Wydawnictwo Politechniki Łódzkiej, Łódź 1999.
- [8] **Huber M.T.:** *Mechanika ogólna i techniczna*. Czytelnik, 1946.
- [9] **Karaśkiewicz E.:** *Zarys teorii wektorów i tensorów*. PWN, Warszawa 1964.
- [10] **Kittel C., Knight W.D., Ruderman M.A.:** *Mechanika*. PWN, Warszawa 1973.
- [11] **Kucharski T.:** *Mechanika ogólna. Rozwiązywanie zagadnień z MATHCAD-em*. WNT, Warszawa 2002.
- [12] **Leyko J.:** *Mechanika ogólna*. PWN, Warszawa 1996.
- [13] **Misiak:** *Mechanika ogólna*. WNT, Warszawa 1993.

- [14] **Morrison F.:** *Sztuka modelowania układów dynamicznych.* WNT, Warszawa 1996.
- [15] **Osiński Z.:** *Mechanika ogólna.* PWN, Warszawa 1994.
- [16] **Pavlovskij M.A., Akinfiyeva L.J., Bojčuk O.F.:** *Teoretičeskaja mehanika.* Vyšča Škola, Kiev 1990.
- [17] **Rubinowicz W., Królikowski W.:** *Mechanika teoretyczna.* Wyd.7. PWN, Warszawa 1995.
- [18] **Skalmierski B.:** *Mechanika.* Wyd.3. PWN, Warszawa 1994.
- [19] **Skalmierski B.:** *Mechanika. Podstawy mechaniki klasycznej.* Wydawnictwo Politechniki Częstochowskiej, Częstochowa 1998.
- [20] **Wilde P., Wismur M.:** *Mechanika teoretyczna.* PWN, Warszawa 1977.
- [21] **Wittenburg J.:** *Dynamics of Systems of Rigid Bodies.* B. G. Teubner, Stuttgart 1977.
- [22] *Working Model 2D. Version 4.0. User's Manual.* Knowledge Revolution 1996.
- [23] **Zawadzki J., Siuta W.:** *Mechanika ogólna.* PWN, Warszawa 1970.