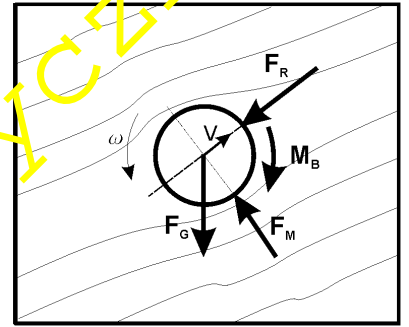


Ćwiczenie 10



KOMPUTEROWA SYMULACJA RUCHU CIAŁA SZTYWNEGO. WSPÓLCZYNNIK RESTYTUCJI

10.1. Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest przedstawienie możliwości wykorzystania komputera do rozwiązywania zagadnień dynamiki ciała sztywnego. Równania opisujące ruch ciała mogą być rozwiązywane numerycznie, a uzyskane wyniki następnie przedstawiane graficznie (tworzenie animacji). Jako przykład prezentowana jest symulacja ruchu sztywnej, chropowatej kulki w lepkim płynie.

10.2. Wprowadzenie

Program komputerowy *ping-pong* pozwala na symulację ruchu kulki w lepkim płynie umieszczonym w zamkniętym naczyniu z uwzględnieniem zderzeń ze ścianami. Mamy tutaj do czynienia między innymi z zagadnieniem opływu ciała oraz zjawiskiem uderzenia.

Zadanie wyznaczenia opływu bryły zawiera zagadnienia rozkładu ciśnienia wokół obiektu, separacji warstwy przyściennej, tworzenia się i sphywania wirów oraz oporu czołowego.

Ruch ciała odbywa się w przestrzeni ograniczonej sztywnymi ścianami. Program uwzględnia występowanie zderzeń, przy czym zakłada się, że czas trwania kontaktu (kulki ze ścianą) nie zależy od szybkości, z jaką odbywa się zderzenie. Istnieje możliwość zmiany wartości takich parametrów jak współczynnik restytucji, współczynnik tarcia poślizgowego i tocznego oraz czasu trwania kontaktu.

Program daje także możliwości: badania ruchu ciała w próżni oraz powietrzu, analizy wpływu sił tarcia poślizgowego i tocznego na prędkości po uderzeniu środka kulki oraz jej prędkości kątowej, obserwacji zjawiska Magnusa.

10.3. Podstawowe zależności teoretyczne

10.3.1. Siły działające na ciało sztywne poruszające się w płynnym ośrodku

Przyjęto, że ruch ciała jest efektem działania na niego: siły ciężkości $\dot{\mathbf{F}}_G$, siły oporu czołowego $\dot{\mathbf{F}}_R$, siły nośnej $\dot{\mathbf{F}}_M$ i momentu oporu lepkiego $\dot{\mathbf{M}}_B$ (rys.10.1).

Siła ciężkości $\dot{\mathbf{F}}_G$

$$\dot{\mathbf{F}}_G = m \dot{\mathbf{g}}. \quad (10.1)$$

gdzie:

m – masa ciała [kg],

$\dot{\mathbf{g}}$ – wektor przyspieszenia ziemskiego ($\dot{\mathbf{g}} = -\dot{\mathbf{j}}g$, gdzie $g=9,81$ [m/s²]; przyjmując $g=0$ można pominąć wpływ sił ciężkości).

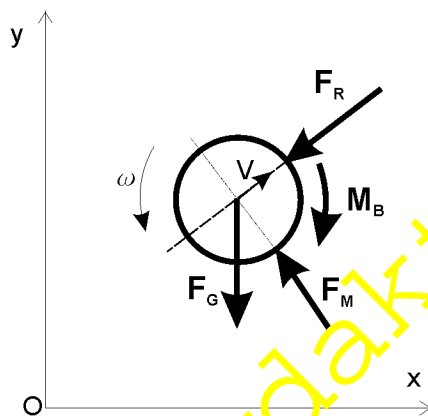


Fig. 10.1. Siły działające na kulkę poruszającą się w płynie

Opór czołowy $\dot{\mathbf{F}}_R$

Przyjęto liniową zależność wartości siły oporu od prędkości kulki. Zwrot siły $\dot{\mathbf{F}}_R$ jest przeciwny do prędkości płynu, a opisuje ją zależność

$$\dot{\mathbf{F}}_R = -a m \dot{\mathbf{v}}, \quad (10.2)$$

gdzie:

α - współczynnik oporu czołowego [1/s] ($\alpha \geq 0$),

$\dot{\mathbf{v}}$ - wektor prędkości środka kulki (v [m/s]).

Siła nośna $\dot{\mathbf{F}}_M$

W przypadku, gdy poruszająca się w lepkiem płynie (powietrzu) kulka wiruje również wokół swojej osi mamy do czynienia z opływem cyrkulacyjnym, czego efektem jest boczny ruch kulki. Zjawisko to zostało odkryte w 1852 roku przez Magnusa i jest dziś nazwane jego imieniem. Jego wyjaśnienie może być następujące. Przyjmuje się, że w wyniku adhezji (efekt lepkości płynu) prędkość cząstek powietrza znajdujących się na powierzchni kuli względem jej środka wynosi $\dot{\mathbf{w}} \times \mathbf{r}$ (\mathbf{r} - wektor położenia cząstki, $\dot{\mathbf{w}}$ - prędkość kątowa kulki). Oznacza to, że bezwzględna prędkość płynu po jednej stronie kuli jest inna niż po stronie przeciwnej. Różnice prędkości płynu powodują wystąpienie różnicy ciśnień (wzrost prędkości skutkuje spadkiem ciśnienia i na odwrót) - związek ten opisuje równanie Bernoulliego. W rezultacie powstaje siła o kierunku prostopadłym do toru środka kulki. W analizowanym modelu siła $\dot{\mathbf{F}}_M$ jest opisana zależnością

$$\dot{\mathbf{F}}_M = \gamma m \dot{\mathbf{w}} \times \dot{\mathbf{v}}, \quad (10.3)$$

gdzie:

γ - współczynnik siły nośnej (zależny od promienia kuli i lepkości płynu, $\gamma > 0$),

$\dot{\mathbf{w}}$ - wektor prędkości kątowej kulki (ω [rad/s]),

$\dot{\mathbf{v}}$ - wektor prędkości środka kulki (v [m/s]).

Efekt Magnusa odgrywa ważną rolę w wielu praktycznych sytuacjach (wpływa na tor pocisku, piłki futbolowej itp.)

Moment oporu lepkiego $\dot{\mathbf{M}}_B$

Na obracające się w lepkiem płynie ciało działają siły styczne do powierzchni ciała. Powodują one zmniejszanie jego szybkości wirowania. W analizowanym przypadku przyjmuje się, że wartość momentu tych siły jest liniową funkcją szybkości wirowania kulki. Siły oporu lepkiego są rozłożone na całej powierzchni kuli, a ich moment względem środka kulki $\dot{\mathbf{M}}_B$ wyraża się zależnością

$$\dot{\mathbf{M}}_B = -t m r \dot{\mathbf{w}}, \quad (10.4)$$

gdzie:

t - współczynnik lepkości [m/s] ($t > 0$).

10.3.2. Równania ruchu kulki

Równania ruchu (w zapisie wektorowym) analizowanego modelu są następujące (zobacz rys.10.1):

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}_G + \mathbf{F}_R + \mathbf{F}_M \quad (10.5)$$

$$J_k \frac{d\mathbf{w}}{dt} = \mathbf{M}_B. \quad (10.6)$$

Wykonując niezbędne podstawienia i dzieląc obydwie strony równań przez masę m uzyskuje się następującą ich postać zapisaną w składowych prostokątnych:

$$\begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= -a v_x - g w v_y, \\ \frac{dv_y}{dt} &= -g - a v_y + g w v_x, \\ \frac{2}{5} r^2 \frac{dw}{dt} &= -t r w \operatorname{sgn}(w). \end{aligned} \quad (10.7)$$

Jest to układ sprzężonych, nieliniowych równań różniczkowych względem prędkości v_x , v_y , w . Analityczna postać rozwiązania powyższego układu nie jest możliwa do uzyskania. Składowe prędkości wyznaczone wobec tego metodą całkowania numerycznego krok po kroku. Daje to możliwość wyznaczenia składowych przemieszczenia środka kulki x , y oraz jej kąta obrotu θ .

10.3.3. Zderzenia kulki ze ścianą

Modelując zjawisko zderzenia się kulki ze ścianami założono, że czas pozostawania kulki w kontakcie ze ścianą (parametr T w programie) nie zależy od prędkości kulki (w rzeczywistości zależy on od szybkości propagacji fal mechanicznych w ciele). Współczynnik restytucji k , oznaczający stosunek wartości impulsów w fazie restytucji do fazy deformacji przyjmuje wartości od 0 (zderzenie *idealnie plastyczne*) do 1 (zderzenie *idealnie sprężyste*). Zależy on głównie od rodzaju materiału zderzających się ciał. Na wartość współczynnika mają także wpływ szybkość zderzenia i kształty ciał (w programie zakłada się niezmienną wartość k).

Niech \mathbf{v} oznacza składową prędkości punktu styku kulki ze ścianą (punkt A na rys. 10.2) równoległą do ściany. Składową prędkości kulki prostopadłą do ścianki oznaczona jest przez \mathbf{v}_p .

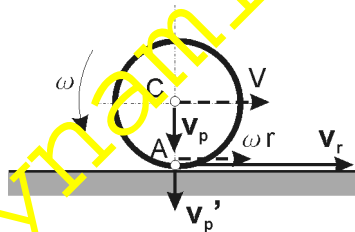


Fig. 10.2. Prędkości kulki w trakcie uderzenia

Ponieważ ściana jest nieruchoma, zatem zależność między rzutami prędkości po uderzeniu (v_p') i przed uderzeniem (v_p) na oś skierowaną wzdłuż linii uderzenia ma postać

$$0 - v_p' = k(v_p - 0), \quad (10.8)$$

gdzie k – współczynnik restytucji.

Znak minus wskazuje na przeciwne zwroty obu wektorów prędkości.

Niech $\dot{\mathbf{F}}_N$ oznacza składową normalną siły oddziaływania ściany na kulkę w punkcie ich styku A.

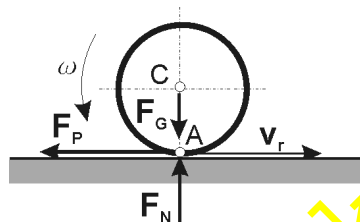


Fig. 10.3. Siły działające na kulkę w trakcie uderzenia

Impuls $\dot{\mathbf{S}}$ siły normalnej $\dot{\mathbf{F}}_N$ można zapisać jako:

$$\dot{\mathbf{S}} = \int_{t_1}^{t_2} \dot{\mathbf{F}}_N dt. \quad (10.9)$$

Oznaczając $t_2 - t_1 = T$ i zakładając, że siła $\dot{\mathbf{F}}_N = \text{const}$ w trakcie uderzenia (stała zarówno, co do wartości jak i kierunku) otrzymuje się

$$\dot{\mathbf{S}} = \dot{\mathbf{F}}_N T. \quad (10.10)$$

Przyrost pędu kulki w wyniku uderzenia wyraża się następująco

$$\Delta \dot{\mathbf{Q}} = m(\dot{\mathbf{v}}_p' - \dot{\mathbf{v}}_p). \quad (10.11)$$

Porównując (10.10) i (10.11) otrzymuje się, zatem

$$\dot{\mathbf{F}}_N T = m(\dot{\mathbf{v}}_p' - \dot{\mathbf{v}}_p). \quad (10.12)$$

W rezultacie, używając składowych skalarnych wzdłuż linii uderzenia i wykorzystując zależność (10.8) wartość reakcji normalnej określona jest następująco

$$F_N = \frac{m v_p (k+1)}{T}. \quad (10.13)$$

Uwzględnienie tarcia poślizgowego i toczonego.

Niech f_p, f_t oznaczają odpowiednio współczynniki tarcia poślizgowego i oporów toczenia. Jeśli $\dot{\mathbf{v}}_r \neq \mathbf{0}$ oznacza to, że ma miejsce toczenie się kulki z poślizgiem, a wartość siły tarcia kinetycznego $\dot{\mathbf{F}}_p$ może być wyznaczona z zależności

$$F_p = f_p F_N. \quad (10.14)$$

Moment ($\dot{\mathbf{M}}_p$) siły $\dot{\mathbf{F}}_p$ względem środka kulki ma wartość

$$\dot{\mathbf{M}}_p = r F_p = r f_p F_N. \quad (10.15)$$

Zwrot siły $\dot{\mathbf{F}}_p$ jest przeciwny do prędkości $\dot{\mathbf{v}}_r$ (zobacz rys. 10.3). Oznacza to, że siła tarcia działa tak, aby zrównać szybkość środka kulki (v) z szybkością punktu kontaktu A względem środka kulki (wr). Z chwilą, gdy $\dot{\mathbf{v}}_C = -\dot{\mathbf{v}}_{A/C}$ kulka toczy się już bez poślizgu (ewentualnie z oporem toczenia f_t). Jeśli tylko czas zderzenia jest wystarczająco długi, może nastąpić jej zatrzymanie się.

Zmianę zwrotu składowej prędkości równoległej do ściany spowodowaną działaniem sił tarcia w trakcie zderzenia wirującej kulki nazywa się *efektem pingpongowym*.

10.3.4. Numeryczne rozwiązywanie równań różniczkowych

Do rozwiązania układu równań różniczkowych pierwszego rzędu opisujących ruch kulki, w programie używana jest metoda numeryczna tzw., dwustopniowa *metoda Eulera*. Należy ona do klasy metod różnicowych, które polegają na określaniu wartości nieznannej funkcji $n(t)$ w szeregu punktach t_i przedziału całkowania $[a, b]$.

Według tej metody prędkość n_{n+1} w punkcie t_{n+1} wyznacza się przy założeniu, że siła F pozostaje niezmienna w przedziale czasu $[t_n, t_{n+1}]$, tzn:

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{m} F_{n+1/2} dt, \quad (10.16)$$

gdzie

$$dt = t_{n+1} - t_n \quad (10.17)$$

Wartość siły F w przedziale czasu $[t_n, t_{n+1}]$ obliczana jest dla prędkości w chwili $t_{n+1/2} = t_n + \frac{1}{2}dt$, przy czym mamy

$$v_{n+1/2} - v_n = \frac{1}{m} F_n \frac{1}{2} dt \quad (10.18)$$

Rozwiązanie dla każdego przedziału (kroku całkowania) dt wyznacza się, zatem w *dwóch etapach*: najpierw obliczana jest prędkość w *połowie* przedziału i odpowiadająca jej siła, a następnie obliczana jest prędkość na *końcu* danego przedziału.

10.4. Program komputerowy ping-pong

Program ten napisany jest w języku PASCAL i przeznaczony jest dla komputerów PC. Powstał on w Instytucie Fizyki UW w ramach PRI.14; autorem pierwotnej wersji jest Jacek Szwed. Celem rozpoczęcia pracy z programem należy uruchomić plik *pp_vga.exe*. Menu programu zawiera następujące opcje: START/STOP, WYJŚCIE, ZMIANA DANYCH, DEMO, INFO, które wybiera się przez naciśnięcie klawisza z pierwszą literą nazwy opcji (klawisze: **s**, **w**, **z**, **d** oraz **i**).

Klawisz (**s**) – pozwala na uruchomienie, jak i wstrzymanie symulacji.

Po pierwszym naciśnięciu klawisza (**s**) pojawia się napis *Ślad ? (t/n)*. Wciśnięcie (**t**) oznaczać będzie tworzenie śladu trajektorii środka kulki. Na ekranie ukazuje się kulka w jej początkowym położeniu (początek układu Oxy w ewym dolnym rogu ekranu). Naciśnięcie dowolnego klawisza uruchamia symulację. Dla jej wstrzymania naciskamy klawisz (**s**), a dla wznowienia symulacji naciskamy ponownie (**s**).

Klawisz (**w**) – umożliwia opuszczenie każdej z opcji oraz wyjście z programu.

Klawisz (**z**) – pozwala na zmianę wartości parametrów modelu.

Wykaz parametrów zawiera dwie strony. Do wyboru parametru, którego wartość chcemy zmienić posługujemy się klawiszami strzałek (\downarrow , \uparrow). Po wciśnięciu klawisza ENTER możliwe staje się wprowadzenie nowej wartości podświetlonego parametru.

Użytkownik może zmieniać wartości następujących parametrów.

Symbol	Wielkość	Jednostka	Zakres wartości
g	Przyspieszenie ziemskie	[m/s ²]	-50, 50
k	Współczynnik restytucji	[-]	0, 1
α	Współczynnik oporu czołowego	[1/s]	0, 10
v_x	Składowa x początkowej prędkości środka kulki	[m/s]	-100, 100
v_y	Składowa y początkowej prędkości środka kulki	[m/s]	-100, 100
ω	Początkowa prędkość kątowa	[rad/s]	- 99E3, 99E3
f_p	Współczynnik tarcia poślizgowego	[-]	0, 1
f_t	Współczynnik tarcia tocznego	[-]	0, 1
γ	Współczynnik siły nośnej	[-]	0, 1
τ	Współczynnik lepkości płynu	[m/s]	0, 100
T	Czas trwania zderzenia	[s]	0, 1
x	Położenie początkowe środka kulki x	[m]	0.8, 26.9
y	Położenie początkowe środka kulki y	[m]	0.8, 21.9
dt	Krok całkowania	[s]	0.001, 0.1
r	Promień kulki	[m]	0.5, 4.0
tr	Długość śladu trajektorii środka kulki	[piksel]	1, 500

Klawisz (**d**) – uruchamia opcję DEMO, która pozwala na wybór jednego z pięciu przykładowych wariantów danych. Naciśnięcie klawisza (**w**) umożliwia powrót do menu głównego.

Pięć przygotowanych wstępnie zestawów danych demonstruje następujące przypadki.

1. Rzut ukośny: kąt rzutu równy 45° , ruch kulki w próżni, tarcie pomijane.
2. Rzut ukośny: kąt rzutu mniejszy niż 45° , uwzględniony opór czołowy, lepkość i tarcie ścian pomijane.
3. Rzut ukośny: kąt rzutu większy niż 45° , ruch w próżni, tarcie ścian uwzględnione.
4. Efekt pingpongowy.
5. Efekt Magnusa.

Klawisz (i) – ukazuje podstawowe informacje dotyczące samego modelu zjawiska oraz zastosowanej metody rozwiązania numerycznego.

10.5. Przebieg ćwiczenia

Ćwiczenie składa się z dwóch części: komputerowej symulacji ruchu sztywnej kulki oraz wyznaczania współczynnika restytucji dla trzech rzeczywistych piłek.

10.5.1. Symulacja ruchu kulki

Rozpoczynamy od **zaznajomienia się z programem**, i w tym celu należy wykonać następujące czynności:

- a) Uruchomić program komputerowy (wybrać plik **pp-vga.exe**).
- b) Wybrać opcję START, uważnie przyrzeć się danym wyświetlonym na ekranie, a następnie uruchomić symulację i obserwować jej przebieg do momentu, gdy obraz na ekranie przestanie się istotnie zmieniać.
- c) Przejść do opcji DEMO i obejrzeć po kolei 5 wariantów ruchu kulki, za każdym razem zwracając baczną uwagę na rodzaj sił działających na kulkę.

Dalsza praca z programem podzielona jest na pięć etapów: **krok całkowania, zderzenie ukośne, efekt Magnusa, efekt pingpongowy, przykład wykorzystania siły F_M** . Dane liczbowe odnoszące się do każdego z nich zawarte są w tabeli 10.1, a obserwacje jak i wyniki obliczeń zapisywane będą w odpowiednich miejscach arkusza sprawozdania.

Tabela 10.1. Zestawy danych do programu ping-pong

Nr	g	k	α	v_x	v_y	ω	f_p	f_t	γ	τ	T	x	y	r	tr	dt				
	m/s ²	--	1/s	m/s	m/s	rad/s	--	--	--	m/s	s	m	m	m	--	s				
1a	0	0.5	0	0	14	-15	0	0	0.1	0	0.1	22	15	1.2	500	a) 0.1	b) 0.08			
																c) 0.01	d) 0.008			
2b	9.8	0.5	0	5	10	0	0	0	0	0	0.1	5	3	1.2	500	a) 0.1	b) 0.08			
																c) 0.01	d) 0.008			
2	0	0.5	0	a) 0	-1	0	0	0	0	0	0.1	7	9	1.2	500	0.01				
				b) 0.500	-0.866															
				c) 0.866	-0.500															
3	0	1	0.01	a) 1	b) 1	0	0	5	-5	0	0	0.04	0.01	0.1	15	15	1.2	500	0.01	
				c) -1	d) 0	0	1	5	-5											
4a	9.8	0.9	0.1	-2.5	5	60	0.28	0.07	0	0	0.07	10	10	1.2	500	0.002				
4b	5	0.9	0		10		0.2	0.07	0	0	0.07	18	2	1.2	500	0.002				
5	0	0	0.2				0	0		0.01	0.1			1.2	500	0.01				

1. **Krok całkowania**

Dla zbadania wpływu kroku całkowania na rozwiązanie numeryczne (uzyskiwany obraz ruchu kulki) należy wykonać obliczenia dla danych Nr 1a oraz Nr 1b zawartych w tabeli 10.1. Zapamiętać wygląd ekranu dla kolejnych wartości kroku dt , wyciągnąć wnioski. W tym celu należy zidentyfikować obydwa analizowane przypadki ruchu kulki oraz przyjrzeć się uważnie postaciom równań różniczkowych (10.7). Szczególną uwagę zwrócić na charakter sił działające na kulkę w każdym z tych dwóch przypadków (składowe siły wyszczególnić w odpowiedniej rubryce formularza sprawozdania). Wyjaśnić przyczynę zaobserwowanego zjawiska – zwrócić uwagę na zależność (10.16).

2. **Zderzenie ukośne**

Wprowadzić dane Nr2 (gładka kulka w próżni, uderzająca w przeszkodę odpowiednio pod kątem względem normalnej do przeszkody: $\alpha = 0^\circ$, $\alpha = 30^\circ$, $\alpha = 60^\circ$). Naszkicować tor środka kulki przed i po zderzeniu. Obliczyć prędkość kulki **tuż po zderzeniu**, narysować wektory prędkości przed i po zderzeniu (zachowując proporcje). Wyznaczyć kąt odbicia β . Porównać ze sobą te trzy przypadki.

3. **Efekt Magnusa**

Wprowadzić dane Nr 3, narysować wektor prędkości środka kulki i zaznaczyć kierunek prędkości kątowej. Po wykonaniu symulacji naszkicować trajektorię środka kulki (początkową fazę), zaznaczyć kierunek obrotu oraz narysować wektor siły nośnej \vec{F}_M w początkowej chwili ruchu.

4. **Efekt pingpongowy**

- Po pierwsze, wprowadzić dane Nr 4a i po wykonaniu symulacji narysować tor środka kulki **przed** i **po** pierwszym oraz drugim zderzeniu. Zaznaczyć kąty padania α i odbicia β względem linii uderzenia (normalnej do przeszkody). Na podstawie uzyskanego obrazu ruchu kulki wydedukować i naszkicować (zachowując proporcje) wektory prędkości punktu kontaktu A i środka C kulki oraz prędkości kątowe kulki **tuż przed** zderzeniem i **po** zderzeniu. Porównać ze sobą pierwsze i drugie zderzenie (trajektorie, kąty padania i odbicia, prędkości liniowe i kątowe...).
- Po drugie, uzupełnić brakujące dane w wierszu 4b tabeli 10.1 w taki sposób, aby spełnione były jednocześnie dwa poniższe warunki odnośnie **składowych skłarnych wzdłuż osi x** wektora prędkości punktu kontaktu kulki z przeszkodą (zobacz rys. 10.2):

$$v_{A/C} = \omega r < 0, \quad v_{A/C} < v_r < 0.$$

Następnie wykonać symulację, naszkicować tor kulki przed i po zderzeniu, zaznaczyć kąty (względem linii uderzenia) padania α i odbicia β . Na podstawie uzyskanego obrazu ruchu kulki wydedukować i naszkicować (zachowując proporcje) wektory prędkości punktu kontaktu A i środka C kulki oraz prędkości kątowe kulki **tuż przed** i **po** zderzeniu.

5. **Przykład wykorzystania siły \vec{F}_M**

Symulacja strzału na bramkę z rzutu różnego (poziomy lot piłki, narożnik boiska – lewy dolny róg ekranu, słupek bramki – prawy dolny róg ekranu). Najpierw uzupełnić brakujące dane w wierszu 5 tabeli 10.1 (postarać się dobrać - w miarę możliwości - **realne** wartości tych danych). Następnie wprowadzić dane do programu, naszkicować uzyskaną trajektorię środka piłki i zaznaczyć prędkości \vec{v} , ω oraz siłę nośną \vec{F}_M w początkowej fazie ruchu. Na zakończenie wykonać symulację przyjmując wartość współczynnika $\gamma = 0$, przy niezmiennych pozostałych parametrach (pomijany jest w ten sposób efekt Magnusa). Zaznaczyć na tym samym rysunku, co poprzednio uzyskaną teraz trajektorię piłki.

10.5.2. **Wyznaczanie współczynnika restytucji**

Współczynnik restytucji wyznaczany jest dla trzech różnych piłek (tenisowej, gumowej i golfowej) uderzających w dwa rodzaje powierzchni (twardą gumę – G oraz terakotę - TC).

- Wmieścić piłkę tenisową na wskazanej wysokości, puścić ją swobodnie i zmierzyć wysokość, na jaką odbije się ona od podłoża (terakota TC lub twarda guma G – grubość gumy wynosi 20 mm).

- Pomiary powtórzyć trzykrotnie dla terakoty TC oraz twardej gumy G (grubość gumy wynosi 20 mm), a wyniki zanotować w tabeli 10.2.
- Wykonać opisane wyżej czynności dla piłki gumowej i golfowej.

Tabela 10.2. Wyniki pomiarów i obliczeń

Rodzaj piłki oraz jej masa	Wysokość swobodnego spadku		Wysokość odbicia się piłki				Szybkość piłki				Współczynnik restytucji		Siła uderzenia	Stosunek siły do ciężaru piłki
			wynik pomiaru		wartość średnia		przed uderzeniem		po uderzeniu					
	h_1		h_{2i}		h_2		v_1		v_2		k		F	F/mg
	cm		cm		cm		m/s		m/s		--		N	--
TC G		TC G		TC G		TC G		TC G		TC G		TC	TC	
Tenisowa $m = 58\text{ g}$														
Gumowa $m = 41\text{ g}$														
Golfowa $m = 46\text{ g}$														

10.6. Opracowanie wyników i sprawozdanie

Po zakończeniu pomiarów należy wykonać obliczenia niezbędne do wyznaczenia współczynnika restytucji.

Proszę także oszacować wartość średniej siły uderzenia F (oddziaływania na piłkę podłogi w momencie zderzenia). W tym celu wykorzystać zależność (10.13) przyjmując następujące czasy trwania zderzenia piłek z terakotą:

- piłka tenisowa – **4 ms**,
- piłka gumowa – **6 ms**,
- piłka golfowa – **2 ms**.

10.6.1. Sprawozdanie

Sprawozdanie, które winno być sporządzone w sposób staranny ma zawierać:

- temat i cel ćwiczenia,
- wypełnioną tabelę 10.1,
- szkice trajektorii kulki, wektorów prędkości oraz wyniki wymaganych obliczeń,
- wypełnioną tabelę 10.2,
- obserwacje i wnioski.

10.7. Pytania kontrolne

- Wymienić główne siły działające na ciało sztywne poruszające się w płynie.
- Zdefiniować pojęcia: siła chwilowa, linia uderzenia, uderzenie centralne.
- Zdefiniować pojęcia: uderzenie proste, uderzenie ukośne, uderzenie mimośrodowe.
- Współczynnik restytucji: definicja, czynniki wpływające na jego wartość.
- Wyprowadzić zależność na wartość składowej normalnej reakcji w czasie uderzenia.
- Objasnić wpływ tarcia na zjawisko uderzenia.