Ćwiczenie 11

DRGANIA UKŁADU O JEDNYM STOPNIU SWOBODY

11.1. Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest obserwacja zjawiska drgań swobodnych i wymuszonych liniowego układu mechanicznego o jednym stopniu swobody oraz doświadczalne wyznaczenie częstości drgań własnych układu, a także zaznajomienie się z czujnikami i przyrządami elektronicznymi stosowanymi w pomiarach wielkości dynamicznych.

11.2. Wprowadzenie

Drganiami układu mechanicznego, inaczej drganiami mechanicznymi, nazywamy niewielkie ruchy wokół statecznego położenia równowagi układu. Układ, w którym pojawia się siła zwrotna ***proporcjonalna do wychylenia*** będzie drgał, wykonując ruch harmoniczny. W szczególności każdy sprężysty układ podlegający prawu Hooke'a (na przykład ciało zawieszone na sprężynie, giętka belka, rozciągliwy drut) może wykonywać tego rodzaju prosty ruch.

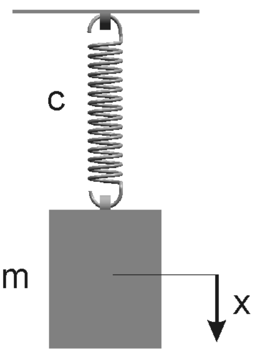
Umiejętność analizy drgań rozmaitych układów ma ogromne znaczenie praktyczne. Ćwiczenie to dotyczy badania drgań prostego liniowego układu mechanicznego składającego się z ciała zawieszonego na sprężynie śrubowej walcowej, której masa jest mała w porównaniu do masy ciała. Badane będą zarówno drgania swobodne ciała, jak i jego drgania wymuszone zmienną siłą.

Pomiary wielkości charakteryzujących drgania dokonywane są na drodze elektrycznej. Rezultaty pomiarów będą zbierane w specjalnej tabeli. Otrzymane na ich podstawie wartości częstości drgań będą porównane z wynikami uzyskiwanymi z prostego modelu teoretycznego.

11.3. Teoretyczny opis zjawiska

11.3.1. Drgania swobodne układu

Na rysunku 11.1 jest przedstawiony układ składający się z ciała o masie m zawieszonego na nieważkiej sprężynie o współczynniku sztywności c. Rozważane są jedynie przemieszczenia pionowe ciała co oznacza, że analizowany układ ma tylko jeden stopień swobody.



Rys. 11.1. Ciało zawieszone na sprężynie

Autor ćwiczenia **K. Januszkiewicz**, rysunki **B. Mianowski**

Jeśli przez *x* oznaczyć wychylenie ciała odmierzane od jego położenia równowagi trwałej, równanie ruchu będzie miało postać

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -cx\,, \tag{11.1}$$

lub po przekształceniu

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0\,, \tag{11.2}$$

gdzie

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{m}}\,. \tag{11.3}$$

To proste liniowe jednorodne równanie różniczkowe ma dwa niezależne rozwiązania typu $\sin\omega t$ i $\cos\omega t$, zatem jego rozwiązanie ogólne przyjmuje wygląd:

$$x = C_1\sin\omega t + C_2\cos\omega t\,. \tag{11.4}$$

Inna forma wyrażenia (11.4) może być następująca

$$x = a\sin(\omega t + \varphi)\,, \tag{11.5}$$

przy czym między stałymi zachodzą poniższe związki:

$$a = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}\,, \tag{11.6}$$

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{C_2}{C_1}\,. \tag{11.7}$$

Mamy więc do czynienia z ruchem harmonicznym, którego częstość (kołowa) ω jest określona wzorem (11.3), a ponieważ między częstością drgań a ich okresem istnieje zależność

$$\omega = \frac{2\pi}{T}\,, \tag{11.8}$$

to okres tych drgań jest dany wzorem

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c}}\,. \tag{11.9}$$

W przypadku liniowego układu mechanicznego *częstość drgań* ω (a zatem i okres drgań T) są określone jedynie przez parametry strukturalne układu (bezwładność oraz sztywność) i nie zależą od warunków początkowych. Współczynnik ***a*** nazywa się ***amplitudą*** drgań, natomiast argument $(\omega t + \varphi)$ funkcji sinus ich *fazą*. Wartość początkowa fazy φ jak i amplituda a zależą od warunków rozpoczęcia ruchu, tj. początkowego wychylenia $x_0 \equiv x(0)$ i początkowej prędkości $\dot{x}_0 \equiv \dot{x}(0)$. Niezerowa wartość przynajmniej jednej z tych wielkości jest niezbędna aby mógł wystąpić omawiany tu rodzaj drgań.

Dla zadanego wychylenia początkowego x_0 i prędkości początkowej $\dot{x}_0$ wychylenie ciała w czasie opisuje następująca zależność:

$$x = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega}\right)^2}\,\sin(\omega t + \varphi)\,, \tag{11.10}$$

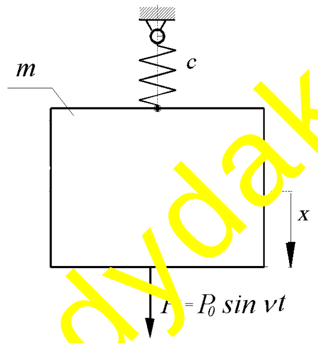
gdzie

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{\dot{x}_0}{x_0\omega}\,.$$

11.3.2. Drgania wymuszone, zjawisko rezonansu

W przypadku gdy na układ działa cały czas jakieś zaburzenie w postaci zmiennej siły, albo zadanego ruchu wybranego punktu układu (np. punktu zaczepienia sprężyny) mamy wówczas do czynienia z *drganiami wymuszonymi* układu. Drgania układu odbywają się z częstością wzbudzenia, która może mieć dowolną wartość niezależną od częstości własnej układu.

Rozważamy drgania układu z rys. 11.1 pod wpływem harmonicznej siły wymuszającej, o częstości n oraz amplitudzie P_o. Analizowany obecnie układ jest przedstawiony na rys. 11.2.



Rys.11.2. Układ o jednym stopniu swobody wzbudzany siłą harmoniczną

Równanie ruchu ciała o masie m przyjmuje następującą postać

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -cx + P_o \sin nt\,, \tag{11.11}$$

bądź po przekształceniach

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = \frac{1}{m} P_o \sin \nu t\,. \tag{11.12}$$

Jest to liniowe równanie różniczkowe niejednorodne, którego rozwiązanie jest sumą rozwiązania ogólnego równania jednorodnego (reprezentującego drgania swobodne) i całki szczególnej równania niejednorodnego (opisującego ustalone drgania wymuszone).

Zakładając całkę szczególną w postaci

$$x = A\sin nt\,, \tag{11.13}$$

gdzie A oznacza stałą podlegającą wyznaczeniu, rozwiązanie równania (11.11) przedstawia się następująco

$$x = a\sin(wt + j) + A\sin nt\,. \tag{11.14}$$

Podstawiając (11.14) do równania różniczkowego otrzymuje się współczynnik A

$$A = \frac{P_o}{m\left(\omega^2 - \nu^2\right)}, \tag{11.15}$$

albo po wykorzystaniu (11.3)

$$A = \frac{P_o}{c - m\nu^2}, \tag{11.16}$$

Stałe a oraz j zależą od warunków rozpoczęcia ruchu.

Rozwiązanie (11.14) przestaje być słuszne dla wartości częstości siły wymuszającej, przy której mianownik we wzorze (11.16) będzie równy zeru. Wówczas rozwiązanie przyjmuje inną postać, wobec nieoznaczoności stałej A. Stan taki nazywa się *rezonansem*, amplituda drgań rośnie w nim liniowo z czasem (dopóki drgania nie przestaną być "małe") i zachodzi on gdy częstości siły wymuszającej jest równa częstości własnej układu. Warunek zerowania się mianownika jest bowiem identyczny z zależnością (11.3)

$$n_r = w = \sqrt{\frac{c}{m}}\,,$$

gdzie:
ω - częstość drgań własnych układu przedstawionego na rysunku 11.1,
n_r - częstość rezonansowa siły wymuszającej układu z rysunku 11.2.

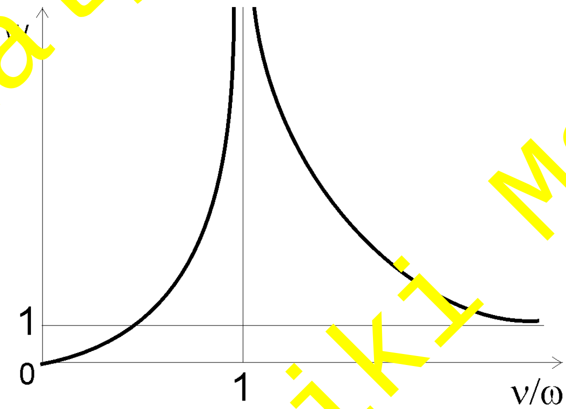
Przyjmując, że amplituda siły wymuszającej $P_0 = Sn^2$ - gdzie S współczynnik zależny od parametrów konstrukcyjnych wibratora - wówczas amplituda wychyleń *ustalonych drgań wymuszonych* (wartość bezwzględna stałej A) jest następująca:

$$|A| = \left| S \frac{n^2}{\left(w^2 - n^2\right)m} \right| = \frac{S}{m} W, \tag{11.17}$$

gdzie: W - *współczynnik zwielokrotnienia* amplitudy wychylenia

$$W = \frac{\dfrac{n^2}{w^2}}{\left|1 - \dfrac{n^2}{w^2}\right|}. \tag{11.18}$$

Na rysunku 11.3 jest przedstawiona zależność współczynnika zwielokrotnienia W od stosunku częstości siły wymuszającej do częstości własnej układu, tj. $\frac{n}{w}$. Widzimy, że współczynnik zwielokrotnienia jest nieskończenie duży kiedy częstość wymuszenia równa się częstości własnej układu.



Rys 11.3. Wykres rezonansowy drgań wymuszanych bezwładnościowo

Ruch ciała jest w fazie z siłą wzbudzająca dla częstości ν niższych od ω. Po przekroczeniu częstości rezonansowej wychylenie ciała odbywa się przeciwnie do zwrotu siły wymuszającej.

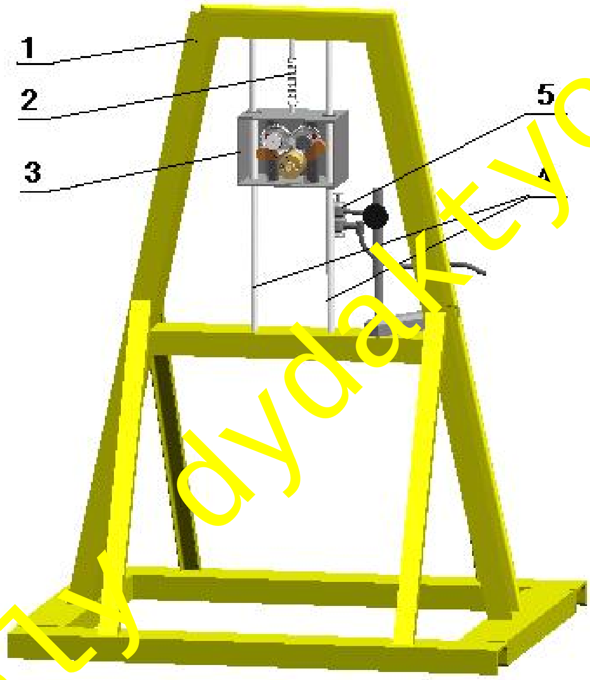
W dotychczasowych rozważaniach zakładany był brak tłumienia drgań. W przypadku obecności choćby niewielkiego tłumienia (w praktyce zawsze ma miejsce dyssypacja energii mechanicznej poprzez tarcie lub też inne opory) amplituda drgań swobodnych z częstością w zmniejsza się dość szybko z czasem i pozostają jedynie drgania z częstością n, tzw. *ustalone drgania wymuszone*. Maksimum amplitudy tych drgań odpowiada częstości siły wymuszającej minimalnie różniącej się od częstości drgań własnych. Jeśli tylko tłumienie jest niewielkie w porównaniu do jego wartości krytycznej (która to reprezentuje granicę między występowaniem i nie występowaniem oscylacji) można zaniedbać tłumienie w obliczeniach częstości własnej. Ponadto, w całym zakresie częstości siły wymuszającej wychylenie ciała spóźnia się o pewien kąt fazowy względem siły wymuszającej.

11.4. Opis stanowiska badawczego

11.4.1. Badany obiekt

Widok stanowiska badawczego przedstawiono na rys. 11.4.

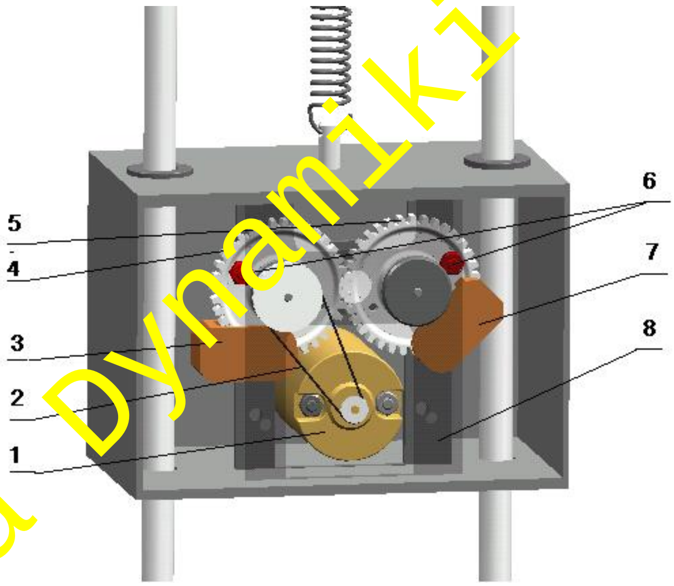
Stanowisko składa się z ramy (1), sprężyny (2), zawieszonego na niej ciała (3) (*wibratora bezwładnościowego*), dwóch prowadnic (4) zapewniających pionowy ruch wibratora oraz bezdotykowy czujnika przemieszczeń (5) rejestrującego drgania ciała.



Rys.11.4. Stanowisko badawcze

Ciało (3) może być wprawione w pionowy ruch drgający w dwojaki sposób:

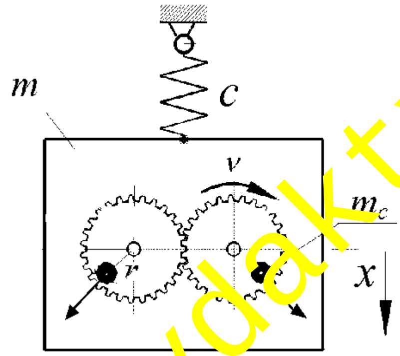
- poprzez wychylenie ciała z położenia równowagi statycznej i gwałtowne zwolnienie,
- wskutek działania na niego harmoniczne zmiennej pionowej siły wymuszającej (uzyskanej po włączeniu silnika wibratora, którego widok pokazano na rys. 11.5).



Rys.11.5. Widok wibratora bezwładnościowego

Silnik prądu stałego (1) o płynnej regulacji obrotów napędza, poprzez przekładnię pasową (2), lekkie koło zębate (4) współpracujące z identycznym kołem (5). Na obu kołach, mających po 35 zębów, są umocowane w identyczny sposób (symetrycznie względem środkowej płaszczyzny wibratora) jednakowe ciężarki (6) o masie m_c = *9 gramów* bardzo małej w porównaniu do masy *m = 2600 gramów* całego wibratora. Udział masy m_c w analizie drgań układu pomijamy w tym sensie, że przypisuje się jej tylko znaczenie źródła siły odśrodkowej. Ciężarki i zaczep sprężyny śrubowej leżą w pionowej płaszczyźnie wyznaczonej przez osie prowadnic, w której znajduje się również środek ciężkości całego wibratora. Dzięki temu zasadniczym ruchem układu są jego przemieszczenia pionowe.

W wyniku przeciwbieżnego ruchu kół powstają dwie identyczne siły odśrodkowe.



Rys. 11.6. Harmoniczna siła o amplitudzie proporcjonalnej do kwadratu częstości

Składowe poziome sił odśrodkowych wzajemnie się znoszą. Suma składowych pionowych obydwu sił odśrodkowych opisana jest następującą zależnością

$$P = 2\left(m_c r \nu^2 \sin \nu t\right) = P_o \sin \nu t \,, \qquad (11.19)$$

gdzie:

$P_o = 2\left(m_c r n^2\right) = S n^2$ - amplituda siły wymuszającej,

m_c - masa ciężarka umocowanego mimośrodowo na kole zębatym,

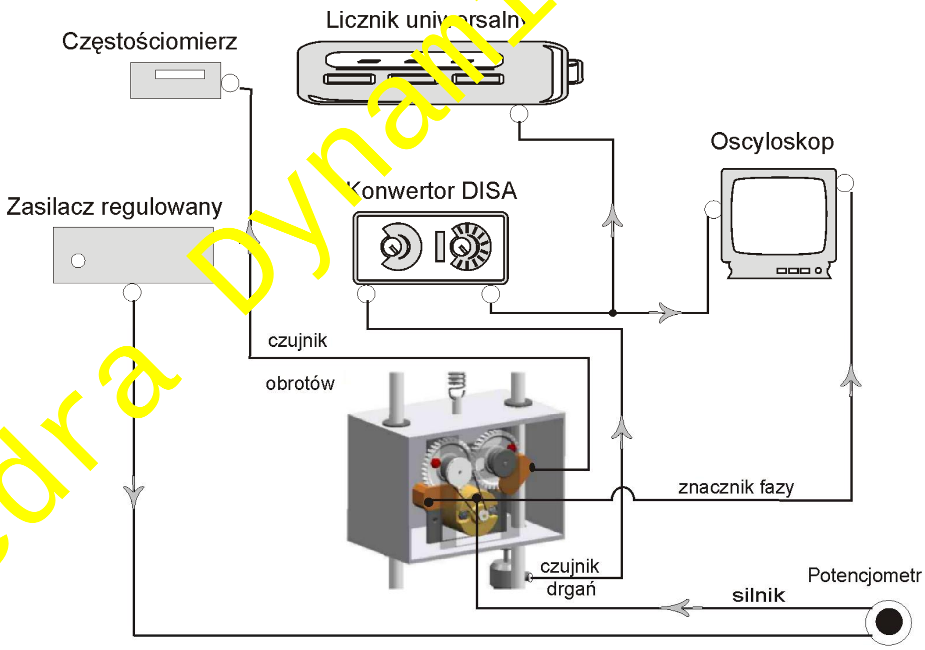
r - odległość ciężarka od osi obrotu koła,

ν - prędkość kątowa (ustalona) koła zębatego.

Siła wymuszająca ma zatem kierunek pionowy, a jej wartość jest harmoniczną funkcją czasu.

11.4.2. Przyrządy pomiarowe i sposób wykonywania pomiarów

Pomiary wielkości charakterystycznych dla badanego zjawiska dokonuje się z wykorzystaniem przyrządów elektrycznych, takich jak czujniki obrotu i przemieszczeń, licznik uniwersalny KZ-2025, częstościomierz oraz oscyloskop. Schemat ideowy linii pomiarowej jest przedstawiony na rys.11.7.



Rys.11.7. Schemat blokowo-ideowy linii pomiarowej

Okres drgań ciała jest mierzona za pomocą licznika uniwersalnego, który otrzymuje impulsy (sterujące jego bramką) z konwertora sygnału bezdotykowego czujnika przemieszczeń (*pojemnościowy* czujnik firmy DISA). Sygnał z konwertora jest podawany także na wejście oscyloskopu. Umożliwia to obserwację na jego ekranie przebiegu czasowego wychyleń drgającego ciała.

Częstość siły wymuszającej jest określana na podstawie pomiaru szybkości obrotu kół zębatych (regulowanej płynnie specjalnym potencjometrem). Do pomiaru tej szybkości służy fotoelektrycznego czujnika obrotów (7) (zobacz rys. 11.5) podający sygnał na wejście częstościomierza bądź licznika uniwersalnego. Linię optyczną czujnika obrotów przegradza kolejno każdy ząb koła, zatem czujnik wytwarza *35* impulsów na jeden pełen obrót koła zębatego.

Do ramki wibratora jest także przymocowany fotoelektryczny znacznik fazy (3), który podaje sygnał na wejście oscyloskopu (powodujący wygaszenie plamki) w momencie, kiedy ciężarki (6) znajdują się w górnym położeniu, co oznacza że siła wymuszająca *P* osiąga największą wartość i jest zwrócona w górę. Dzięki temu możliwa jest obserwacja na ekranie fazowego przesunięcia przemieszczenia ciała i siły wymuszającej (lokalizując położenie przerwy na przebiegu czasowym).

11.5. Przebieg pomiarów

Wyznaczenie częstości (okresu) drgań własnych badanego układu jest dokonywane w pierwszej kolejności

- *metodą impulsową*, czyli przez wychylenie ciała z położenia równowagi i nagłe jego zwolnienie,

następnie zaś

- *metodą rezonansową*, tzn. przez znalezienie takiej częstości siły wymuszającej, dla której wystąpi największa amplituda drgań.

Dane pomiarowe należy zapisywać w odpowiednich kolumnach tabeli 11.1.

Uwaga: Podczas pomiarów uważać, aby ciało nie uderzyło w elektrodę czujnika.
Włączania i przestawiania oscyloskopu, konwertora i licznika można dokonywać tylko w obecności osoby nadzorującej ćwiczenie.

11.5.1. Pomiar okresu drgań metodą impulsową

1. Włączyć oscyloskop, licznik uniwersalny KZ-2025, konwertor (górnego czujnika) i odczekać kilka minut (celem nagrzania się aparatury).
2. Nastawić licznik na pomiar automatyczny (pokrętło **LEVEL** w położeniu AUTO) jednego okresu (wciśnięty przycisk **PERIOD C** oraz przycisk **1**) z włączoną pamięcią (przełącznik na tylnej ścianie obudowy).
3. Oscyloskop należy ustawić na pracę jednokanałową - wybrać kanał drugi (suwak w położeniu *C2*) z polaryzacją odwróconą (przycisk **C2INV** wciśnięty) z automatycznie wyzwalaną podstawą czasu (suwak **TRIGGER MODE** w położeniu *AUTO*); przebieg plamki powinien znajdować się w połowie wysokości ekranu.
4. Naciskając dwoma palcami na górną pokrywę wibratora w okolicach zaczepu sprężyny wychylić ciało do dołu około *1 cm* (**w żadnym wypadku nie wolno uderzyć w elektrodę czujnika drgań)**, zwolnić nacisk i obserwować:
   - ruch ciała,
   - przebieg czasowy na ekranie oscyloskopu,
   - wyświetlacz licznika.

   Zapisać *trzecie* albo *czwarte* wskazanie licznika w drugiej kolumnie tabeli 11.1.
   Uwaga!
   Należy wybrać stosowne nastawy dla odchylania pionowego i podstawy czasu zapewniające dobrą widoczność kilku okresów na przebiegu.
5. Powtórzyć powyższy pomiar kilkakrotnie.
6. Przestawić licznik na pomiar średniej z 10 okresów (wciśnięty przycisk **P. A. C** oraz przycisk **10**). Następnie w podobny jak opisano poprzednio sposób dokonać kolejnych pomiarów, zapisując ich wyniki w trzeciej kolumnie tabeli 11.1.

Nie wyłączać przyrządów.

11.5.2. Pomiar częstości rezonansowej drgań

1. Włączyć dodatkowo zasilacz regulowany silnika oraz zasilacz czujników obrotu i fazy, jak również częstościomierz siły.
2. Oscyloskop przestawić na pracę z podstawą czasu wyzwalaną impulsem (suwak **TRIGGER MODE** w położeniu *NORMA*) pochodzącym z zewnętrz - w tym przypadku ze znacznika fazy (suwak **SOURCE** w położeniu *EXT*).
3. Obracając powoli w prawo pokrętło potencjometru zasilacza silnika wibratora zwiększać obroty kół celem znalezienia rezonansu. Należy jednocześnie obserwować:
   - ruch ciała,
   - przebieg czasowy na ekranie oscyloskopu,
   - wskazania częstościomierza (i ewentualnie licznika).

   O tym, że układ znajduje się w rezonansie świadczyć będą:
   - położenie zaciemnienia (przerwy) przebiegu czasowego w pobliżu jego poziomej osi symetrii,
   - największa wysokość tego przebiegu,

   Wówczas należy dokonać pomiaru częstości siły wymuszającej. Wskazania częstościomierza siły zapisywać w czwartej kolumnie tabeli 11.1.

   Uwaga: Nie utrzymywać układu zbyt długo w rezonansie, aby nie uszkodzić sprężyny oraz czujnika drgań.
4. Powtórzyć powyższy pomiar kilkakrotnie. W tym celu należy obrócić nieznacznie (w prawo albo w lewo) pokrętło potencjometru zasilacza silnika (aby odstroić układ - wyjść z rezonansu) i następnie dostroić go ponownie.
5. Zatrzymać silnik (poprzez obrót w lewo pokrętła potencjometru), wyłączyć wszystkie przyrządy pomiarowe i zasilacze oraz *uporządkować stanowisko pomiarowe.*

11.6. Opracowanie wyników pomiarów i sprawozdanie

11.6.1. Obliczenia pomocnicze

Po zakończeniu pomiarów należy przystąpić do wykonywania obliczeń niezbędnych do wypełnienia wszystkich rubryk tabeli 11.1 oraz określenia niepewności pomiarów. Potrzebne do obliczeń wartości masy *m*, stałej sprężyny *c* dostępne są w dokumentacji stoiska.

Wszelkie wyniki obliczeń zaokrąglić biorąc pod uwagę niedoskonałość doświadczenia. Należy pamiętać, że nie ma potrzeby być bardzo dokładnym, opisując własną niedokładność. W szczególności niepewności i różnice procentowe obliczać z dokładnością do jednej lub najwyżej dwóch cyfr znaczących. Wynik końcowy winien być tak zaokrąglony, aby rząd jego ostatniej cyfry znaczącej był taki sam, jak rząd niepewności. (Niepewność nie może być wyznaczona z większą dokładnością niż sama wielkość, której ona dotyczy).

11.6.2. Niepewności pomiarów

Należy określić niepewności przypadkowe standardowe pomiaru okresu drgań oraz częstości własnej. Do obliczenia niepewności stosuje się następujące wzory.

Niepewność pojedynczego pomiaru:

$$u_0(T) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(T_i - T_0)^2}{n-1}} \quad \text{albo} \quad u_0(f) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(f_i - f_0)^2}{n-1}}, \qquad (11.20)$$

gdzie wartość średnia jest określona zależnością

$$T_0 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} T_i \quad \text{albo} \quad f_0 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_i\,. \qquad (11.21)$$

Niepewność wartości średniej

$$u(T) = \frac{u_0(T)}{\sqrt{n}} \quad \text{albo} \quad u(f) = \frac{u_0(f)}{\sqrt{n}}. \qquad (11.22)$$

Niepewności częstości własnej oblicza się ze wzoru:

$$u(w) = 2p\frac{1}{T_0^{\,2}}u(T) \qquad \text{albo} \qquad u(w) = 2p\,u(f), \tag{11.23}$$

gdzie wartość liczby π należy przyjąć z dokładnością o jeden rząd większą niż niepewność okresu.

11.6.3. Sprawozdanie

Sprawozdanie, które musi być sporządzone w *sposób staranny* i bezwzględnie oddane na zakończenie zajęć ma zawierać:

a) temat i cel ćwiczenia,
b) wypełnioną tabelę 11.1,
c) obliczenia niepewności pomiarów okresu i częstości,
d) wyniki pomiaru okresu drgań zapisane w postaci : $(T_0 \pm u(T))$ [jednostka],
e) wyniki pomiaru częstości własnej zapisane w postaci: $(w_0 \pm u(w))$ [jednostka],
f) obserwacje i wnioski.

11.7. Pytania sprawdzające

1. *Opisać prosty ruch harmoniczny, podać kilka przykładów, wyjaśnić jego nazwę.*
2. *Drgania, fale – objaśnić te zjawiska, wymienić podstawowe wielkości je charakteryzujące.*
3. *Objaśnić pojęcia: drgania swobodne, drgania wymuszone, drgania tłumione.*
4. *Podać praktyczne powody, dla których ważna jest znajomość częstości własnych układu.*
5. *Ułożyć równanie drgań wymuszonych oscylatora harmonicznego o jednym stopniu swobody.*
6. *Objaśnić zjawisko rezonansu.*
7. *Narysować i opisać charakterystykę amplitudowo-czestościową (krzywą rezonansową) układu liniowego o jednym stopniu swobody wzbudzanego bezwładnościowo.*

Tabela 11.1. Wyniki pomiarów i obliczeń

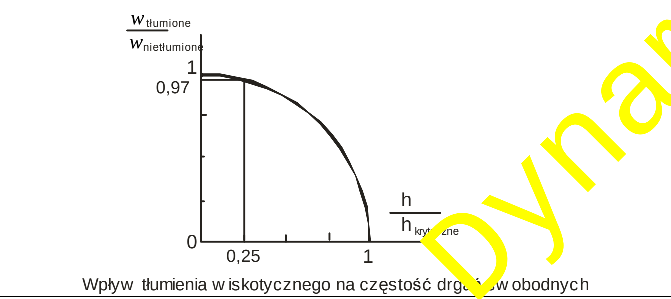
Masa ciała m = ... kg stała sprężyny c = ... N/mm

Pomiary:

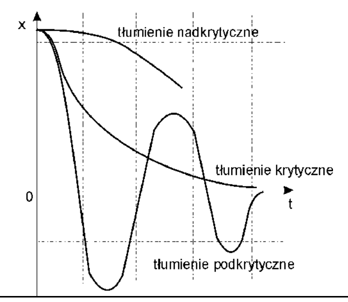
Numer pomiaru	**Metoda impulsowa**		**Metoda rezonansowa**	
	Pojedynczy okres	Średnia z 10 okresów	Wskazanie częstościomierza	Częstotliwość siły wymuszającej
i	T_i	T_i	N_i	$f_i = 1000\ N_i\ /\ 35$
--	**s**	**s**	**kHz**	**Hz**
1				
2				
3				
...				
6				

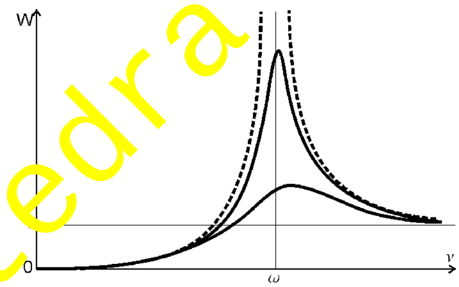
Obliczenia:

Średnia arytmetyczna T_0 **[s]**			Średnia arytmetyczna f_0 **[Hz]**	
Niepewność średniej *u(T)* **[s]** *(wzór 11.22)*			Niepewność średniej *u(f)* **[Hz]** *(wzór 11.22)*	
Częstość własna doświadczalna $w_0 = \frac{2p}{T_0}$ **[rad/s]**			Częstość własna doświadczalna $w_0 = 2p\ f_0$ **[rad/s]**	
Niepewność średniej częstości *u(w)* **[rad/s]** *(wzór 11.23)*			Niepewność średniej częstości *u(w)* **[rad/s]** *(wzór 11.23)*	
Częstość własna teoretyczna *w* **[rad/s]** *(wzór 11.3)*				
Względna różnica częstości teoretycznej oraz doświadczalnej $\Delta = \frac{w - w_0}{w} \cdot 100$ **[%]**			Względna różnica częstości teoretycznej oraz doświadczalnej $\Delta = \frac{w - w_0}{w} \cdot 100$ **[%]**	

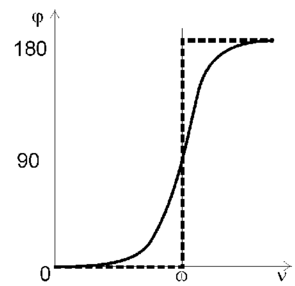


Wpływ tłumienia wiskotycznego na częstość drgań swobodnych





Wykres rezonansowy układu jednomasowego (wymuszenie bezwładnościowe):



Przesunięcie fazowe względem siły wymuszającej:

- - - - - drgania nietłumione, _____ drgania z tłumieniem wiskotycznym