



DRGANIA UKŁADU O DWÓCH STOPNIACH SWOBODY. DYNAMICZNY ELIMINATOR DRGAŃ

12.1. Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest obserwacja zjawiska drgań układu mechanicznego o dwóch stopniach swobody, doświadczalne wyznaczenie częstości drgań własnych układu, poznanie zjawiska dynamicznego eliminowania drgań i jego praktycznego wykorzystania w technice oraz zaznajomienie się z analizą numeryczną w tym z tworzeniem modeli wirtualnych układów drgających.

12.2. Wprowadzenie

Obiektem badań jest liniowy układ mechaniczny składający się z dwóch ciał i dwóch sprężyn śrubowych walcowych, których masy są niewielkie w porównaniu do mas ciał. Pod uwagę brane są jedynie wychylenia ciał w kierunku pionowym, co odpowiada założeniu, że analizowany układ ma tylko dwa stopnie swobody. Badane będą drgania układu wymuszone zmienną siłą działającą na jedno z ciał.

Pomiary wielkości charakterystycznych dla badanego zjawiska dokonuje się z wykorzystaniem przyrządów elektrycznych, takich jak czujniki obrotu i przemieszczeń, licznik czasu oraz oscyloskop.

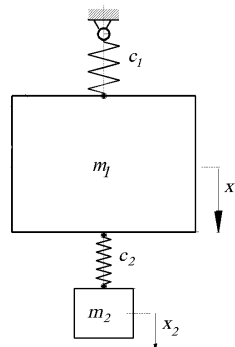
Dane uzyskiwane z pomiarów będą zbierane w dwóch tabelach. Następnie poddane one zostaną dalszemu opracowaniu w celu porównania ich z wynikami uzyskiwanymi z modelu teoretycznego.

Do generowania równań ruchu, ich rozwiązania oraz prezentacji graficznej stosowany jest system *Mathematica*, natomiast tworzenie modeli wirtualnych odbywa się z wykorzystaniem pakietu programów *Working Model*.

12.3. Teoretyczny opis zjawiska

12.3.1. Częstości i postacie własne układu o dwóch stopniach swobody

Na rysunku 12.1 jest przedstawiony układ składający się z ciała o masie m_1 zawieszono na sprężynie o stałej c_1 oraz umocowanego do niego na sprężynie o stałej c_2 ciała o masie m_2 .



Rys.12.1. Układ o dwóch stopniach swobody

Jeśli przez x_1 oraz x_2 oznaczyć wychylenia ciał odmierzane od ich położenia równowagi trwałej, to równania ruchu ciał będą miały postać:

$$\begin{aligned} m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} &= -c_1 x_1 + c_2 (x_2 - x_1), \\ m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} &= -c_2 (x_2 - x_1) \end{aligned} \quad (12.1)$$

albo po przekształceniu:

$$\begin{aligned} m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + (c_1 + c_2)x_1 - c_2 x_2 &= 0, \\ m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} - c_2 x_1 + c_2 x_2 &= 0. \end{aligned} \quad (12.2)$$

Jest to układ liniowych jednorodnych równań różniczkowych drugiego rzędu i jego rozwiązanie można założyć w następującej formie:

$$x_1 = a_1 \sin(\omega t + j), \quad (12.3)$$

$$x_2 = a_2 \sin(\omega t + j). \quad (12.4)$$

Podstawiając założone rozwiązanie do układu (12.2) otrzymuje się:

$$\begin{aligned} -m_1 a_1 \omega^2 \sin(\omega t + j) + (c_1 + c_2) a_1 \sin(\omega t + j) - c_2 a_2 \sin(\omega t + j) &= 0, \\ -m_2 a_2 \omega^2 \sin(\omega t + j) - c_2 a_1 \sin(\omega t + j) + c_2 a_2 \sin(\omega t + j) &= 0. \end{aligned} \quad (12.5)$$

Równania te mają być spełnione dla dowolnej chwili t wobec tego uzyskuje się następujący układ liniowych równań algebraicznych względem współczynników a_1 i a_2 :

$$\begin{aligned} -m_1 a_1 \omega^2 + (c_1 + c_2) a_1 - c_2 a_2 &= 0, \\ -m_2 a_2 \omega^2 - c_2 a_1 + c_2 a_2 &= 0. \end{aligned} \quad (12.6)$$

Jest to jednorodny układ równań i jego niezerowe rozwiązanie istnieje wówczas, gdy wyznacznik utworzony ze współczynników równań przyjmuje wartość zerową

$$\begin{vmatrix} c_1 + c_2 - m_1 \omega^2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 - m_2 \omega^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (12.7)$$

Rozwijając powyższy wyznacznik dochodzi się do równania częstości

$$(c_1 + c_2 - m_1 \omega^2)(c_2 - m_2 \omega^2) - c_2^2 = 0, \quad (12.8)$$

które można zapisać również w następującej postaci

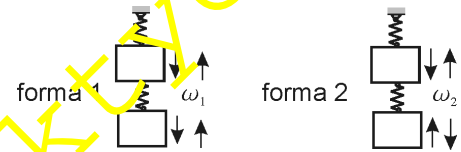
$$\omega^4 - \left(\frac{c_1 + c_2}{m_1} + \frac{c_2}{m_2} \right) \omega^2 + \frac{c_1 c_2}{m_1 m_2} = 0. \quad (12.9)$$

Z dwukwadratowego równania uzyskuje się następujące wzory na dwie częstości własne (ujemne wartości ω nie mają żadnego sensu fizycznego):

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{c_1 + c_2}{m_1} + \frac{c_2}{m_2} \right) - \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{c_1 + c_2}{m_1} \right)^2 + \frac{c_2^2}{m_2^2} - 2 \frac{(c_1 - c_2) c_2}{m_1 m_2}}}, \quad (12.10)$$

$$w_2 = \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{c_1 + c_2}{m_1} + \frac{c_2}{m_2} \right) + \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{c_1 + c_2}{m_1} + \frac{c_2}{m_2} \right)^2 - 2 \frac{(c_1 - c_2)c_2}{m_1 m_2}}} \quad (12.11)$$

Odpowiadają one dwom postaciom drgań własnych układu



W przypadku identycznych mas i stałych sprężyn, otrzymuje się następujące zależności:

$$w_1 = \sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{2}} \sqrt{\frac{c}{m}}, \quad (12.12)$$

$$w_2 = \sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{2}} \sqrt{\frac{c}{m}}, \quad (12.13)$$

gdzie: $m = m_1 = m_2$ oraz $c = c_1 = c_2$.

Warto porównać otrzymane powyżej związki z wzorem na częstość własną układu o jednym stopniu swobody.

Częstości drgań swobodnych nietłumionych układu liniowego są określone jedynie przez parametry układu drgającego (bezwładności i sztywności) i nie zależą od warunków początkowych. Liczba częstości oraz postaci własnych jest równa liczbie stopni swobody danego układu (w analizowanym przypadku wynosi ona 2).

Pełne rozwiązanie opisujące ruchy ciała można zapisać jako:

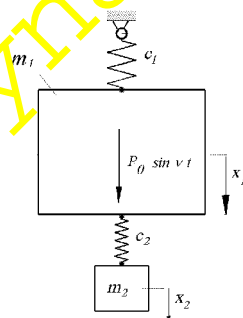
$$x_1 = x_{11} + x_{12} = a_{11} \sin(w_1 t + j_1) + a_{12} \sin(w_2 t + j_2), \quad (12.14)$$

$$x_2 = x_{21} + x_{22} = a_{21} \sin(w_1 t + j_1) + a_{22} \sin(w_2 t + j_2). \quad (12.15)$$

Współczynniki a oraz j zależą od warunków rozpoczęcia ruchu, tzn. od początkowych wychyleń i początkowych prędkości ciała. Zazwyczaj układ wykonuje drgania okresowe o częstości i formie będących kombinacją jego częstości i postaci własnych. Można jednak tak dobrać te warunki początkowe, aby uzyskać drgania tylko w jednej postaci własnej.

12.3.2. Drgania wymuszone; rezonans i antyrezonans

Rozważamy drgania układu z rys. 12.1 wywołane przez przyłożenie do ciała o masie m_1 harmonicznego siły wymuszającej o częstości n oraz amplitudzie P_0 . Analizowany obecnie układ jest przedstawiony na rys. 12.2.



Rys. 12.2. Układ o dwóch stopniach swobody wzbudzany siłą harmoniczną

Równania ruchu tego układu przyjmują następującą postać:

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + (c_1 + c_2)x_1 - c_2 x_2 = P_0 \sin nt, \quad (12.16)$$

$$m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} - c_2 x_1 + c_2 x_2 = 0. \quad (12.17)$$

Jest to liniowy niejednorodny układ równań różniczkowych drugiego rzędu, którego rozwiązanie jest sumą omówionego wcześniej rozwiązania ogólnego układu jednorodnego (reprezentującego drgania swobodne) i rozwiązania szczególnego układu niejednorodnego (opisującego ustalone drgania wymuszone).

Rozwiązanie szczególne można przewidzieć w postaci:

$$x_1 = A_1 \cdot \sin nt, \quad (12.18)$$

$$x_2 = A_2 \cdot \sin nt, \quad (12.19)$$

gdzie A_1 i A_2 są dowolnymi stałymi.

Podstawiając rozwiązanie szczególne do równań różniczkowych ruchu, otrzymuje się:

$$A_1 = \frac{P_0(c_2 - m_2 n^2)}{(c_1 + c_2 - m_1 n^2)(c_2 - m_2 n^2) - c_2^2}, \quad (12.20)$$

$$A_2 = \frac{P_0 c_2}{(c_1 + c_2 - m_1 n^2)(c_2 - m_2 n^2) - c_2^2}. \quad (12.21)$$

Założone rozwiązanie przestaje być słuszne dla wartości częstości siły wymuszającej, przy której mianownik we wzorach (12.20) i (12.21) będzie równy zero. Wówczas rozwiązanie musi mieć inną postać, albowiem stała A_1 bądź A_2 staje się nieoznaczona. Stan taki nazywa się *rezonansem*, amplituda drgań rośnie w nim liniowo z czasem (dopóki drgania nie przestaną być "małe") i zachodzi on gdy częstość siły wymuszającej n jest równa jednej z częstości własnych układu w_1 albo w_2 . Warunek zerowania się mianownika jest bowiem identyczny z zależnością (12.8).

Jeżeli amplituda siły wymuszającej $P_0 = S n^2$, gdzie n oznacza częstość wzbudzenia natomiast S jest współczynnikiem zależnym od parametrów konstrukcyjnych wibratora, to amplituda wychyleń *ustalonych drgań wymuszonych* ciała o masie m_1 (wartość bezwzględna stałej A_1) będzie następująca:

$$|A_1| = \left| \frac{S n^2 (c_2 - m_2 n^2)}{(c_1 + c_2 - m_1 n^2)(c_2 - m_2 n^2) - c_2^2} \right| = \frac{S}{m_1} W_1. \quad (12.22)$$

Symbol W_1 oznacza tutaj współczynnik zwielokrotnienia amplitudy wychYLENIA ciała 1.

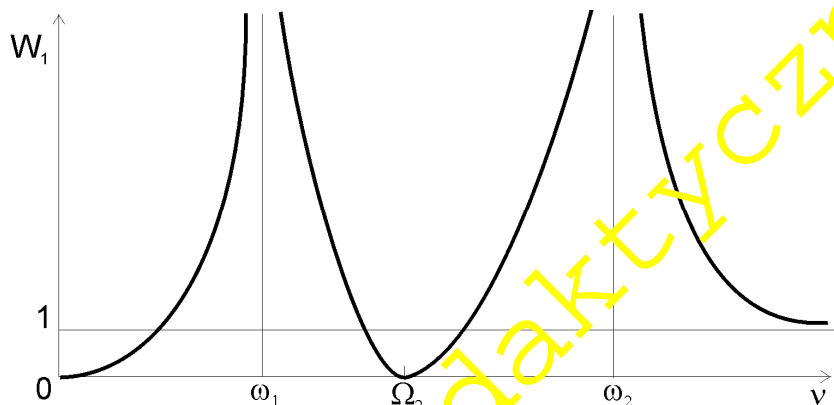
Wprowadzając pomocnicze oznaczenia

$$\Omega_1 = \sqrt{\frac{c_1}{m_1}} \quad \text{oraz} \quad \Omega_2 = \sqrt{\frac{c_2}{m_2}}$$

współczynnik zwielokrotnienia można przedstawić w następującej postaci

$$W_1 = \frac{\left| \left(\frac{n}{\Omega_1} \right)^2 \left[1 - \left(\frac{n}{\Omega_2} \right)^2 \right] \right|}{\left| \left[1 + \frac{c_2}{c_1} - \left(\frac{n}{\Omega_1} \right)^2 \right] \left[1 - \left(\frac{n}{\Omega_2} \right)^2 \right] - \frac{c_2}{c_1} \right|}. \quad (12.23)$$

Z rysunku 12.3 pokazującym zależność W_1 od częstości siły wymuszającej n wynika, że współczynnik zwielokrotnienia staje się nieograniczonym dwukrotnie, a mianowicie kiedy częstość wymuszenia równa się jednej z częstości własnych.



Rys. 12.3. Wykres rezonansowy dla ciała o masie m_1

Jest regułą, że liczba rezonansów równa się liczbie stopni swobody układu. Należy jednak dla ścisłości zaznaczyć, że dla wystąpienia rezonansu w i -tej postaci własnej nie wystarczy, aby częstość sił wymuszających była równa i -tej częstości własnej. Rezonans nie wystąpi w przypadku kiedy siły wymuszające działające na ciała układu nie wykonują pracy na przemieszczeniach odpowiadających i -tej postaci drgań własnych tego układu.

Zwracając uwagę na zależność (12.20) widać, że wartość A_1 staje się zerem, gdy spełniony jest warunek

$$P_0(c_2 - m_2 n^2) = 0.$$

Zatem dla dowolnej amplitudy siły P_0 różnej od zera wystarczy, aby częstość wymuszenia n była równa n_a , przy czym

$$n_a = \sqrt{\frac{c_2}{m_2}} = \Omega_2, \tag{12.24}$$

gdzie:

Ω_2 - częstość drgań własnych układu złożonego z ciała o masie m_2 zawieszonoego na sprężynie o sztywności c_2 ,

n_a - częstość siły wymuszającej odpowiadająca stanowi układu zwanemu niekiedy *antyrezonansem*.

W przypadku, gdy częstość siły wymuszającej spełnia zależność (12.24) otrzymuje się następującą wartość stałej A_2

$$A_2 = \frac{P_0}{c_2}. \tag{12.25}$$

Wynika stąd, że to ciało, na które bezpośrednio działa siła wymuszająca pozostaje nieruchome, drugie zaś z nich wykonuje drgania harmoniczne o ograniczonej amplitudzie, to znaczy

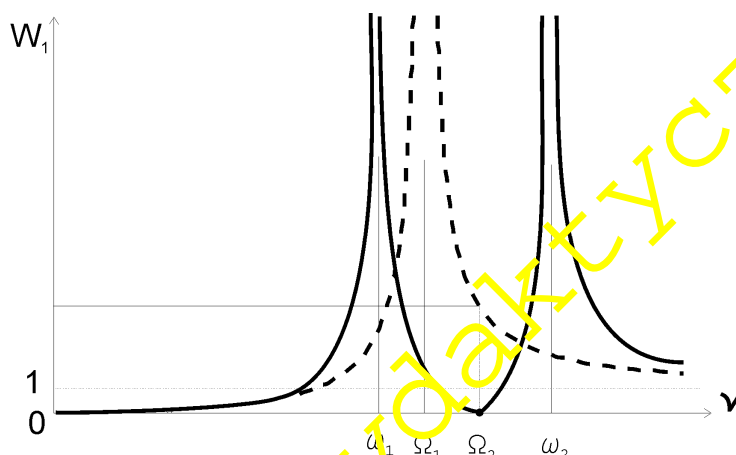
$$x_1 = 0, \tag{12.26}$$

$$x_2 = -\frac{P_0}{c_2} \sin nt. \tag{12.27}$$

Znak minus we wzorze świadczy o tym, że ciało 2 porusza się w stronę przeciwną do zwrotu siły wymuszającej (wychylenie ciała jest w *przeciw fazie* z siłą wymuszającą).

12.3.3. Dynamiczny eliminator drgań

Zjawisko antyrezonansu jest wykorzystywane w technice do eliminacji drgań niektórych maszyn i urządzeń. Celem pozostawienia w spoczynku głównego układu złożonego z masy m_1 i sztywności c_1 , na który działa zmienna siła dodajemy do niego dodatkowy układ o odpowiednio dobranych: m_2 i c_2 stanowiący *dynamiczny eliminator drgań*.



Rys. 12.4. Wykres rezonansowy dla ciała o masie m_1 . linia przerywana - układ złożony z m_1 oraz c_1 , linia ciągła układ złożony z m_1, m_2, c_1, c_2

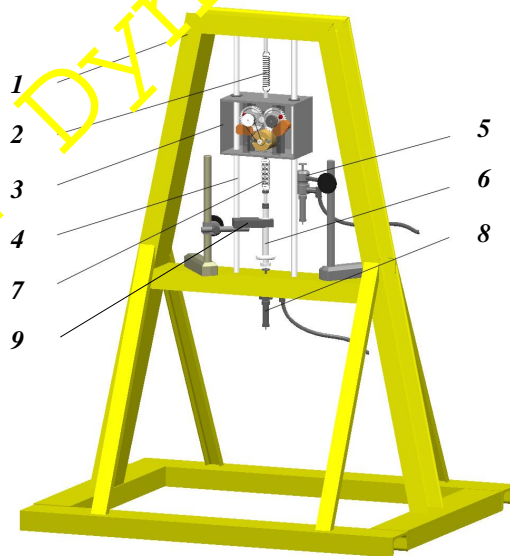
Tego rodzaju urządzenia nadają się do eliminowania drgań wzdłużnych, skrętnych lub giętych, kiedy częstość siły wymuszającej jest prawie niezmienna (optymalne dostrojenie eliminatora ma miejsce, gdy $W_2 = W_1$). Jeżeli częstość pobudzenia zmienia swoją wartość w wąskim zakresie możliwe jest stosowanie eliminatorów samo dostrajających się (na przykład przez zmianę sztywności elementu sprężystego). W przypadku układów doznających drgań skrętnych mogą być stosowane eliminatory dynamiczne w postaci odśrodkowego wahadła.

W powyższych rozważaniach zakładany był całkowity brak tłumienia wiskotycznego drgań. Dla bardzo słabych tłumień maksimum amplitudy drgań ustalonych odpowiada częstości siły wymuszającej minimalnie różniącej się od częstości drgań własnych. Należy podkreślić ponadto, że tłumienie wiskotyczne osłabia działanie eliminatora dynamicznego (bywa ono użyteczne, kiedy częstość siły wymuszającej może zmieniać się w pewnym zakresie). W przypadku wystarczająco dużego tłumienia wiskotycznego w układzie o dwóch stopniach swobody może wystąpić tylko jeden rezonans (zamiast typowych dwóch).

12.4. Opis stanowiska badawczego

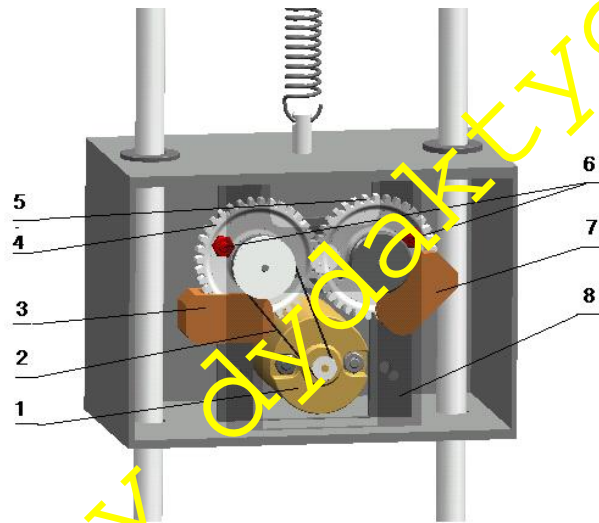
12.4.1. Badany obiekt

Widok stanowiska badawczego przedstawiono na rysunku 12.5. Stanowisko składa się z ramy (1), sprężyny (2), zawieszono na niej ciała - wibratora (3), dwóch prowadnic (4) zapewniających pionowy ruch wibratora, ciała (6) podłączonego do wibratora za pomocą sprężyny (7), jego prowadnicy (9) oraz dwóch bezdotykowych czujników drgań: górnego (5) i dolnego (8).



Rys. 12.5. Widok stanowiska badawczego

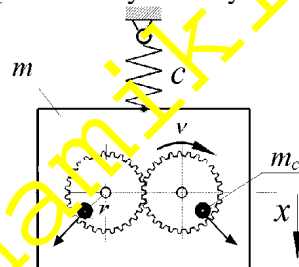
Ciała mogą być wprowadzone w pionowy ruch drgający przez działanie na jedno z nich harmonicznie zmiennej pionowej siły wymuszającej uzyskanej po włączeniu silnika wibratora. Widok wibratora bezwadnościowego przedstawiono na rys 12.6.



Rys.12.6. Widok wibratora bezwadnościowego

Silnik prądu stałego (1) o płynnej regulacji obrotów napędza, poprzez przekładnię pasową (2), lekkie koło zębate (4) współpracujące z identycznym kołem (5). Na obu kołach, mających po 35 zębów, są umocowane w identyczny sposób (symetrycznie względem środkowej płaszczyzny wibratora) jednakowe ciężarki (6) o masie $m_c = 9$ gramów bardzo małej w porównaniu do masy całego wibratora $m = 2600$ gramów. Udział masy m_c w analizie drgań układu pomijamy w tym sensie, że przypisuje się jej tylko znaczenie źródła siły odśrodkowej. Ciężarki i zaczepy sprężyn śrubowych leżą w pionowej płaszczyźnie wyznaczonej przez osie prowadnic, w której znajduje się również środek ciężkości całego wibratora. Dzięki temu zasadniczym ruchem układu są jego przemieszczenia pionowe.

W wyniku przeciwniebnego ruchu kół powstają dwie identyczne siły odśrodkowe.



Rys. 12.7. Harmoniczna siła o amplitudzie proporcjonalnej do kwadratu częstotliwości

Składowe poziome siły odśrodkowych wzajemnie się znoszą. Suma składowych pionowych obydwu sił odśrodkowych wynosi:

$$P = 2(m_c r n^2 \sin nt) = P_0 \sin nt \quad (12.28)$$

Siła wymuszająca ma zatem kierunek pionowy, a jej wartość jest harmoniczną funkcją czasu. Amplituda siły wymuszającej określona jest zależnością

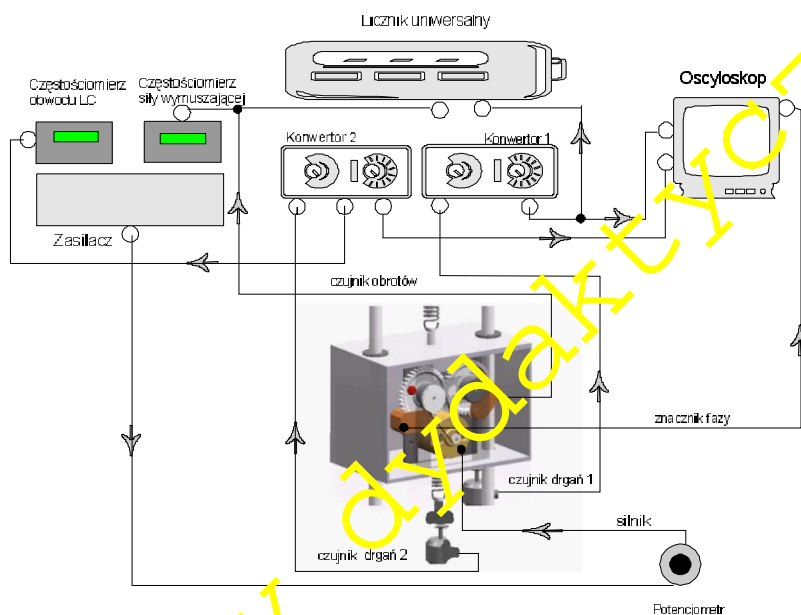
$$P_0 = 2m_c r n^2 = S n^2 \quad (12.29)$$

gdzie:

- v - prędkość kątowna (ustalona) koła zębatego,
- $S = 2m_c r$ - parametr konstrukcyjny wibratora.

12.4.2. Przyrządy pomiarowe i sposób wykonywania pomiarów

Pomiary wielkości charakterystycznych dla badanego zjawiska dokonuje się z wykorzystaniem linii pomiarowej, której schemat jest przedstawiony na rys. 12.8.



Rys. 12.8. Schemat blokowo-ideowy linii pomiarowej

Okresy drgań ciał są mierzone za pomocą licznika uniwersalnego, który otrzymuje impulsy (sterujące jego bramką) z bezdotykowych czujników przemieszczeń (*pojemnościowy* czujnik DISA). Sygnały z konwerterów są podawane także na wejścia oscyloskopu. Umożliwia to obserwację na jego ekranie przebiegów czasowych wychyleń drgających ciał. Fotelektryczny czujnik obrotów kół (7) (zobacz rys.12.6) przekazuje sygnał do częstościomierza zapewniającego pomiar częstości siły wymuszającej. Do ramki wibratora jest także przymocowany fotelektryczny znacznik fazy (3), który daje sygnał na wejście oscyloskopu (powodujący wygaszenie plamki i powstanie przerwy na przebiegach) w momencie, kiedy ciężarki (6) znajdują się w górnym położeniu, czyli gdy siła wymuszająca osiąga największą wartość i jest zwrócona w górę. Dzięki temu można obserwować fazowe przesunięcia wychyleń ciał i siły wymuszającej (lokalizując położenie przerwy na przebiegach czasowych). Pomiar częstotliwości obwodu LC- niezbędny dla dostrojenia oscylatora dolnego czujnika drgań – dokonywany jest przy użyciu dodatkowego częstościomierza cyfrowego.

12.5. Przebieg pomiarów

W pierwszej kolejności dokonywane są pomiary częstości (okresu) drgań własnych badanego układu metodą rezonansową, tzn. przez znalezienie takiej częstości siły wymuszającej, dla której wystąpi największa amplituda drgań. Następnie wykonywane są pomiary dotyczące zjawiska antyrezonansu.

Dane pomiarowe należy zapisywać w odpowiednich kolumnach tabeli 12.1 i tabeli 12.2. Przy pomiarze okresu drgań wskazania licznika powinny być zapisywane z dokładnością do 1 ms.

Uwaga!

1. Włączania i przestrajania oscyloskopu, konwerterów i licznika można dokonywać tylko w obecności osoby prowadzącej ćwiczenie.
2. Podczas pomiarów należy uważać, aby ciała nie uderzyły w elektrody czujników.

12.5.1. Pomiar okresu drgań własnych

1. Włączyć zasilacz silnika i czujników, oscyloskop, licznik KZ - 2025, konwertery i odczekać kilka minut (celem nagrzania się aparatury).
2. Nastawić licznik na pomiar automatyczny jednego okresu PERIOD C (z włączoną pamięcią).
3. Oscyloskop ustawić na pracę dwukanałową DUAL "siekaną" CHOP z podstawą czasu wyzwalaną NORM impulsem zewnętrznym EXT (będzie on pochodził ze znacznika fazy).
4. Obracając powoli w prawo pokrętkę potencjometru (podwyższając to napięcia silnika wibratora) zwiększyć obroty kół celem znalezienia pierwszego rezonansu. Należy jednocześnie obserwować:
 - ruchy ciał,

- przebiegi czasowe na ekranie oscyloskopu (szczególnie położenie przerwy),
- wskazania licznika.

O tym, że układ znajduje się w rezonansie świadczyć będą:

- przemieszczenie się przerwy na przebiegu czasowym w pobliże jego poziomej osi symetrii,
- największa amplituda tych przebiegów.

Odczytać wówczas wskazanie licznika i zapisać go w drugiej kolumnie tabeli 12.1.

Uwaga!

1. *Należy wybrać odpowiednie, tzn. zapewniające czytelny obraz na ekranie nastawy dla podstawy czasu i odchylenia pionowego obydwu kanałów oscyloskopu.*
2. *Nie powinno się utrzymywać układu zbyt długo w rezonansie, aby nie uszkodzić sprężyn oraz czujników drgań.*

5. Powtórzyć powyższy pomiar kilkakrotnie. W tym celu należy zmieniać *nieznacznie* obroty silnika, aby odstroić układ (wyjść z pierwszego rezonansu) i następnie ponownie go dostroić.
6. Zwiększać powoli obroty silnika celem znalezienia drugiego rezonansu. Następnie postępować podobnie jak w przypadku pierwszego rezonansu. Wskazania licznika zapisywać w trzeciej kolumnie tabeli 12.1.
7. Zatrzymać silnik obracając pokrętkę potencjometru w lewo do oporu. *Nie wylączyć przyrządów.*

12.5.2. Pomiar częstości siły i amplitudy wychyleń ciała dolnego w stanie antyrezonansu

1. Włączyć dodatkowo obydwa częstościomierze.
2. Dostroić oscylator dolnego czujnika drgań (celem umożliwienia pomiaru wartości amplitudy drgań dolnego ciała). Robi się to przez obrót śruby mikrometrycznej czujnika, aż do uzyskania wymaganej (podanej przez osobę nadzorującą) częstotliwości obwodu LC . Jest to równoważne ustawieniu takiej odległości elektrody czujnika drgań od ciała 2, przy której wzorcowano czujnik dla wyznaczenia wartości jego stałej W .
3. Pokręcając powoli w prawo pokrętkę potencjometru zwiększyć obroty kół celem zlokalizowania antyrezonansu (znajduje się on między dwoma odnalezionymi wcześniej rezonansami). Należy jednocześnie obserwować:

- ruchy ciała,
- przebiegi czasowe na ekranie oscyloskopu, zwracając uwagę na położenie przerwy na dolnym przebiegu,
- wskazania częstościomierza siły.

O tym, że układ znajduje się w antyrezonansie świadczyć będzie płaski górny przebieg na ekranie oscyloskopu. Wówczas należy odczytać wskazanie częstościomierza siły oraz zmierzyć amplitudę dolnego przebiegu na ekranie oscyloskopu. Obydwe wartości zapisać w tabeli 12.2.

Uwaga!

1. *Należy wybrać odpowiednie nastawy - zapewniające czytelny obraz na ekranie i najdokładniejszy pomiar - dla podstawy czasu i odchylenia pionowego obydwu kanałów oscyloskopu.*
2. *Zanotować w nagłówku tabeli 12.2 nastawę czułości kanału 1, przy której były robione pomiary.*

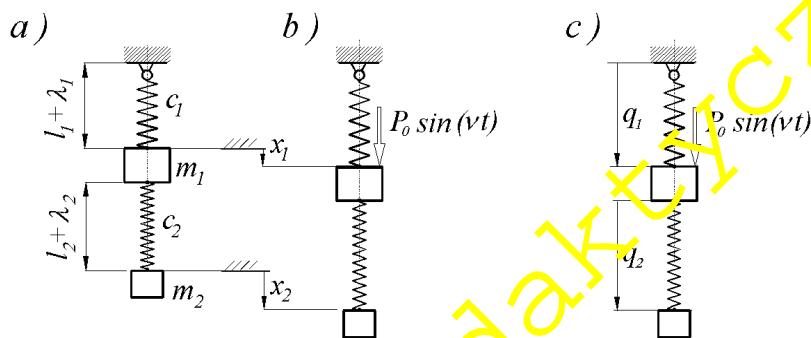
4. Powtórzyć powyższy pomiar kilkakrotnie. W tym celu należy obrócić (w prawo albo w lewo) pokrętkę potencjometru zasilacza silnika, aby odstroić układ (wyjść z antyrezonansu) i następnie dostroić go ponownie.
5. Na zakończenie, będąc w antyrezonansie odczepić delikatnie sprężynę z ciałem 2 od wibratora i obserwować ruch wibratora oraz przebiegi na ekranie oscyloskopu, zwracając uwagę na wielkość amplitudy wychyleń. Nie zmieniając ustawienia potencjometru zawiesić ponownie ciało i dokonać tych samych obserwacji, co przed odczepieniem ciała.
6. Zatrzymać silnik (poprzez obrót w lewo pokrętki potencjometru), wyłączyć wszystkie przyrządy pomiarowe i zasilacze oraz uporządkować stoisko.

12.6. Opis eksperymentu numerycznego

Eksperyment numeryczny dotyczy badania różnych modeli fizycznych i matematycznych rozpatrywanego obiektu. Wykorzystywane będą w tym celu pakiety programowe *Mathematica* oraz *Working Model*. Przedstawione tu zagadnienia zostały opracowane na podstawie skryptu [9].

12.6.1. Modele matematyczne - automatyczne generowanie i rozwiązywanie równań ruchu

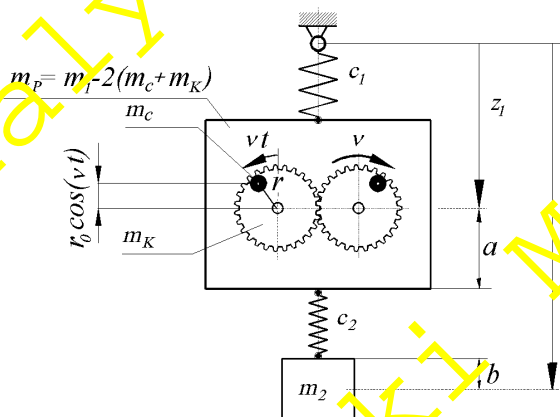
Opisując położenia mas rozpatrywanego modelu można użyć różnych współrzędnych uogólnionych (rys. 12.9).



Rys. 12.9. Różne sposoby wyboru współrzędnych uogólnionych:

- (a) - położenie równowagi statycznej;
- (b) - współrzędne bezwzględne x_1 i x_2 ,
- (c) - współrzędne względne q_1 i q_2

Ich zastosowanie prowadzi do równań ruchu o nieco innej budowie niż te, które otrzymuje się dla współrzędnych bezwzględnych.



Rys. 12.10. Współrzędne uogólnione przyjęte dla modelu podstawowego

Dalej rozpatrywane są dwa modele matematyczne badanego układu:

- podstawowy - uwzględniający względny ruch obrotowy kół zębatych o masach m_k mających mimośrodowo osadzone ciężarki o masach m_c ,
- uproszczony - bez uwzględnienia ruchu kół zębatych względem ciała I .

Dla modelu podstawowego energie układu - kinetyczna T oraz potencjalna V - określone są w następujących zależnościach:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4,$$

$$T_1 = \frac{1}{2} [m_1 - 2(m_c + m_k)] \dot{\varphi}^2,$$

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 \dot{z}_2^2,$$

$$T_3 = 2 \cdot \frac{1}{2} m_c [(nr \cos nt)^2 + (nr \sin nt + \dot{\varphi})^2] \quad T_4 = 2 \left[\frac{1}{2} (m_k \dot{\varphi}^2 + J_k n^2) \right],$$

$$V = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + V_s,$$

$$V_1 = -[m_1 - 2(m_c + m_k)] g z_1,$$

$$V_2 = -m_2 g z_2,$$

$$V_3 = -2m_c g (z_1 - r \cos nt),$$

$$V_4 = -2m_k g z_1,$$

$$V_s = \frac{1}{2} c_1 (z_1 - a - l_1)^2 + \frac{1}{2} c_2 (z_2 - z_1 - a - b - l_2)^2.$$

Długości sprężyn w stanie swobodnym oznaczone są jako l_1 i l_2 , natomiast J_k jest momentem bezwładności koła względem jego osi obrotu. Pozostałe wielkości występujące w wyrażeniach na energię kinetyczną i potencjalną widoczne są na rys. 12.10.

Dla modelu uproszczonego procedura generowania równań ruchu przygotowana w systemie *Mathematica* ma taką oto postać:

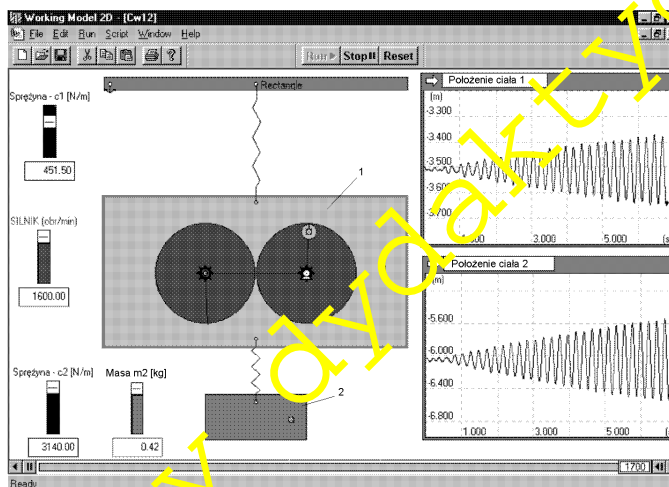
```
(*****
      (*Równania Lagrange'a II-go rodzaju*)
      (*(układ o dwóch stopniach swobody)*)
      (*****
      (* Energia kinetyczna*)
      (*****
T1=1/2*m1*(x1'[t])^2;
T2=1/2*m2*(x2'[t])^2;
T=T1+T2;
      (*****
      (* Energia potencjalna i siła uogólniona*)
      (*****
      lam1=(m1+m2)*gz/c1;
      lam2=(m2*gz)/c2;
      V=-(m1*gz*x1[t])-m2*gz*(x2[t]+l2+lam2)+
      0.5*c1*(x1[t]+lam1)^2+0.5*c2*(x2[t]-x1[t]+lam2)^2;
      Q1=P0*Sin[ni*t];
      (*****
      (*Równania Lagrange'a II-go rodzaju*)
      (*****
r1=D[D[T,x1'[t]],t]-D[T,x1[t]]+D[V,x1[t]]-Q1;
r2=D[D[T,x2'[t]],t]-D[T,x2[t]]+D[V,x2[t]]
      (*****
      (*Dane liczbowe*)
      (*****
m1=2.6; m2=0.425; c1=3140; c2=687; l1=0.; l2=0.15; a=0.1; gz=9.81; tkon=1.0; P0=0.527; ni=29.78;
      (*****
      (*Obliczenia i wyniki*)
      (*****
roz=NDSolve[{r1==0, r2==0, x1[0]==0, x1'[0]==0., x2[0]==0,
x2'[t][0]==0.},{x1[t],x2[t]},{t,0.,tkon},MaxSteps->3500];
p1=Plot[Evaluate[x1[t]]/.roz,{t,0.,tkon},AxesLabel->
{"t [s]","x1 [m]"},PlotLabel->"Cw 12 - przebieg x1",
PlotRange->All,Frame->True,GridLines->Automatic];
p2=Plot[Evaluate[x2[t]]/.roz,{t,0.,tkon},AxesLabel->
{"t [s]","x2 [m]"},PlotLabel->"Cw 12 - przebieg x2",
PlotRange->All,Frame->True,GridLines->Automatic];
Show[p1,p2,PlotLabel->"Przebiegi współrzędnych x1 i x2"]
      (*****
      (*****
```

12.6.2. Wirtualny model układu

Analiza ruchu układu w systemie *Working Model* przebiega zgodnie z następującą procedurą.

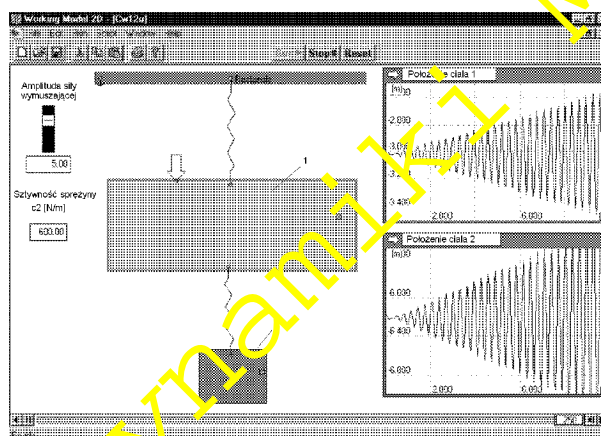
1. W oknie edytora graficznego programu *Working Model* należy narysować model układu i wprowadzić dane odpowiadające analizowanemu układowi (wartości mas ciał, sztywności sprężyn itd.).
2. Na wirtualnym modelu przeprowadzić eksperymenty polegające na dobraniu wartości prędkości obrotowej silnika, przy której występują rezonanse i antyrezonans.

Dla badanego modelu układu mas połączonych sprężycie i pobudzanych do drgań poprzez ruch obrotowy niewyważonej tarczy (przykład takiego modelu pokazany jest na rys. 12.11), można przeprowadzić szereg eksperymentów numerycznych zmieniając wartości liczbowe takich wielkości jak: c_1 , c_2 , m_2 .



Rys. 12.11 Analizowany model układu i przebiegi drgań ciał 1 i 2

Możliwe jest zbudowanie modeli wirtualnych o różnym stopniu złożoności i porównanie przebiegu zmian w rozwiązaniach otrzymanych dla różnych modeli. Dla wyznaczenia częstości drgań własnych badanego układu można wykorzystać jego uproszczony model pokazany na rys. 12.12.



Rys. 12.12. Uproszczony model układu i przebiegi drgań ciała 1 i ciała 2

12.7. Opracowanie wyników pomiarów i sprawozdanie

12.7.1. Obliczenia pomocnicze

Po zakończeniu pomiarów trzeba wykonać obliczenia niezbędne do wypełnienia pozostałych rubryk tabeli 12.1, tabeli 12.2, jak również wyliczyć niepewności pomiarów (do obliczenia wartości teoretycznych w_1 i w_2 można posłużyć się programem komputerowym "CW12.EXE"). Niezbędne dane liczbowe, takie jak: masy ciał, stałe sprężyn oraz stałą czujnika drgań należy uzyskać od osoby nadzorującej ćwiczenie.

Do obliczenia wartości teoretycznej amplitudy siły wymuszającej (w części dotyczącej badania antyrezonansu) należy przyjąć:

- masa ciężarka umocowanego mimośrodowo na kole zębatym $m_c = 9,0$ g,
- odległość środka ciężarka od osi obrotu koła $r = 25$ mm.

Wszystkie dane liczbowe zawierają tylko cyfry znaczące pewne. Wszelkie wyniki obliczeń zaokrąglić biorąc pod uwagę niedoskonałość doświadczenia. W szczególności, różnice procentowe i niepewności obliczać z dokładnością do jednej lub najwyżej dwóch cyfr znaczących. Wynik winien być zaokrąglony w ten sposób, aby rząd jego ostatniej cyfry znaczącej był taki sam, jak rząd niepewności.

12.7.2. Analiza niepewności pomiarów

Niepewności częstości własnych wyznacza się identycznie jak w **Ćwiczeniu 11**.

Należy także określić niepewność standardową wartości średniej częstości antyrezonansu wg wzorów

$$u_0(n) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (n_i - n_0)^2}{n-1}}, \quad u(n) = \frac{u_0(n)}{\sqrt{n}}, \quad (12.30)$$

gdzie wartość średnia częstości

$$n_0 = \frac{\sum_{i=1}^n n_i}{n}$$

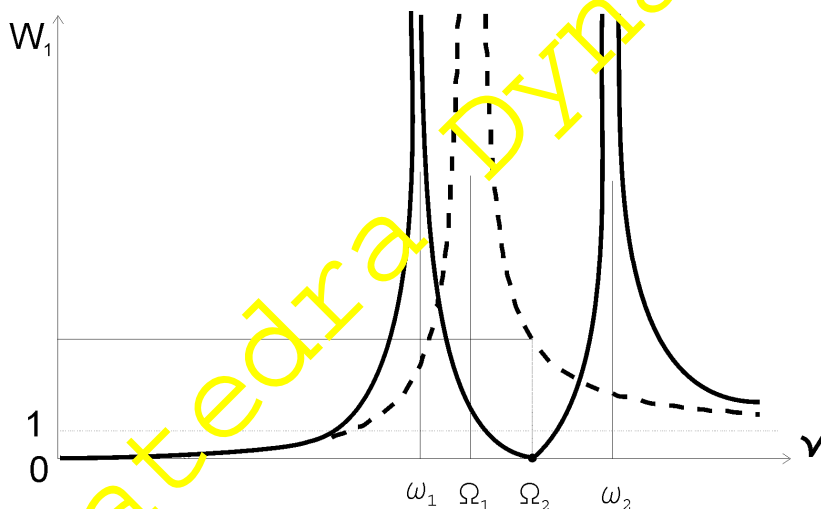
12.7.3. Sprawozdanie

W sprawozdaniu, które musi być sporządzone w sposób staranny i bezwzględnie oddane na zakończenie zajęć, należy zamieścić:

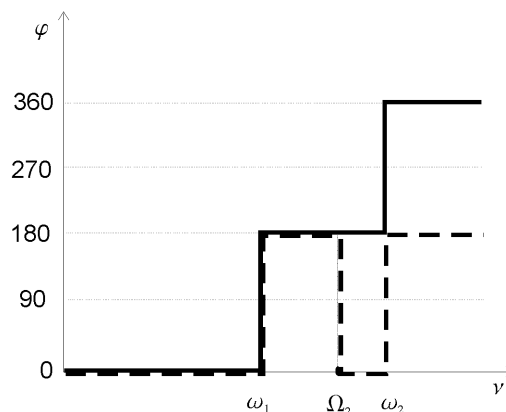
- temat i cel ćwiczenia,
- wypełnione obydwie tabele,
- obliczenia niepewności standardowej częstości antyrezonansu,
- wynik pomiaru częstości antyrezonansu z uwzględnieniem jej niepewności w postaci $n_0 \pm u(n)$,
- obserwacje i wnioski.

12.8. Pytania sprawdzające

- Wymienić terminy: liczba stopni swobody układu, częstość drgań własnych, postać drgań własnych.
- Wyprowadzić równanie drgań układu o dwóch stopniach swobody korzystając z równań Lagrange'a.
- Wyznaczyć amplitudę wymuszonych drgań ustalonych układu o dwóch stopniach swobody.
- Przedstawić i omówić krzywą rezonansową układu liniowego o dwóch stopniach swobody.
- Wymienić szkodliwe zjawiska związane z drganiami.



Wykres rezonansowy (wymuszenie bezwładnościowe):
 _____ układ dwumasowy, - - - - - układ jednomasowy



Przesunięcie fazowe względem siły wymuszającej w przypadku układu dwumasowego:

- - - - - ciało 1 _____ ciało 2

Tabela 12.1. Wyniki pomiarów i obliczeń częstości własnych układu

Masy ciał $m_1 = \dots\dots\dots$ kg $m_2 = \dots\dots\dots$ kgStałe sprężyn $c_1 = \dots\dots\dots$ N/mm $c_2 = \dots\dots\dots$ N/mm**Pomiary**

Numer pomiaru i	Pierwsza postać drgań T_{1i} [s]	Druga postać drgań T_{2i} [s]

1		
2		
3		
4		
5		
6		

Obliczenia

Średnie arytmetyczne okresów $T_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T_i$		
Częstości własne doświadczalne (średnie) $w_0 = \frac{2\pi}{T_0} \text{ [rad/s]}$		
Częstości własne teoretyczne $w_1, w_2 \text{ [rad/s]}$		
Niepewność częstości $u(w) \text{ [rad/s]}$		
Względne różnice częstości teoretycznych i doświadczalnych $\Delta = \frac{w - w_0}{w} \cdot 100 \text{ [%]}$		

Tabela 12.2. Wyniki pomiarów i obliczeń dotyczących antyrezonansu

Stała dolnego czujnika drgań

$W = \dots\dots\dots$ mm/V $\dots\dots\dots$ mm/mV

Czułość kanału I oscyloskopu

$Z = \dots\dots\dots$ mV/dz

Numer pomiaru	Wskazanie częstotliwościomierza siły wymuszającej	Częstość siły wymuszającej	Częstość siły doświadczalnej (średnia)	Niepewność częstości	Częstość siły teoretycznej	Amplituda przebiegu czasowego	Amplituda napięcia (średnia)	Amplituda doświadczalna drgań ciała dolnego (średnia)	Amplituda siły wymuszającej	Amplituda teoretyczna drgań ciała dolnego
i	n_i	ν_i	ν_0	u_i	ν_a	a_i	U_0	$ A_0 $	P_0	$ A_2 $
---	---	$n_i = \frac{2p1000n_i}{35}$	$n_0 = \frac{\sum \nu_i}{n}$	Wzór (12.30)	Wzór (12.24)	---	$U_0 = Z \frac{\sum a_i}{n}$	$ A_0 = W \cdot U_0$	Wzór (12.29)	Wzór (12.25)
	kHz	rad/s	rad/s	rad/s	rad/s	dz	mV	mm	N	mm
1										
...										
6										
Względna różnica częstości antyrezonansowej teoretycznej i doświadczalnej						Względna różnica amplitud ciała dolnego teoretycznej i doświadczalnej				
$\Delta_n = \frac{n_a - n_0}{n_a} \cdot 100$						$\Delta_A = \frac{ A_2 - A_0 }{ A_2 } \cdot 100$				
%						%				