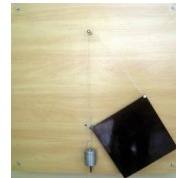


Ćwiczenie 13



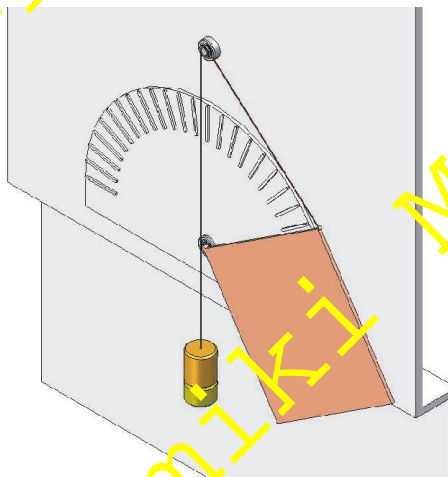
BADANIE STANÓW RÓWNOWAGI UKŁADU MECHANICZNEGO

13.1. Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest teoretyczne i doświadczalne wyznaczenie położenia równowagi i określenie stanu równowagi prostego układu mechanicznego o jednym stopniu swobody.

13.2. Wprowadzenie

Badany układ składa się z tarczy osadzonej obrotowo na poziomej osi i obciążanej za pomocą linki przesuwanej przez krążek (rys. 13.1).



Rys. 13.1. Widok badanego układu

Pomiary dokonywane na stanowisku badawczym polegają na poszukiwaniu położenia równowagi układu oraz ocenie stateczności tych położenia.

Wyniki pomiarów są porównywane z rezultatami obliczeń prowadzonych na podstawie analizy zmian energii potencjalnej określonej dla modelu fizycznego badanego układu. Przy formułowaniu modelu przyjęto, że więzy nałożone na układ są idealne, zaś obciążenia wywołane są przez siły zachowawcze – uwzględniony jest jedynie wpływ sił ciężkości. Siły oporu powstające w łożyskach tocznych są pominięte.

13.3. Teoretyczny opis zjawiska

Rozróżnia się trzy rodzaje równowagi: stałą, chwiejną i obojętną.

Równowagą stałą nazywa się taki rodzaj równowagi, przy której, po niewielkim wychyleniu układu z zajmowanego położenia, układ wraca do położenia wyjściowego bądź wykonuje wahania wokół tego położenia.

Równowagą chwiejną nazywa się taki rodzaj równowagi, przy którym najmniejsze wychylenie układu z zajmowanego położenia równowagi powoduje ruch układu bądź przejście do innego położenia albo wahania wokół nowego położenia równowagi.

Równowagą obojętną nazywa się taki rodzaj równowagi, przy którym każde małe wychylenie układu z zajmowanego położenia równowagi powoduje przejście układu do innego położenia równowagi.

W teorii stateczności położenie charakteryzujące się równowagą stałą jest nazywane *statecznym położeniem równowagi*. *Niestatecznym położeniem równowagi* określa się takie położenie, w którym równowaga układu jest chwiejna lub obojętna.

Można wykazać prawdziwość poniższego twierdzenia, noszącego nazwę *zasady Dirichleta*:

Położenie układu materialnego (o więzach idealnych) znajdującego się w zachowawczym polu sił, w którym energia potencjalna osiąga minimum, jest położeniem równowagi stałej.

Warunki konieczne i wystarczające istnienia lokalnego minimum energii potencjalnej (V) układu o jednym stopniu swobody ($V=V(q_1)$) są określone zależnościami:

$$\frac{dV}{dq_1} = 0 \quad \text{i} \quad \frac{d^2V}{dq_1^2} > 0 \quad \text{dla} \quad q_1 = q_{10}, \quad (13.1)$$

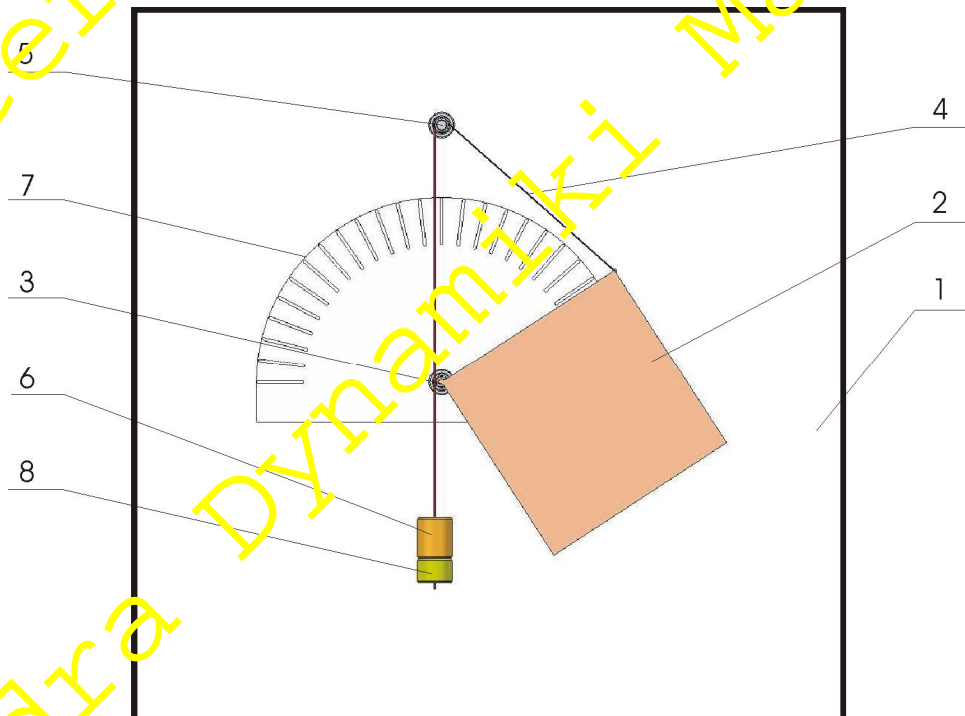
gdzie: q_1 współrzędna opisująca położenie układu,

q_{10} wartość q_1 odpowiadająca zerowaniu się pierwszej pochodnej energii V .

13.4. Analiza modelu fizycznego badanego układu

13.4.1. Badany obiekt i jego model fizyczny

Stanowiska przygotowane do wykonania ćwiczenia jest pokazane na rysunku 13.2.



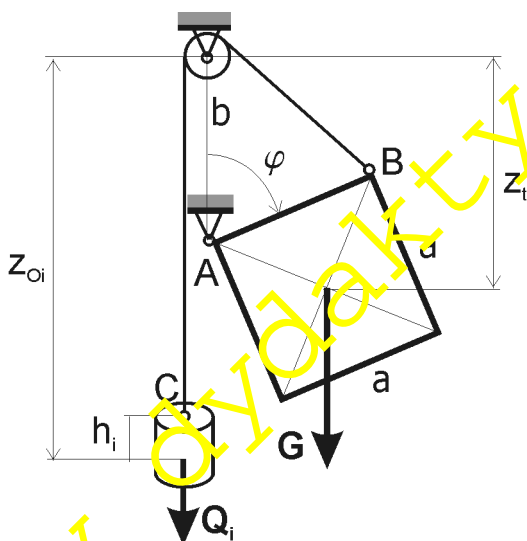
Rys. 13.2. Widok stanowiska badawczego

Badany układ składa się z kwadratowej tarczy (2) zamocowanej poprzez łożysko kulkowe na osi (3) umocowanej poziomo w pionowej ramie (1). Na lince (4) doczepionej do naroża tarczy i przerzuconej przez mały krążek (5) zawieszane są obciążniki (6) i (8). Położenie tarczy określane jest za pomocą kątomierza (7).

13.4.2. Określenie położen równowagi i badanie ich stateczności

Rozpatrywany układ ma jeden stopień swobody.

Jako współrzędną przyjęto kąt φ , który tworzy z pionem krawędź AB tarczy (tzn. $q_1 = \varphi$).



Rys. 13.3. Współrzędna uogólniona φ oraz położenia sił ciężkości Q i G

Energię potencjalną układu można przedstawić następująco:

$$V(j) = - \left(G z_t + \sum_i Q_i z_{O_i} \right), \quad (13.2)$$

gdzie: G - ciężar tarczy,
 z_t - współrzędna środka ciężkości tarczy,
 Q_i - ciężar obciążnika o numerze i ,
 z_{O_i} - współrzędna środka ciężkości obciążnika o numerze i .

Współrzędne środków ciężkości są określone jako (przy założeniu, że promień krążka jest niewielki w stosunku do wymiarów a i b):

$$z_t = b + a \frac{\sqrt{2}}{2} \cos\left(\frac{3}{4}p - j\right), \quad z_{O_i} = h_i + l - \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos j}, \quad (13.3)$$

gdzie: a - długość krawędzi tarczy, b - odległość między osiami przegubu i krążka, l - długość linki BC ,
 h - odległość środka ciężkości obciążnika od końca linki.

Po uwzględnieniu, że $G = m_t g$ oraz $Q_i = m_i g$ (g - przyspieszenie ziemskie) wyrażenie na energię potencjalną przyjmuje postać:

$$V = - \left\{ m_t \left(b + a \frac{\sqrt{2}}{2} \cos\left(\frac{3}{4}p - j\right) \right) + \sum_i \left[m_i \left(h_i + l - \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos j} \right) \right] \right\} g. \quad (13.4)$$

Położenie równowagi, zgodnie z zasadą Dirichleta, jest wyznaczane na podstawie równania

$$\frac{dV(j)}{dj} = 0. \quad (13.5)$$

W naszym przypadku pierwsza pochodna energii V względem współrzędnej φ wyraża się następująco:

$$\frac{dV}{dj} = - \left[m_t a \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(\frac{3}{4}p - j\right) + \left(\sum_i m_i \right) ab \frac{\sin j}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos j}} \right] g. \quad (13.6)$$

Oceny stanu równowagi dokonuje się, sprawdzając znak drugiej pochodnej energii potencjalnej. W przypadku stanu równowagi stałej w położeniu określonym kątem j_i ($i=1, \dots, k$) winno być

$$\left[\frac{d^2V(j)}{dj^2} \right]_{j=j_i} > 0, \quad i=1, \dots, k, \quad (13.7)$$

gdzie k oznacza liczbę rozwiązań równania (13.5).

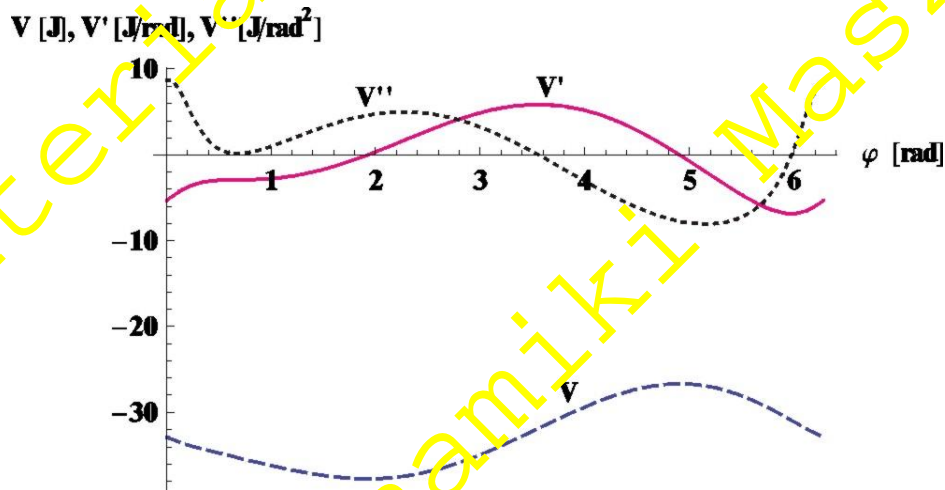
Poniżej przedstawiono wyrażenie określające drugą pochodną energii V analizowanego układu:

$$\frac{d^2V}{dj^2} = \left[m_i a \frac{\sqrt{2}}{2} \cos\left(\frac{3}{4}p - j\right) - \left(\sum m_i \right) ab \frac{(a^2 + b^2 - 2ab \cos j) \cos j - ab \sin^2 j}{\sqrt{(a^2 + b^2 - 2ab \cos j)^3}} \right] g. \quad (13.8)$$

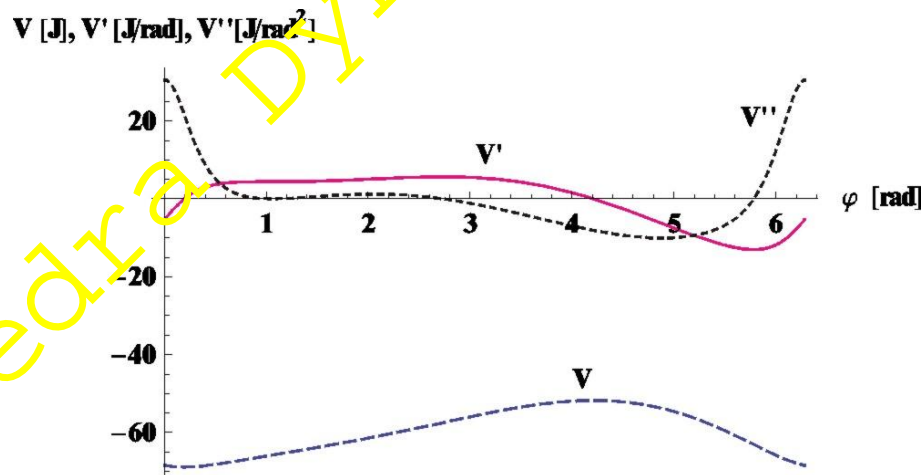
Wykresy energii potencjalnej i jej pierwszej i drugiej pochodnych dla rozpatrywanego układu są pokazane na rys. 13.4. Do obliczeń przyjęto następujące dane liczbowe:

$$\begin{aligned} a &= 343 \text{ mm}, \quad b = 514 \text{ mm}, \quad l = 1755 \text{ mm}, \quad g = 9,81 \text{ m/s}^2, \quad m_i = 3,16 \text{ kg}, \\ m_1 &= 1,38 \text{ kg}, \quad m_2 = 0,864 \text{ kg}, \quad m_3 = 0,864 \text{ kg}, \quad m_4 = 0,432 \text{ kg}, \\ h_1 &= 60 \text{ mm}, \quad h_2 = 80 \text{ mm}, \quad h_3 = 100 \text{ mm}, \quad h_4 = 110 \text{ mm}. \end{aligned}$$

a) obciążnik wstępny 1



b) obciążniki 1 + 2 + 3 + 4



Rys. 13.4. Energia potencjalna układu (- - -) oraz jej pierwsza i druga pochodna w funkcji kąta φ , dla dwóch różnych wartości Q

13.5. Opis stanowiska badawczego i przebiegu pomiarów

Główne elementy składowe stanowiska badawczego pokazane są na rys. 13.2.

Zadawanie różnych obciążeń tarczy możliwe jest poprzez przykręcanie dodatkowych obciążników (8) do obciążnika wstępnego (6) o masie m_1 . Te dodatkowe obciążniki są oznaczone cyframi **2**, **3** oraz **4**, a ich masy są odpowiednio: m_2 , m_3 i m_4 . Kąt wychylenia tarczy φ określany jest za pomocą kątomierza (7).

13.5.1. Przebieg pomiarów

Kolejność czynności jest następująca:

1. Zawiesić na końcu linki obciążnik **1** (obciążnik wstępny), przerzucić ją przez bloczek i opuścić ją łagodnie.
2. Odnaleźć położenie równowagi trwałej układu, a następnie odczytać na kątomierzu i zanotować w tabeli 13.1 wartości: średnią i skrajne kąta φ .
3. Obracając tarczą poszukać innych położenia równowagi. W przypadku ich znalezienia zanotować wartość kąta φ i określić rodzaj położenia równowagi.

Uwaga: Ostrożnie manewrować tarczą, aby nie uderzyć się w rękę.

4. Powtórzyć pomiary trzykrotnie
5. Trzymając w ręku obciążnik wstępny nakręcić na śrubę (do oporu) obciążnik **2**, opuścić łagodnie linkę i wykonać czynności opisane w punktach od 2 do 4.
6. Następnie dokręcić obciążnik **3** i postępować jak opisane powyżej.
7. Na koniec dokręcić obciążnik **4** i ponowić opisane wcześniej czynności.

Tabela 13.1. Wyniki badań doświadczalnych

Numer pomiaru	Założone obciążniki	Polożenie równowagi		Przedział kąta φ				Rodzaj równowagi	Uwagi
		φ	$\varphi_{\text{śred}}$	$-\Delta\varphi$	$\Delta\varphi_{\text{śred}}$	$+\Delta\varphi$	$\Delta\varphi_{\text{śred}}$		
		stopień	rad	stopień	rad	stopień	rad		
1	1								
2									
3									
4	1 + 2								
5									
6									
7	1 + 2 + 3								
8									
9									
10	1 + 2 + 3 + 4								
11									
12									

13.6. Opracowanie wyników pomiarów i sprawozdanie

W sprawozdaniu należy zamieścić:

- temat i cel ćwiczenia,
- wypełnioną tabelę 13.1,
- wykres energii potencjalnej z naniesionymi na niego wynikami pomiarów,
- obserwacje i wnioski.

13.7. Pytania sprawdzające

- Co to jest położenie równowagi?
- Scharakteryzować rodzaje równowagi ciała.
- Podać sformułowanie zasady Dirichleta.