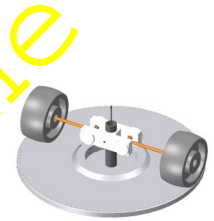


## Ćwiczenie 14



# WYZNACZENIE REAKCJI DYNAMICZNYCH W RUCHU KULISTYM

## 14.1. Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest doświadczalne określenie reakcji dynamicznych występujących w ruchu kulistym modelu gniotownika oraz porównanie wyników pomiarów z rezultatami otrzymanymi w obliczeniach teoretycznych.

## 14.2. Opis zjawiska

Zjawisko występowania dynamicznych reakcji więzów poruszających się ciał jest jednym z ważniejszych problemów przy konstruowaniu maszyn. Reakcje takie występują m.in. wówczas, gdy mamy do czynienia z ruchem obrotowym ciała wokół osi, która nie jest jego osią geometryczną (ciało nie jest wyrównoważone) oraz – w innym przypadku – gdy oś obrotu ciała jest wprawdzie jego osią geometryczną, ale oś ta nie jest nieruchoma, lecz wykonuje również ruch obrotowy. Z taką sytuacją mamy do czynienia w ruchu kulistym ciała sztywnego.

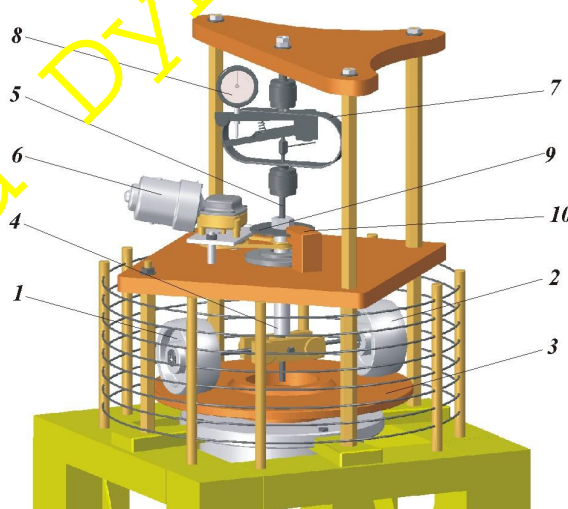
Właściwość ta – występowania dynamicznych reakcji więzów, które zwiększają nacisk między poruszającym się ciałem a podłożem – wykorzystywana jest w konstrukcji tak zwanych gniotowników, młynów służących do rozdrabniania niektórych substancji, na przykład celulozy, kredy. Jest to jeden z nielicznych przypadków, kiedy reakcje dynamiczne występują jako zjawisko pożądane w pracującej maszynie.

Badany model doświadczalny ma budowę podobną do stosowanych w przemyśle gniotowników. Jego krążki poruszają się ruchem kulistym o pionowej osi precesji, co powoduje wystąpienie między nimi a podłożem dodatkowego, dynamicznego nacisku. Konstrukcja stanowiska badawczego pozwala pomierzyć wielkość tego nacisku. Dzięki znajomości mas, wymiarów i prędkości modelu można obliczyć teoretyczną wartość nacisku. Zmierzone wartości nacisku są porównywane z wartościami nacisku określonymi teoretycznie.

## 14.3. Opis stanowiska badawczego

### 14.3.1. Badany obiekt

Badany model gniotownika pokazany na rys. 14.1.



Rys. 14.1. Model gniotownika

Składa się on z dwóch zasadniczych zespołów.

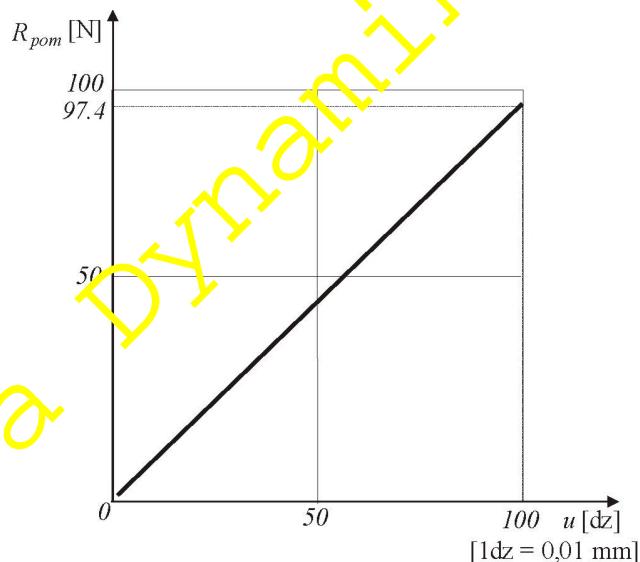
1. Nieruchomej pionowej osi (5), podwieszanej za pośrednictwem dynamometru (7) do strudowy stoiska. Do dolnego końca osi zamocowana jest pozioma tarcza (3), po której mogą poruszać się krążki (1 i 2). Ten układ trzech elementów - dolna tarcza jako podłoże, pionowa oś i w górze dynamometr pałkowy - stanowi rodzaj wagi, na której można mierzyć siłę nacisku krążków na podłoże.
2. Obrotowej ruchomej tulei (4) nałożonej na nieruchomą oś, z dwoma symetrycznymi krążkami (1 i 2), połączonymi z tuleją przegubami. Tuleja wraz z krążkami może obracać się wokół osi pionowej dzięki układowi napędowemu, złożonemu z silnika (6) i dwóch przekładni: ślimakowej i paskowej. Układ napędzany jest silnikiem prądu stałego, którego prędkość obrotowa zależy od wartości napięcia zasilającego (z zakresu 0 - 12 V). Użycie autotransformatora pozwala zmieniać w sposób ciągły napięcie, a tym samym prędkość obrotową silnika i wreszcie szybkość toczenia się krążków po bieżni.

### 14.3.2. Przyrządy pomiarowe i sposób wykonywania pomiarów

Aparatura pomiarowa stanowiska do badań umożliwia pomiar dwu wielkości: wartość prędkości kątowej precesji ( $\omega_0$ ) układu oraz ugięcie dynamometru pałkowego ( $u$ ).

Pomiar wartości wektora prędkości kątowej precesji  $\vec{\omega}_0$  możliwy jest dzięki tarczy perforowanej (9) obracającej się wraz z tuleją wokół osi pionowej. Tarcza (9) ma 10 równomiernie rozmieszczonych na obwodzie otworów. Nad tarczą, nad otworami zamocowany jest czujnik optyczny (10), podłączony do częstotliciomierza. Obracająca się tarcza generuje w układzie pomiarowym impulsy, wywołane przecinaniem linii optycznej czujnika przez kolejne otwory. Układ pomiarowy zlicza i wyświetla liczbę impulsów zarejestrowanych przez miernik w określonym czasie (np. 1 sekundy), przy czym jeden impuls odpowiada 1/10 obrotu tarczy. Znajomość częstotliwości, z jaką otwory tarczy przecinają linię pomiarową czujnika, pozwala na proste obliczenie liczby obrotów tarczy w wybranym czasie oraz - co za tym idzie - prędkości kątowej tulei w chwili pomiaru.

Ugięcie dynamometru  $u$  pokazuje czujnik zegarowy (8), zamocowany między dolnym a górnym pałkiem dynamometru. Czujnik mierzy przemieszczenie sprężyny w osi symetrii, to znaczy w miejscu, w którym do dynamometru podwieszona jest nieruchoma, pionowa oś stoiska z dolną tarczą. Pomiar ugięcia - dokonany jako odczyt wskazania czujnika - pozwala obliczyć siłę obciążającą sprężynę, ponieważ wcześniej układ ten został wycechowany i znana jest jego charakterystyka, pokazana na rys. 14.2.



Rys. 14.2. Charakterystyka dynamometru pałkowego

Charakterystyka ta pokazuje liniową zależność między zarejestrowanym przez czujnik ugięciem sprężyny  $u$  (na osi poziomej), a siłą w sprężynie  $R_{pom}$  (na osi pionowej).

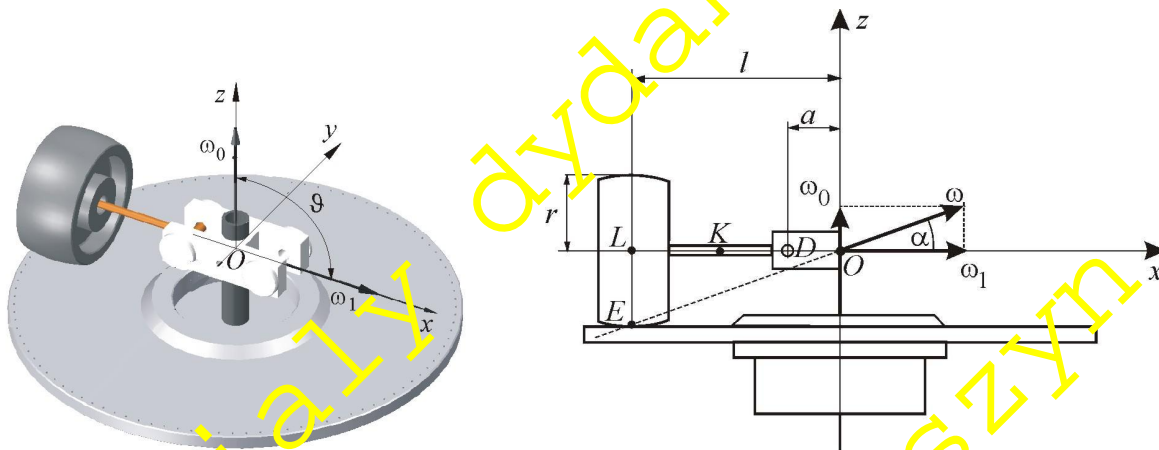
Przy pomiarze siły działającej na tarczę, będącą podstawą wagi, należy mieć świadomość, że pomiar dotyczy nie całkowitej siły obciążającej tarczę, a jedynie jej przyrostu między momentem odczytu i momentem, w którym wyzerowano czujnik zegarowy. Jeżeli zerowanie czujnika odbywało się przed wprowadzeniem układu w ruch, wtedy ist-

nieje możliwość pomiaru wyłącznie przyrostu siły pod wpływem ruchu, a więc wielkość dynamicznej reakcji naciśku. Stan początkowej równowagi statycznej układu jest więc dla naszego pomiaru „stanem zero”.

## 14.4. Podstawowe zależności teoretyczne

### 14.4.1. Kinematyka układu

Można zauważyć, że mamy do czynienia ze szczególnym przypadkiem ruchu kulistego krążków. Jeden z tych krążków jest pokazany na rys. 14.3.



Rys. 14.3. Podstawowe oznaczenia i wymiary

Na powyższym rysunku widać, że oś obrotu własnego krążków jest zawsze pionowa i obraca się w płaszczyźnie poziomej wokół pionowej osi precesji z prędkością kątową precesji  $\dot{W}_0$ . Znaczy to, że kąt nutacji zawarty między osią precesji a osią obrotu własnego jest kątem prostym ( $J = \pi/2$ ) i ma wartość stałą, a więc jego pochodna względem czasu, czyli prędkość kątowna nutacji jest równa zero. Wynika z tego, że wektor chwilowej prędkości kątowej ciała  $\dot{W}$  równy jest sumie geometrycznej tylko dwóch wektorów: poziomego - prędkości obrotu własnego  $\dot{W}_1$  i pionowego - prędkości precesji  $\dot{W}_0$

$$\dot{W} = \dot{W}_1 + \dot{W}_0 \quad (14.1)$$

Krażki toczą się po nieruchomym podłożu bez poślizgu, zatem punkt styku krążka z powierzchnią tarczy jest dla krążka chwilowym środkiem obrotu, a więc punktem, przez który przechodzi chwilowa oś obrotu, wychodząca ze środka ruchu kulistego, z punktu  $O$ . Pozwala to, na podstawie znanej geometrii układu, określić kąt nachylenia ( $\alpha$ ) chwilowej osi obrotu do poziomu z zależności

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{r}{l}, \quad (14.2)$$

gdzie:  $r$  – promień krążka,

$l$  – odległość środka krążka od osi precesji.

Ponieważ osie precesji i obrotu własnego tworzą ze sobą kąt prosty, oba wektory prędkości kątowych i ich wypadkowa, chwilowa prędkość kątowa  $\dot{W}$  (14.1), leżąca na znanym kierunku – chwilowej osi obrotu - tworzą trójkąt prostokątny. Można łatwo obliczyć prędkości układu

$$w_1 = w_0 \operatorname{ctg} \alpha = w_0 \frac{l}{r}, \quad w = \frac{w_0}{\sin \alpha} \quad (14.3)$$

Wynika z tego, że w ruchu ustalonym prędkości układu nie zależą od czasu. Chwilowa prędkość kątowa  $\dot{W}$  ma więc stałą wartość bezwzględną i jest nachylona do obu osi pod stałymi kątami. Jest to przypadek tzw. **precesji regularnej**, interpretowany również jako toczenie się bez poślizgu stożka ruchomego – w tym przypadku o osi pozio-

mej i kącie wierzchołkowym  $2\alpha$  – po stożku nieruchomym o osi pionowej i znanym kącie wierzchołkowym, w tym przypadku równym  $(\pi-2\alpha)$ .

#### 14.4.2. Analiza dynamiki układu

Będziemy poszukiwać wartości sił dynamicznych w czasie ruchu modelu korzy, tając z równań dynamiki dla ciała sztywnego:

- równania opisującego ruch środka masy ciała

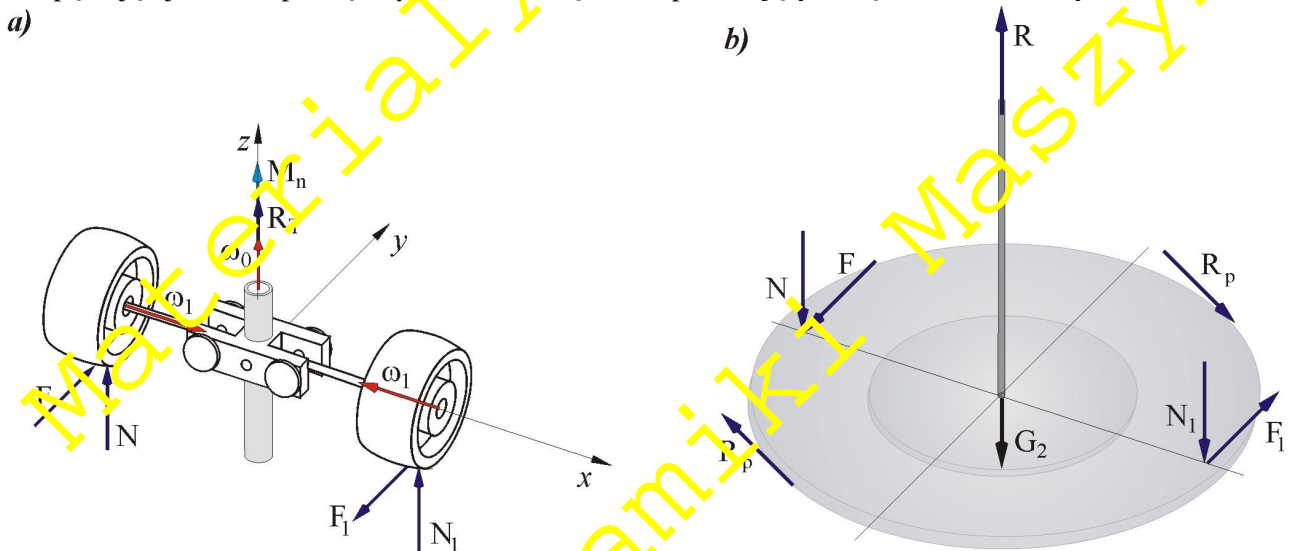
$$m\dot{\mathbf{r}}_C = \dot{\mathbf{P}}, \quad (14.4)$$

- twierdzenia o pochodnej wektora krętu ciała określonego względem nieruchomego bieguna

$$\frac{d\dot{\mathbf{K}}_o}{dt} = \dot{\mathbf{M}}_o. \quad (14.5)$$

Poszukiwane reakcje dynamiczne podłoża są dla modelu siłami zewnętrznymi, znajdą się więc po prawej stronie równań (14.4) i (14.5). Dla ich obliczenia należy określić lewe strony równań – przyspieszenie środka masy krążka i szybkość zmian wektora krętu krążka.

Rozpatrywany jest ruch podzespołu (rys. 14.4-a) złożonego z krążków – poruszających się ruchem kulistym oraz tulei napędzającej wraz z oprawą łożysk i osiami krążków – poruszających się ruchem obrotowym wokół osi z.



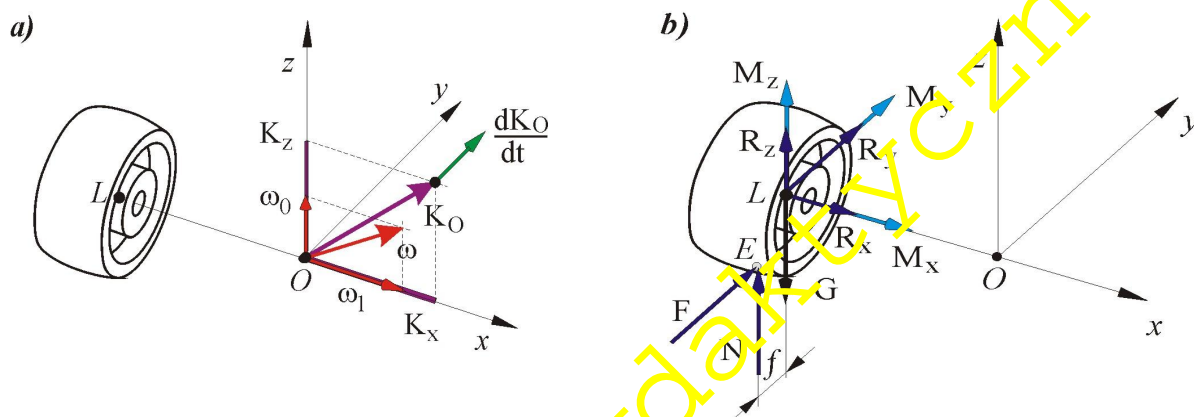
Rys. 14.4. Analizowany podzespół łożysk z krążków, osi i tulei napędzającej oraz biegnia

Równania dynamiki muszą być napisane oddzielnie dla każdego z ciał lub podukładów. Będą one sformułowane w układzie ruchomym  $Oxyz$  o wersorach  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  (obraca się on z prędkością  $\dot{\mathbf{W}}_0$ ). Jeśli poszukiwanymi wielkościami są wartości obu składowych reakcji podłoża  $N$  i  $F$  ( $N_1$  i  $F_1$ ), to konieczne jest rozwiązanie równań dynamiki dla: krążka, osi krążka, podukładu złożonego z tulei napędzającej wraz z oprawą łożysk (ze względu na symetrię układu rozpatrywany będzie tylko jeden z krążków i jedna z osi, wokół której obraca się krążek).

Biegnia (rys. 14.4-b), po której toczą się krążki jest unieruchomiona (reakcja  $R_p$  oznacza oddziaływanie blokady obrotu), a  $R$  oznacza siłę oddziaływania dynamometru. Wartość siły  $R$  jest sumą sił  $N$ ,  $N_1$  i  $G_2$  (gdzie  $G_2$  oznacza ciężar biegnia).

#### 14.4.3. Równania dynamiki dla krążka

Na rys. 14.5 jest przedstawiony jeden z krążków. Zaznaczony jest wektor krętu i reakcje działające na krążek w punktach  $L$  (kontakt z osią) i  $E$  (kontakt z biegnia).



Rys. 14.5. Kręt krążka (wektor  $\dot{\mathbf{K}}_O$ ) i jego pochodna oraz obciążenia działające na krążek

Przyspieszenie środka masy krążka – w przypadku ruchu układu ze stałą prędkością kątową – wynosi  $\mathbf{r}_{\dot{\mathbf{p}}_L} = \dot{\mathbf{i}} w_0^2 l + \dot{\mathbf{j}} 0 + \dot{\mathbf{k}} 0$ . W związku z tym lewą stronę równania (14.4) można przedstawić w formie

$$m \mathbf{r}_{\dot{\mathbf{p}}_L} = m \mathbf{r}_{\dot{\mathbf{p}}_L} = \dot{\mathbf{i}} m w_0^2 l + \dot{\mathbf{j}} 0 + \dot{\mathbf{k}} 0 . \quad (14.6)$$

Obciążenia zewnętrzne działające na krążek są zaznaczone na rys. 14.5-b, a mianowicie: siła ciężkości  $\dot{\mathbf{G}} = -\dot{\mathbf{k}} mg$  przyłożona w środku ciężkości krążka ( $L$ ), reakcja podłoża  $\dot{\mathbf{R}}_E = \dot{\mathbf{j}} F + \dot{\mathbf{k}} N$  oraz reakcja w punkcie połączenia krążka z osią (przyjęto, że punktem, w którym ciała są połączone jest środek masy krążka)  $\dot{\mathbf{R}}_L = \dot{\mathbf{i}} R_x + \dot{\mathbf{j}} R_y + \dot{\mathbf{k}} R_z$  i moment pary sił  $\dot{\mathbf{M}}_L = \dot{\mathbf{i}} M_x + \dot{\mathbf{j}} M_y + \dot{\mathbf{k}} M_z$ .

Wektor  $\dot{\mathbf{P}}$  występujący po prawej stronie równania (14.4) jest określony jako

$$\dot{\mathbf{P}} = \dot{\mathbf{G}} + \dot{\mathbf{R}}_E + \dot{\mathbf{R}}_L = \dot{\mathbf{i}} R_x + \dot{\mathbf{j}} (F + R_y) + \dot{\mathbf{k}} (-mg + N + R_z) . \quad (14.7)$$

Z przyrównania (14.6) i (14.7) wynika, że:

$$R_x = m w_0^2 l , \quad R_y = -F , \quad R_z = mg - N . \quad (14.8)$$

Dla określenia lewej strony równania (14.5) należy wyznaczyć kręt krążka ( $\dot{\mathbf{K}}_O$ ), a następnie jego pochodną względem czasu. Kręt krążka liczony względem środka ruchu kulistego (punktu  $O$ ) można określić przez trzy składowe

$$\dot{\mathbf{K}}_O = \dot{\mathbf{K}}_{Ox} + \dot{\mathbf{K}}_{Oy} + \dot{\mathbf{K}}_{Oz} = \dot{\mathbf{i}} K_x + \dot{\mathbf{j}} K_y + \dot{\mathbf{k}} K_z , \quad (14.9)$$

które – w przypadku ogólnym – wyznaczają się z zależności:

$$\begin{aligned} K_x &= J_x w_x - J_{xy} w_y - J_{xz} w_z , \\ K_y &= J_y w_y - J_{yz} w_z - J_{yx} w_x , \\ K_z &= J_z w_z - J_{zx} w_x - J_{zy} w_y . \end{aligned} \quad (14.10)$$

Dla osiowosymetrycznego krążka momenty dewiacyjne są równe zero ( $J_{xy} = J_{xz} = J_{yz} = \dots = 0$ ). Z zależności kinematycznych (14.3) wynika, że:

$$w_x = w_1 = w_0 \frac{l}{r} , \quad w_y = 0 , \quad w_z = w_0 . \quad (14.11)$$

Zatem kręt krążka określają wielkości:

$$K_x = J_x w_0 \frac{l}{r} , \quad K_y = 0 , \quad K_z = J_z w_0 . \quad (14.12)$$

Kręt krążka jest wektorem leżącym w płaszczyźnie  $Oxz$  (rys. 14.5-a), która obraca się z prędkością kątową  $\dot{w}_0$  wokół osi  $z$ . Pochodną wektora krętu można więc wyznaczyć z zależności

$$\frac{d\mathbf{K}_O}{dt} = \dot{\mathbf{w}} \times \mathbf{K}_O = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & w_0 \\ K_x & 0 & K_z \end{vmatrix} = \mathbf{i}0 + \mathbf{j}w_0K_x + \mathbf{k}0 - \mathbf{i}l w_0^2 \frac{l}{r}. \quad (14.13)$$

Moment wszystkich sił zewnętrznych względem punktu  $O$  ( $\dot{\mathbf{M}}_O$ ) występujący w (14.5) jest równy

$$\dot{\mathbf{M}}_O = \dot{\mathbf{M}}_L + \mathbf{r}_{OL} \times \dot{\mathbf{G}} + \mathbf{r}_{OL} \times \dot{\mathbf{R}}_L + \mathbf{r}_{OE} \times \dot{\mathbf{R}}_E, \quad (14.14)$$

przy czym wektory  $\mathbf{r}_{OL}$  i  $\mathbf{r}_{OE}$  są równe odpowiednio:

$$\mathbf{r}_{OL} = -\mathbf{i}l + \mathbf{j}0 + \mathbf{k}0, \quad \mathbf{r}_{OE} = -\mathbf{i}l - \mathbf{j}f - \mathbf{k}r, \quad (14.15)$$

gdzie  $f$  jest miarą oporu toczenia krążka.

Stąd

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{M}}_O &= \mathbf{i}M_x + \mathbf{j}M_y + \mathbf{k}M_z + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -mg \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -l & 0 & 0 \\ R_x & R_y & R_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -l & -f & -r \\ 0 & F & N \end{vmatrix} = \\ &= \mathbf{i}(M_x + Fr - Nf) + \mathbf{j}(M_y - mgl + R_zl + Nl) + \mathbf{k}(M_z - R_y l - Fl). \end{aligned} \quad (14.16)$$

Po podstawieniu rezultatów z (14.8) mamy zatem

$$\dot{\mathbf{M}}_O = \mathbf{i}(M_x + Fr - Nf) + \mathbf{j}M_y + \mathbf{k}M_z. \quad (14.17)$$

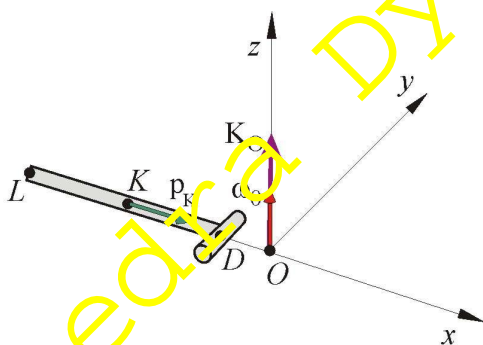
Porównując równania (14.17) i (14.13) otrzymuje się:

$$M_x + Fr - Nf = 0, \quad M_y = J w_0^2 \frac{l}{r}, \quad M_z = 0. \quad (14.18)$$

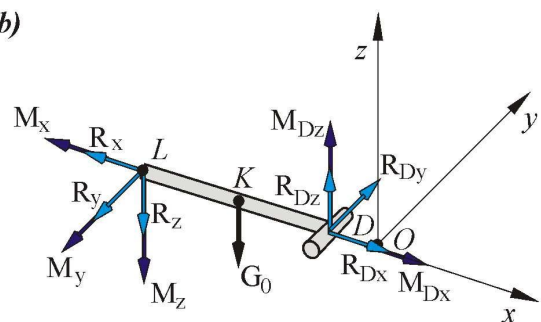
#### 14.4.4. Równania dynamiki dla osi krążka

Na rys.14.6 jest pokazany wektor krętu dla osi krążka oraz obciążenia działające na tę oś. Z uwagi na połączenie tulei z osią krążka przy użyciu przegubu walcowego (w punkcie  $D$ ) na rysunku została pominięta składowa momentu  $M_{Dy}$  ( $M_{Dy} = 0$ ).

a)



b)



Rys. 14.6. Przyspieszenie środka masy (wektor  $\dot{\mathbf{p}}_K$ ) i kręt osi krążka ( $\dot{\mathbf{K}}_O$ ) oraz obciążenia działające na oś. Oś krążka porusza się jednostajnym ruchem obrotowym wokół osi  $z$ . Przyspieszenie środka osi krążka (punktu  $O$ ) oraz kręt i jego pochodna są odpowiednio równe:



$$\mathbf{r}_{p_K} = \dot{\mathbf{i}} w_0^2 b + \dot{\mathbf{j}} 0 + \dot{\mathbf{k}} 0, \quad \dot{\mathbf{K}}_O = \dot{\mathbf{i}} 0 + \dot{\mathbf{j}} 0 + \dot{\mathbf{k}} J_{z1} w_0, \quad \frac{d\dot{\mathbf{K}}_O}{dt} = \mathbf{r}_{p_K} \times \dot{\mathbf{K}}_O, \quad (14.19)$$

gdzie  $J_{z1}$  moment bezwładności osi krążka względem  $Oz$ , a  $b$  oznacza współrzędną środka masy pręta, przy czym

$$b = l - \frac{l-a}{2} = \frac{l+a}{2}. \quad (14.20)$$

Równania dynamiki dla osi krążka – otrzymane na podstawie równań (14.4 i 14.5) – mają postać:

$$m_0 w_0^2 b = R_{Dx} - R_x, \quad (14.21)$$

$$0 = R_{Dy} - R_y, \quad (14.22)$$

$$0 = R_{Dz} - R_z - m_0 g \quad (14.23)$$

oraz

$$0 = M_{Dx} - M_x, \quad (14.24)$$

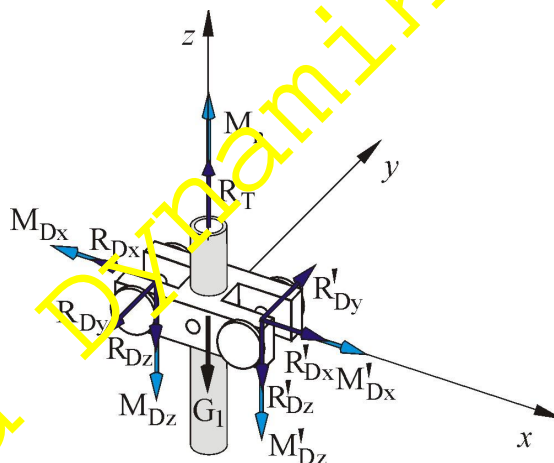
$$0 = -M_y + R_{Dz} a - R_z l - m_0 g b, \quad (14.25)$$

$$0 = M_{Dz} - M_z - R_{Dy} a + R_y l, \quad (14.26)$$

gdzie  $m_0$  oznacza masę osi krążka.

#### 14.4.5. Równania dynamiki dla tulei napędzającej

Na rys. 14.7 są przedstawione obciążenia działające na tuleję napędzającą połączoną z oprawą łożysk. Pochodzą one od oddziaływania osi krążków (w punktach  $D$  i  $D'$ ) oraz układu napędowego (moment  $\dot{\mathbf{M}}_n$ ) i reakcji łożyska oporowego tulei  $\dot{\mathbf{R}}_y$ . Ze względu na symetrię układu przyjmuje się, że reakcje po obu stronach osi (w punktach  $D$  i  $D'$ ) mają jednakowe wartości ( $R_{Dx} = R'_{Dx}$ ,  $R_{Dy} = R'_{Dy}$ ,  $R_{Dz} = R'_{Dz}$ ,  $M_{Dx} = M'_{Dx}$ ,  $M_{Dz} = M'_{Dz}$ ). Ponadto, z uwagi na przegubowe połączenie tulei z osią krążka zostały pominięte składowe momenty  $M_{Dy}$  i  $M'_{Dy}$  ( $M_{Dy} = 0$ ,  $M'_{Dy} = 0$ ).



Rys. 14.7 Obciążenia działające na układ: tuleja napędzająca – oprawa łożysk

Tuleja wraz z przymocowanymi do niej oprawami łożysk osi obraca się wokół pionowej osi  $z$ . Środek masy tulei jest nieruchomy (leży na osi obrotu).

Równania dynamiki dla układu tuleja napędzająca – oprawa łożysk można napisać, podobnie jak dla poprzednich ciał, na podstawie równań (14.4) i (14.5). Przyspieszenie środka masy takiego układu jest równe zero ( $\dot{\mathbf{r}}_O = \dot{\mathbf{0}}$ ).

Występujący w równaniu (14.4) wektor  $\dot{\mathbf{P}}$  ma w tym przypadku postać

$$\dot{\mathbf{P}} = \dot{i}0 + \dot{j}0 + \dot{k}(R_T - 2R_{Dz} - G_1) , \quad (14.27)$$

gdzie  $G_1 = m_1 g$  oznacza ciężar tulei wraz z przymocowanymi do niej oprawami łożysk. Stąd otrzymuje się równanie

$$0 = R_T - 2R_{Dz} - G_1 . \quad (14.28)$$

Kręt układu tuleja napędzająca – oprawa łożysk może być przedstawiony w sposób podany wzorami (14.10). Z uwagi na symetrię tego układu i ruch, jakiego doznaje (ruch obrotowy wokół osi  $z$ ) jego kręt jest wektorem o kierunku osi  $z$ . W ruchu ustalonym ze stałą prędkością  $\dot{w}_0$  ( $\dot{w}_0 = \text{const}$ ) kręt tego układu nie ulega zmianie, zatem

$$\frac{d\dot{\mathbf{K}}_O}{dt} = \dot{\mathbf{0}} . \quad (14.29)$$

Moment wszystkich sił zewnętrznych względem punktu  $O$  ( $\dot{\mathbf{M}}_O$ ) występujący w (14.5) jest, w tym przypadku, równy

$$\dot{\mathbf{M}}_O = \dot{i}0 + \dot{j}0 + \dot{k}(M_n - 2M_{Dz} - 2R_{Dy}a) . \quad (14.30)$$

Z porównania (14.29) i (14.30) otrzymuje się równanie

$$0 = M_n - 2M_{Dz} - 2R_{Dy}a . \quad (14.31)$$

#### 14.4.6. Rozwiązanie równań dynamiki

Wyprowadzone w poprzednich punktach równania dynamiki dla poszczególnych podukładów stanowią układ 14 równań (są to układy równań: (14.8), (14.18), (14.21)–(14.26) oraz równania (14.28) i (14.31)). Zawierają one 15 niewiadomych wielkości ( $R_x, R_y, R_z, M_x, M_y, M_z, F, N, R_{Dx}, R_{Dy}, R_{Dz}, M_{Dx}, M_{Dz}, R_T, M_n$ ). Rozwiązanie układu równań będzie możliwe wówczas, gdy uzupełnimy go dodatkowym równaniem. Zakładając, że

$$M_x = -M_t , \quad (14.32)$$

to jest przyjmując, że znany jest moment pochodzący od sił tarcia w łożysku krążka ( $M_t$ ) otrzymuje się 15 równań i 15 wielkości niewiadomych.

Po rozwiązaniu równań otrzymuje się siłę nacisku krążka na bieżnię ( $N$ )

$$N = \frac{l}{r(l-a)} J_x w_0^2 + mg + \frac{1}{2} m_0 g , \quad (14.33)$$

a także wszystkie pozostałe niewiadome wielkości. Ze względu na dużą liczbę tych wielkości zostaną przedstawione jedynie niektóre z nich. I tak na przykład:

– siła tarcia pomiędzy krążkiem a bieżnią

$$F = \left[ \frac{l}{r(l-a)} J_x w_0^2 + \left( m + \frac{m_0}{2} \right) g \right] \frac{f}{r} + \frac{M_t}{r} , \quad (14.34)$$

– moment napędzający układ krążków (moment obrotowy pochodzący od silnika pomniejszony o ewentualny opór ułożyskowania tulei)

$$M_n = \left[ 2 \left( \frac{l}{r(l-a)} J_x w_0^2 + \left( m + \frac{m_0}{2} \right) g \right) f + M_t \right] \frac{l}{r} . \quad (14.35)$$



Reakcja normalna  $N$ , określona wzorem (14.33), składa się z dwóch członów: reakcji statycznej  $N_{stat} = mg + \frac{1}{2}m_0g = G + \frac{G_0}{2}$ , pochodzącej od sił ciężkości i reakcji dynamicznej  $N_{dyn} = \frac{l}{r(l-a)}J_x\omega_0^2$ , wywołanej ruchem układu i o wartości proporcjonalnej do kwadratu prędkości kątowej precesji.

Jak wyjaśniono wcześniej, w doświadczeniu mierzone jest obciążenie dynamometru (siły  $R$ ) wywołane reakcjami występującymi podczas ruchu modelu i dotyczy ono sumy bliźniaczych reakcji ( $N=N_1$ ), występujących symetrycznie pod dwoma krążkami oraz ciężaru bieżni (siły  $G_2$ )

$$R = N + N_1 + G_2 = 2N + G_2. \quad (14.36)$$

Statyczne obciążenie dynamometru jest równe

$$R_{stat} = 2N_{stat} + G_2 = 2G + G_0 + G_2. \quad (14.37)$$

Wartość teoretyczna siły dynamicznej obciążającej dynamometr, zatem jest równa

$$R_{teor} = R - R_{stat} = 2N_{dyn} = 2\frac{l}{r(l-a)}J_x\omega_0^2. \quad (14.38)$$

Jak wynika z zależności (14.34) i (14.35) wartości siły stycznej ( $F$ ) i momentu napędzającego tuleję ( $M_n$ ) są zależne od oporów w łożyskach krążków ( $M_t$ ) oraz oporu toczenia (którego miarą jest  $f$ ). Jedynie w układzie idealnym, w którym pomijamy opory ruchu (wtedy  $M_t = 0$  i  $f = 0$ ), zarówno moment napędzający jak i reakcja styczna podłoża są równe zero ( $M_n = 0$ ,  $F = 0$ ).

## 14.5. Przebieg pomiarów

Celem ukazania udziału reakcji dynamicznej w całkowitej reakcji w pierwszej kolejności dokonywany jest pomiar reakcji statycznej, a następnie pomiary reakcji dynamicznej dla kilku szybkości wirowania układu.

### 14.5.1. Wyznaczanie reakcji statycznej

Przy wyznaczaniu reakcji statycznej (obydwu krążków łącznie) należy wykonać następujące czynności:

1. Ustawić niezmiennie jednocześnie obydwa krążki i wyzerować czujnik zegarowy (przez obrót tarczy ze skalą) opukując przy tym lekko stoisko dla skasowania luzów.
2. Opuścić delikatnie krążki na tarczę (zwrócić uwagę na kierunek obrotu wskazówki czujnika zegarowego).
3. Odczytać wskazanie czujnika i zapisać ugięcie dynamometru w kolumnie **8** tabeli 14.1.

Tabela 14.1. Zestawienie pomiarów i obliczeń

Numer pomiaru	Prędkość precesji			Reakcja dynamiczna (łączna obydwu krążków)			Reakcja statyczna (łączna obydwu krążków)		Różnica względna reakcji $R_{pom}$ i $R_{teor}$	
	wskazanie częstotliwościomierza	szybkość obrotowa	prędkość kątowna	eksperyment		teoria	ugięcie dynamometru	siła		
				ugięcie dynamometru	siła (odczyt z diagramu)	wzór (14.38)			wzór (14.39)	
$i$	$f$	$n_0$	$\omega_0$	$u$		$R_{teor}$	$u$	$R_{stat}$	$d$	
[-]	[Hz]	[obr/s]	[rad/s]	[ $10^{-2}$ mm]		[N]	[ $10^{-2}$ mm]	[N]	[%]	
1	2	3	4	5a	5b	6	7	8	9	10
1	7									
2	6									
3	5									
4										

#### 14.5.2. Wyznaczanie reakcji dynamicznej

Należy dokonać pomiarów dla kilku szybkości precesji z zakresu **1,5 - 2,5 obr/s** (dla obrotów narastających i malejących). Kolejność czynności jest następująca:

1. Ustalić wartości szybkości obrotowej, dla których będą dokonywane pomiary (podzielić równomiernie wspomniany wyżej zakres) i zapisać je w kolumnie **3** tabeli 14.1.
2. Wyzerować czujnik zegarowy.
3. Sprawdzić czy pokrętko autotransformatora znajduje się w *skrajnym lewym* położeniu, a następnie włączyć zasilanie autotransformatora, zasilacza czujnika obrotów i częstotliwościomierza.
4. Dla skasowania luzów w układzie wprowadzić na chwilę model w ruch (rozpedzić do około 1 obr/s) - w tym celu należy obracać pokrętkiem autotransformatora w *prawo*, a następnie zatrzymać układ i **wyzerować** czujnik zegarowy.

**Uwaga:** Zmniejszanie szybkości wirowania musi być za każdym razem dokonywane stopniowo, aby uniknąć uszkodzenia przekładni ślimakowej (ze względu na jej samohamowność).

5. Obracając pokrętkiem autotransformatora doprowadzić model do żądanej (zapisanej wcześniej w tabeli) szybkości wirowania. Należy obserwować przez chwilę wyświetlacz częstotliwościomierza celem upewnienia się, że układ obraca się już ze stałą szybkością (powtarzalne wskazania miernika).
6. Zanotować kierunek obrotów precesji (*lewy, prawy*).
7. Odczytać wskazanie czujnika zegarowego i zapisać ugięcie dynamometru w kolumnie **5a** (pomiar przy zwiększaniu szybkości) albo **5b** (pomiar przy zmniejszaniu szybkości) tabeli 14.1.
8. Czynności opisane w punktach: **5, 6 i 7** powtórzyć dla kolejnych szybkości precesji.

Po zakończeniu pomiarów wyłączyć aparaturę oraz *uporządkować* stoisko pomiarowe.

## 14.6. Opracowanie wyników i sprawozdanie

### 14.6.1. Obliczenia pomocnicze

Na podstawie uzyskanych pomiarów ugięcia dynamometru należy odczytać z *diagramu* zmierzone siły. Następnie obliczyć wartości teoretyczne reakcji oraz relacje względne wartości eksperymentalnych i teoretycznych.

Do obliczeń przyjmowane są następujące dane liczbowe:

- promień zewnętrzny krążka  $r = 56 \text{ mm}$   
(zarazem odległość punktu  $E$  styku krążka z podłożem od osi walca  $DL$ ),
- odległości przegubu walcowego  $D$  od osi precesji  $a = 37,5 \text{ mm}$ ,
- odległość środka krążka  $L$  od osi precesji  $l = 145 \text{ mm}$ ,
- pomierzony moment bezwładności krążka  $J_x = 4,35 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$   
względem osi obrotu własnego (osi geometrycznej).

Różnica względna wyników pomiaru i obliczeń teoretycznych obliczana jest następująco:

$$d = \frac{R_{teor} - R_{pom}}{R_{teor}} 100\% \quad (14.39)$$

### 14.6.2. Sprawozdanie

W sprawozdaniu należy podać:

- a) temat i cel ćwiczenia
- b) zestawienie wyników pomiarów i obliczeń w tabeli 14.1,
- c) przykładowe obliczenia dla najniższej wartości prędkości precesji,
- d) obserwacje i wnioski.

## 14.7. Pytania sprawdzające

1. Wyjaśnić pochodzenie terminu „*ruch kulisty ciała sztywnego*”.
2. *Kinematyka ruchu kulistego o precesji regularnej – osie ruchów składowych i rozkład wektora prędkości kątowej.*
3. *Kręć ciała sztywnego względem bieguna – przypadek ogólny i możliwe uproszczenia – uzasadnić wzory 14.12.*
4. *Twierdzenie o pochodnej względem czasu wektora krętu układu względem nieruchomego bieguna – interpretacja geometryczna i kinematyczna.*