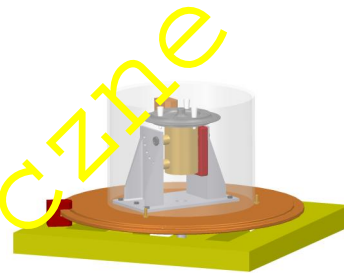


## Ćwiczenie 15



# WYZNACZANIE PRĘDKOŚCI KĄTOWYCH CIAŁ NA PODSTAWIE TWIERDZENIA O POCHODNEJ KRĘTU

## 15.1. Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest doświadczalna weryfikacja zależności teoretycznych wynikających z twierdzenia o pochodnej względem czasu krętu układu.

## 15.2. Wprowadzenie

Analiza wielu zagadnień dynamiki układów materialnych prowadzona jest przy wykorzystaniu twierdzenia o pochodnej względem czasu krętu układu względem nieruchomego punktu. Wynika z niego, że zmiana krętu układu jest możliwa tylko na skutek działania takich sił zewnętrznych, których moment względem obranego punktu jest różny od zera. Oznacza to, że siły wewnętrzne układu nie mogą doprowadzić do zmiany jego krętu. (Konsekwencją twierdzenia o pochodnej krętu jest zasada zachowania krętu, która oznacza, że w przypadku, gdy suma momentów sił zewnętrznych względem nieruchomego punktu jest równa zero, to kręt układu wyznaczony względem tego samego punktu jest stały.)

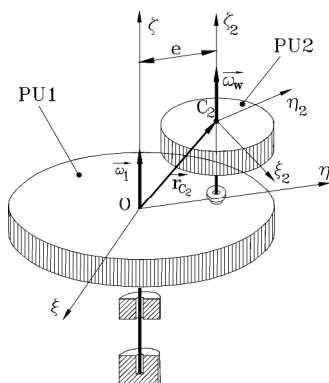
Jeśli zatem ruch jednego z ciał należących do rozpatrywanego układu jest wymuszony przez siły działające wewnątrz (a nie spoza) układu, to spowoduje to ruch innych ciał tego układu, tak by całkowity kręt układu nie uległ zmianie. Tego rodzaju „eksperyment myślowy” trudno jest zrealizować w praktyce, ponieważ nie można uniknąć oddziaływania otoczenia.

Przygotowane stanowisko badawcze, w którym zadbano o to, by zminimalizować opory ruchu – a te, które istnieją uwzględnić w obliczeniach – pozwala na doświadczalną weryfikację twierdzenia o pochodnej krętu. Głównymi elementami stanowiska badawczego są tarcza i umieszczony na niej silnik elektryczny. Względny ruch obrotowy wirnika silnika wywołuje ruch całego układu.

Zarejestrowane prędkości obrotowe i wyznaczone na drodze eksperymentalnej momenty sił zewnętrznych powinny być zgodne z rezultatami otrzymanymi z zależności teoretycznych (przyrost krętu układu powinien być równy impulsowi momentów od sił zewnętrznych).

## 15.3. Podstawowe zależności teoretyczne

Analiza dotyczy modelu układu (rys. 15.1).



Rys. 15.1. Model fizyczny analizowanego układu

Składa się on z dwóch podukładów: jeden z nich (PU1) porusza się ruchem obrotowym wokół nieruchomej pionowej osi (o kierunku osi z), a drugi (PU2) zamocowany jest na pierwszym w taki sposób, że może obracać się wokół ruchomej pionowej osi z<sub>2</sub>.

### 15.3.1. Zależności ogólne

W tym ćwiczeniu wykorzystywane jest twierdzenie: *pochodna względem czasu krętu układu względem dowolnego nieruchomego punktu jest równa sumie momentów sił zewnętrznych względem tegoż punktu*. Matematyczny zapis tego twierdzenia ma postać

$$\frac{d\dot{\mathbf{K}}_O}{dt} = \sum_{i=1}^{i=n} \mathbf{r}_{iO} \times \mathbf{M}_{iO} \quad (15.1)$$

w której  $\dot{\mathbf{K}}_O$  oznacza kręt układu względem nieruchomego punktu  $O$ , a  $\sum_{i=1}^{i=n} \mathbf{r}_{iO} \times \mathbf{M}_{iO}$  jest sumą momentów – sił zewnętrznych działających na rozpatrywany układ – względem punktu  $O$ .

Całkując obie strony równania (15.1) w granicach od  $t=t_0$  do  $t$  otrzymuje się zależność

$$\Delta \mathbf{K}_O = \mathbf{K}_O(t) - \mathbf{K}_O(t_0) = \int_{t_0}^t \sum_{i=1}^{i=n} \mathbf{r}_{iO} \times \mathbf{M}_{iO} dt \quad (15.2)$$

która określa przyrost wektora krętu układu. Z tego równania wynika, że przyrost krętu jest równy impulsowi momentów sił zewnętrznych względem punktu  $O$ .

Przy wyznaczaniu krętu jest wykorzystywane równanie

$$\dot{\mathbf{K}}_O = \mathbf{r}_C \times m \dot{\mathbf{V}}_C + \dot{\mathbf{K}}_C \quad (15.3)$$

które pozwala na określenie krętu ( $\dot{\mathbf{K}}_O$ ) względem nieruchomego punktu ( $O$ ) na podstawie krętu ( $\dot{\mathbf{K}}_C$ ) wyznaczonego względem środka masy (punktu  $C$ ) układu. Symbole  $\mathbf{r}_C, \dot{\mathbf{V}}_C$  oznaczają odpowiednio wektory: położenia punktu  $C$  względem  $O$  oraz prędkość środka masy.

W ruchu kulistym ciała wektor krętu  $\dot{\mathbf{K}}_O$  wygodnie jest określać w układzie współrzędnych ( $xhz$ ) sztywno związanych z ciałem – w postaci sumy składowych o kierunkach tych osi

$$\dot{\mathbf{K}}_O = \mathbf{i}K_x + \mathbf{j}K_h + \mathbf{k}K_z \quad (15.4)$$

gdzie  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  są wersorami osi  $Oxhz$ , a  $K_x, K_h, K_z$  oznaczają rzuty wektora krętu na te osie, przy czym:

$$K_x = J_x \omega_x - J_{xh} \omega_h - J_{xv} \omega_v \quad (15.5)$$

$$K_h = J_h \omega_h - J_{hv} \omega_v - J_{hx} \omega_x \quad (15.6)$$

$$K_v = J_v \omega_v - J_{vx} \omega_x - J_{vh} \omega_h \quad (15.7)$$

Symbolami  $J_x, J_h, J_v$  zostały oznaczone momenty bezwładności względem osi sztywno związanych z ciałem, a  $J_{xh}, J_{xv}, J_{hv}$  są momentami dewiacyjnymi względem tych osi.

### 15.3.2. Wyznaczenie krętu analizowanego układu

Kręt układu jest wyznaczany jako suma dwóch składników. Pierwszy to kręt podukładu unoszenia (PU1 na rysunku 15.1) poruszającego się z prędkością kątową  $\dot{\mathbf{W}}_1$  wokół osi z. Drugim składnikiem jest kręt podukładu PU2 poruszającego się z prędkością względną  $\dot{\mathbf{W}}_w$  dokoła ruchomej osi z<sub>2</sub>. Bezwzględna prędkość kątowa podukładu PU2 ( $\dot{\mathbf{W}}_2$ ) jest równa sumie prędkości unoszenia ( $\dot{\mathbf{W}}_u = \dot{\mathbf{W}}_1$ ) i prędkości względnej ( $\dot{\mathbf{W}}_w$ )

$$\dot{\mathbf{W}}_2 = \dot{\mathbf{W}}_u + \dot{\mathbf{W}}_w = \dot{\mathbf{W}}_1 + \dot{\mathbf{W}}_w . \quad (15.8)$$

**Kręt podukładu unoszenia (PU1)**

Podukład PU1 (rys. 15.1) jest symetryczny względem płaszczyzny  $hz$ . Wobec tego jego momenty dewiacyjne  $J_{1xV}, J_{1xh}$  są równe zero ( $J_{1xV} = J_{1xh} = 0$ ). Brak symetrii względem płaszczyzn  $xh$  i  $xz$  powoduje, że moment dewiacyjny  $J_{1Vh}$  podukładu PU1 nie jest równy zero ( $J_{1Vh} \neq 0$ ).

Więzy nałożone na układ dopuszczają ruch obrotowy podukładu PU1 wokół pionowej osi o kierunku osi  $z$  (oraz ruch obrotowy podukładu PU2 względem PU1 wokół ruchomej osi  $z_2$ ). Oznacza to, że rzuty wektora prędkości kątowej  $\dot{\mathbf{W}}_1$  na osie  $x$  i  $h$  są równe zero ( $w_{1x} = w_{1h} = 0$ ). W rozpatrywanym przypadku wzory określające rzuty wektora krętu (15.5) – (15.7) sprowadzają się do:

$$K_{1x} = 0, \quad K_{1h} = -J_{1hV} w_{1V}, \quad K_{1V} = J_{1V} w_{1V}. \quad (15.9)$$

**Kręt podukładu poruszającego się ruchem względnym (PU2)**

Całkowita prędkość kątowa podukładu PU2 ( $\dot{\mathbf{W}}_2$ ) jest określona wzorem (15.8), to znaczy

$$\dot{\mathbf{W}}_2 = \dot{\mathbf{W}}_1 + \dot{\mathbf{W}}_w, \quad (15.10)$$

a jej rzuty na osie  $xh$  są równe:

$$w_{2x} = 0, \quad w_{2h} = 0, \quad (15.11)$$

$$w_{2V} = w_{1V} + w_w.$$

Został tu wykorzystany fakt, że prędkość  $\dot{\mathbf{W}}_w$  jest równa  $\dot{\mathbf{W}}_w = \dot{\mathbf{k}} w_w$  (ma kierunek osi  $z$ ).

Kręt podukładu PU2 względem nieruchomego bieguna  $O$  ( $\dot{\mathbf{K}}_{2O}$ ) może być określony na podstawie zależności (15.3)

$$\dot{\mathbf{K}}_{2O} = \mathbf{r}_{C_2} \times m_2 \dot{\mathbf{V}}_{C_2} + \dot{\mathbf{K}}_{C_2}. \quad (15.12)$$

Ponieważ momenty dewiacyjne podukładu PU2 względem osi  $x_2h_2z_2$  (przechodzących przez środek masy tego podukładu) są równe zero ( $J_{2h_2V_2} = J_{2x_2V_2} = J_{2x_2h_2} = 0$ ), to rzuty składowej wektora krętu  $\dot{\mathbf{K}}_{C_2}$  na osie  $x_2h_2z_2$  przyjmują postać:

$$K_{C_2x_2} = K_{C_2h_2} = 0, \quad K_{C_2V_2} = J_{2V_2} w_{2V}, \quad (15.13)$$

a rzuty krętu  $\dot{\mathbf{K}}_{2O}$  są równe:

$$K_{2x} = K_{2h} = 0, \quad (15.14)$$

$$K_{2V} = e m_2 w_{1V} e + J_{2V_2} w_{2V}, \quad (15.15)$$

gdzie  $e$  – odległość osi  $z_2$  od osi  $z$ .

Po podstawieniu prędkości  $w_{2V}$  zgodnie z zależnością (15.11) otrzymuje się

$$K_{2V} = (m_2 e^2 + J_{2V_2}) w_{1V} + J_{2V_2} w_w. \quad (15.16)$$

Ponieważ moment bezwładności podukładu PU2 względem osi  $z$  jest równy  $J_{2V} = m_2 e^2 + J_{2V_2}$ , to wzór (15.16) można zapisać jako

$$K_{2V} = J_{2V} w_{1V} + J_{2V_2} w_w. \quad (15.17)$$

**Całkowity kręt układu**

Rzuty wektora krętu całego układu w dowolnej chwili  $t$  są sumą rzutów wyznaczonych dla każdego z podukładów (wzory (15.9), (15.14) i (15.17)), a zatem:

$$K_x = K_{1x} + K_{2x} = 0 \quad (15.18)$$

$$K_h = K_{1h} + K_{2h} = -J_{1V} \omega_{1V}, \quad (15.19)$$

$$K_V = K_{1V} + K_{2V} = (J_{1V} + J_{2V}) \omega_{1V} + J_{2V_2} \omega_w. \quad (15.20)$$

Ponieważ moment dewiacyjny  $J_{1hV}$  jest różny od zera, to rzut krętu na oś  $h$  ( $K_h$ ) istnieje i jest zmienny. Stąd wynika, że w łożyskach tarczy-1 pojawiają się dodatkowe reakcje dynamiczne.

Oznaczając moment bezwładności całego układu względem osi  $z$  jako  $J_V$  (przy czym  $J_V = J_{1V} + J_{2V}$ ), a prędkość kątową  $\omega_{1V}$  jako  $\omega_1$  ( $\omega_1 = \mathbf{k} \omega_1$  skąd  $\omega_{1V} = \omega_1$ ) otrzymuje się rzut krętu całego układu na oś  $z$  w postaci

$$K_V = J_V \omega_1 + J_{2V_2} \omega_w. \quad (15.21)$$

W czasie ruchu układu zawsze występują opory w łożyskach i opory powietrza. Przez zastosowanie osłony (pokazanej na rysunku 15.2) opory powietrza są zminimalizowane. Moment zewnętrzny oporów powietrza wynika bowiem tylko z ruchu podukładu PU1 z małą prędkością (około 15 obr/min).

**15.3.3. Wyznaczanie zależności prędkości kątowej  $\omega_1$  w funkcji prędkości względnej  $\omega_w$  i czasu  $t$** 

W chwili początkowej oba podukłady (PU1 i PU2) są w spoczynku. Uruchomienie silnika wchodzącego w skład podukładu PU2 powoduje ruch obrotowy podukładu PU1. Na układ (na oba podukłady łącznie) działa moment tarcia, którego wektor ma kierunek osi  $z$

$$\mathbf{M}_{Tz} = \mathbf{k} M_T, \quad (15.22)$$

który powoduje zmianę krętu układu względem osi  $z$ .

Przeprowadzany eksperyment można podzielić na dwa etapy:

**Etap I** – obejmuje okres od chwili włączenia zasilania silnika do chwili zatrzymania się tarczy-1;

§ w chwili początkowej etapu I ( $t = 0$ ) prędkości kątowe obu tarcz są równe zero:

$$t = 0 \Rightarrow (\omega_w)_{t=0} = 0, \quad (\omega_1)_{t=0} = 0,$$

§ w chwili końcowej etapu I ( $t = t_1$ ) prędkości kątowe tarcz są odpowiednio:

$$t = t_1 \Rightarrow (\omega_w)_{t=t_1} = \omega_{w \max}, \quad (\omega_1)_{t=t_1} = 0.$$

Wykorzystując powyższe warunki w zależnościach (15.2) i (15.21) dla dowolnej chwili etapu I otrzymuje się

$$J_V \omega_1 + J_{2V_2} \omega_w = M_T t, \quad (0 < t < t_1), \quad (15.23)$$

gdzie  $M_T$  oznacza stały moment sił tarcia względem osi  $z$ , przyjęty dla etapu I.

**Etap II** - obejmuje okres od chwili zatrzymania się tarczy-1 i wyłączenia zasilania silnika do chwili ponownego zatrzymania się tarczy-1;

§ w chwili początkowej etapu II ( $t = t_1$ ) prędkości kątowe wirnika i tarczy mają wartości:

$$t = t_1 \Rightarrow (\omega_w)_{t=t_1} = \omega_{w \max}, \quad (\omega_1)_{t=t_1} = 0,$$

§ w chwili, gdy wirnik zatrzymuje się w ruchu względnym ( $t = t_2$ ):

$$t = t_2 \Rightarrow (\omega_w)_{t=t_2} = 0,$$

§ w chwili końcowej etapu II ( $t = t_3$ ) prędkości kątowe wirnika i tarczy są równe zero:

$$t = t_3 \Rightarrow (\omega_w)_{t=t_3} = 0, \quad (\omega_1)_{t=t_3} = 0.$$

Analogicznie jak w etapie I, po wykorzystaniu podanych warunków w zależnościach (15.2) i (15.21) dla dowolnej chwili etapu II otrzymuje się:

$$J_V \omega_1 + J_{2V_2} \omega_w = M_{TI} t_1 + M_{TH} (t - t_1), \quad (t_1 \leq t \leq t_3), \quad (15.24)$$

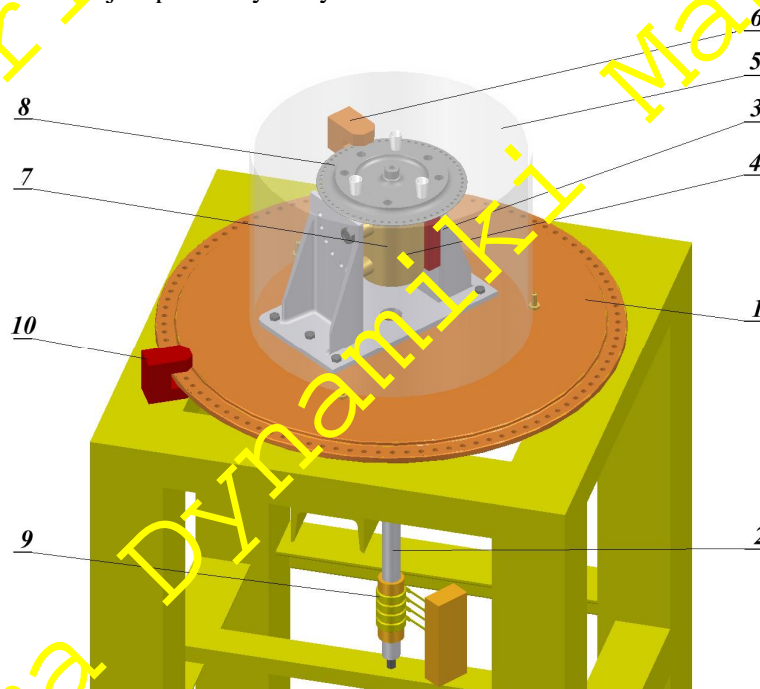
przy czym  $M_{TH}$  jest stałym momentem sił tarcia względem osi z wyznaczonym dla etapu II.

Wzory (15.23) i (15.24) pozwalają na obliczenie prędkości kątowej  $\omega_1$  dla każdej chwili  $t$ , o ile znane są wartości prędkości względnej ( $\omega_w$ ) oraz momenty pochodzące od sił zewnętrznych (momenty  $M_{TI}$  i  $M_{TH}$  wywołane siłami tarcia).

Po włączeniu silnika prędkość kątowa wirnika ( $\omega_w$ ) szybko wzrasta, aż do osiągnięcia maksymalnej prędkości ( $\omega_{wmax}$ ). W tym czasie prędkość tarczy-1 ( $\omega_1$ ) rośnie, a po ustaleniu się prędkości  $\omega_w$  zaczyna maleć. Moment tarcia ( $M_{TI}$ ), przeciwny do  $\omega_1$  będzie działał do chwili zatrzymania się tarczy-1. W tym momencie wyłączane jest zasilanie silnika, a w wyniku tarcia *wewnętrznego* układu zacznie się hamowanie wirnika. Z twierdzenia o pochodnej krętu układu wynika, że tarcza-1 rozpocznie ruch w przeciwną stronę. Moment tarcia zmieni zwrot na przeciwny niż w pierwszym etapie ruchu. Ten moment tarcia ( $M_{TH}$ ) będzie działał do chwili ostatecznego zatrzymania się tarczy-1 ( $t = t_3$ ).

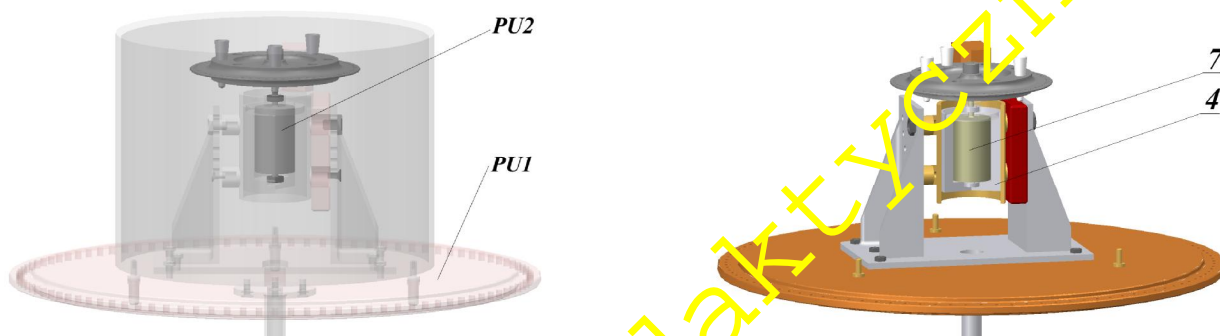
#### 15.4. Opis stanowiska badawczego

Ogólny widok badanego układu jest pokazany na rys. 15.2.



Rys. 15.2. Widok stanowiska badawczego

Podukłady PU1 i PU2 są przedstawione na rysunku 15.3



Rys. 15.3. Podział na podukłady PU1 i PU2

Podukład PU1 stanowi tarcza-1 (1) osadzona na pionowym wale (2) i mogąca obracać się swobodnie wokół osi  $z$ . Do tarczy-1 jest zamocowany uchwyt (3), w którym znajduje się silnik elektryczny (4). Osłona (5) wykonana ze szkła organicznego związana z podukładem PU1 powoduje, że opory powietrza działające na tarczę-2 stają się siłami wewnętrznymi układu.

W skład drugiego podukładu (PU2) wchodzi wirnik (7) silnika oraz sztywno z nim połączona tarcza-2 (8). Wirnik silnika i tarcza-2 mogą obracać się ruchem względnym wokół osi  $z_2$  (oś własna wirnika).

Silnik (4) jest zasilany prądem stałym o napięciu 12 V poprzez szczotki i pierścienie (9). Prędkość obrotowa tarczy-1, na obwodzie, której zostało wywierconych 100 otworów, mierzona jest za pomocą czujnika optycznego (10). Impulsy z czujnika są przekazywane na dwa mierniki, które umożliwiają odczyt czasu  $1/100$  obrotu tarczy. Jeden miernik rejestruje wartość początkową, a drugi podaje odczyty co  $\sim 3$  s. Prędkość obrotowa (względem osi  $z_2$ ) tarczy-2 – o 60 otworach na obwodzie – mierzona jest za pomocą czujnika optycznego (6). Impulsy z tego czujnika są przekazywane przez szczotki i pierścienie (9) do miernika obrotów.

#### 15.4.1. Opis aparatury pomiarowej

Jako miernik prędkości obrotowej tarczy-2 został zastosowany miernik częstotliwości typ MC-3T współpracujący z czujnikiem optycznym (6) na rys.15.2.

Do pomiaru prędkości obrotowej tarczy-1 są używane dwa mierniki uniwersalne typu KZ-2025 współpracujące z czujnikiem optycznym (10). Przystosowano je do pomiaru czasu trwania impulsów pochodzących od otworów wywierconych w pobliżu brzegu tarczy. Pierwszy miernik wskazuje wartość początkową, drugi zaś chwilową. Wartość początkowa podawana jest po każdorazowym przyśnięciu przycisku P1. Do zliczania czasu trwania doświadczenia zastosowano trzeci miernik KZ-2025. Przyciśnięcie przycisku P1 zeruje ten miernik, a otwarcie linii optycznej czujnika (10) przez pierwszy zbliżający się otwór tarczy-1 rozpoczyna zliczanie czasu. Sygnał z czujnika (10) po przetworzeniu podawany jest dodatkowo na rejestrator XY, który wykonuje wykres prędkości kątowej  $\omega_1$  w funkcji czasu. Należy wspomnieć, że układ pomiarowy i rejestracji prędkości kątowej  $\omega_1$  nie odróżnia kierunku obrotów.

### 15.5. Przebieg ćwiczenia

Przeprowadzane są dwa eksperymenty. Celem pierwszego z nich jest wyznaczenie momentów pochodzących od sił oporu działających na układ ( $M_{TI}$  oraz  $M_{TII}$ ). Drugi eksperyment polega na pomiarze prędkości kątowych obu tarcz i czasu trwania poszczególnych etapów ruchu.

#### 15.5.1. Wyznaczanie momentów oporów układu w ruchu obrotowym

- Włączyć:
  - licznik uniwersalny KZ-2025 do pomiaru prędkości początkowej ( $n_{i0}$ ) tarczy-1,
  - licznik uniwersalny KZ-2025 do pomiaru czasu ( $t$ ),
  - częstotlicziomierz MC-3B do pomiaru prędkości ( $n_w$ ) wirnika,
  - zasilacz silnika.
- Przełącznik P2 ustawić w pozycji 1.

- Pokręcając potencjometrem (znajduje się na froncie stołu) ustawić szybkość wirnika na około 1600 obr/min.
- Tarczę-1 zakręcić w lewo (kierunek zgodny z nalepioną strzałką – traktowany będzie jako **dołami**).
- Nacisnąć i zwolnić przycisk **P1** (żółty w białej obudowie).
- Zanotować w odpowiednich kolumnach tabeli 15.1 wskazania obydwu liczników KZ-2025.

Uwaga!

Pomiary należy przeprowadzić przy wskazaniach miernika prędkości początkowej tarczy mieszczących się w zakresie od 15 ms do 30 ms.

- Wykonać powyższy pomiary trzykrotnie dla obrotów tarczy-1 w lewo, a następnie w prawo.
- Przełącznik **P2** przestawić w pozycję **0**.

Tabela 15.1. Wyznaczenie momentu oporów

Kierunek obrotu tarczy	Numer pomiaru	Prędkość początkowa tarczy		Czas ruchu tarczy	Moment oporów	Wartość średnia momentu
		wskazanie miernika KZ-2025	prędkość kątowa			
		$t_{i0}$	$\omega_{i0}$			
	$i$			$t$	$M_{Ti}$	$M_T$
	--	<b>ms</b>	<b>rad/s</b>	<b>s</b>	<b>N mm</b>	<b>N mm</b>
w lewo	1					
	2					
	3					
w prawo	4					
	5					
	6					

Założenie stałych momentów tarcia  $M_{Ti}$  przy całkowaniu równania (15.2) jest równoważne z przyjęciem stałego (ujemnego) przyspieszenia kątowego. Stąd otrzymuje się

$$M_{Ti} = \frac{J \omega_{i0}}{t_{0i}} \quad (15.25)$$

### 15.5.2. Wyznaczanie prędkości wirowania tarczy-1 w funkcji czasu i prędkości wirnika

- Wyłączyć miernik prędkości początkowej ( $n_{i0}$ ) tarczy-1.
- Włączyć dodatkowo licznik uniwersalny KZ-2025 do pomiaru prędkości chwilowej ( $n_i$ ) tarczy.
- Przygotować trzy tabele pomocnicze (rozcinając odpowiednio kartkę, na której są one wydrukowane).
- Sprawdzić, czy tarcza oraz wirnik są nieruchome.
- Nacisnąć i zwolnić przycisk **P1** - sprawdzić, czy miernik czasu nie rozpoczął liczenia. Jeśli rozpoczął, to minimalnie obrócić tarczę-1 i ponownie nacisnąć i zwolnić przycisk **P1**.
- Przełącznik **P2** ustawić w położeniu **1**.

7. Co 10 sekund odczytywać wskazania (zapisując je w tabelach pomocniczych):

- miernika prędkości tarczy,
- miernika prędkości wirnika.

W chwilę po zatrzymaniu się tarczy-1 przełącznik **P2** przestawić w położenie **0** i dalej prowadzić odczyty mierników, aż do ponownego zatrzymania się tarczy.

8. W trakcie pomiarów należy obserwować badany układ; zapamiętać kierunki obracania się tarczy i wirnika w poszczególnych fazach ruchu oraz zanotować (w jednej z tabeli pomocniczych):

- czas  $t_1$  jaki upłynął od początku ruchu do chwili zatrzymania się tarczy,
- czas  $t_2$  do zatrzymania się wirnika w jego ruchu względnym,

- czas  $t_3$  do ponownego zatrzymania się tarczy.
- Włożyć papier do rejestratora XY, włączyć go i przeprowadzić opisane powyżej czynności od 3 do 8 ponownie.
  - Wyłączyć rejestrator XY, wyjąć papier z narysowanym wykresem.
  - Wyłączyć wszystkie mierniki oraz zasilacz silnika.

Po zakończeniu eksperymentu prosimy nie zapomnieć o uporządkowaniu stanowiska.

### 15.5.3. Tabele pomocnicze

Czas $t$ s	Wskazania miernika KZ-2025 prędkości tarczy			Czas $t$ s	Wskazania miernika MC-3T prędkości wirnika		
	Pomiar 1	Pomiar 2	Pomiar 3		Pomiar 1	Pomiar 2	Pomiar 3
10				10			
20				20			
30				30			
...				...			
170				170			

Czas s	Wskazania miernika KZ-2025 czasu ruchu tarczy ( $t_1, t_3$ ) i wirnika ( $t_2$ )		
	Pomiar 1	Pomiar 2	Pomiar 3
$t_1$			
$t_2$			
$t_3$			

## 15.6. Opracowanie wyników pomiarów i sprawozdanie

### 15.6.1. Obliczenia pomocnicze

Po zakończeniu pomiarów należy przepisać do tabeli 15.2 wyniki zebrane w tabelach pomocniczych z tej serii pomiarów, kiedy wykonywany był wykres na rejestratorze. Następnie wprowadzić dane do programu komputerowego, a uzyskane wyniki zapisać w odpowiednich rubrykach tabeli 15.1 i 15.2 oraz wydrukować (bądź naszkicować) wykres obrazujący zależność prędkości kątowej tarczy-1 od czasu.

Należy także opracować wykres uzyskany z rejestratora XY nanosząc i opisując osie współrzędnych oraz wyróżnić każdy z trzech etapów ruchu i zaznaczyć czasy  $t_1, t_2, t_3$ . Skala osi  $X$  (czas) rejestratora wynosi **5,0 s / cm**, natomiast skala osi  $Y$  (szybkość wirowania tarczy) wynosi **0,30 rad / s / cm**.

Proszę również narysować na uzyskanym wykresie prawdopodobną krzywą obrazującą zmianę szybkości wirnika w funkcji czasu.

Dane liczbowe są następujące:

$J_{1z} = 17,85 \cdot 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$  - moment bezwładności podukładu PU1 względem osi  $z$ ,

$J_{2z2} = 0,355 \cdot 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$  - moment bezwładności podukładu PU2 względem osi  $z_2$ ,

$J_{2z} = 0,359 \cdot 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$  - moment bezwładności podukładu PU2 względem osi  $z$ ,

$J_z = 18,21 \cdot 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$  - moment bezwładności całego układu (łącznie z osłoną),

$e = 1,5 \text{ mm}$  - odległość między osiami  $z$  i  $z_2$ .

Wymiary osłony ze szkła organicznego: średnica 300 mm, wysokość 220 mm, grubość ścianki 5,0 mm. Gęstość materiału:  $1500 \text{ kg/m}^3$ .



Tabela 15.2. Prędkość tarczy w zależności od prędkości wirnika i czasu

Etap ruchu	Czasy odczytu	Czasy ruchu tarczy oraz wirnika	Wskazanie mierników prędkości		Prędkości kątowe eksperymentalne		Prędkość teoretyczna tarczy	Czas teoretyczny ostatecznego zatrzymania się tarczy
			wirnika	tarczy	wirnika	tarczy		
	$t$	$t_1, t_2, t_3$	$n_w$	$n_l$	$\omega_w$	$\omega_l$	$\omega_l$	$t_3$
	s	s	obr/min	m s	rad/s	rad/s	rad/s	s
	10							
	20							
	30							
	40							
	...							

### 15.6.2. Sprawozdanie

Sprawozdanie, które należy sporządzić w sposób staranny i oddać na zakończenie zajęć ma zawierać:

- temat i cel ćwiczenia,
- wypełnione tabele 15.1 oraz 15.2,
- wykresy uzyskane z obliczeń komputerowych i z rejestratora XY,
- obserwacje i wnioski.

### 15.7. Pytania sprawdzające

- Podać sformułowanie twierdzenia o pochodnej krętu układu materialnego.
- Składanie ruchów obrotowych ciała sztywnego względem osi równoległych.
- Co to jest masowy moment dewiacyjny (odśrodkowy); w jakich przypadkach jest on równy zero?
- Co oznaczają poszczególne symbole we wzorze  $\dot{\mathbf{K}}_O = \mathbf{r}_C \times n \dot{\mathbf{r}}_C + \mathbf{K}_C$ ?