

## Ćwiczenie 16

# BADANIE STANÓW RÓWNOWAGI MECHANIZMÓW PŁASKICH O JEDNYM STOPNIU SWOBODY

### 16.1. Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest teoretyczne i doświadczalne wyznaczenie położenia równowagi mechanizmu płaskiego oraz sprawdzenie, czy znalezione położenia odpowiadają stanom równowagi stałej, chwiejnej czy obojętnej.

### 16.2. Wprowadzenie

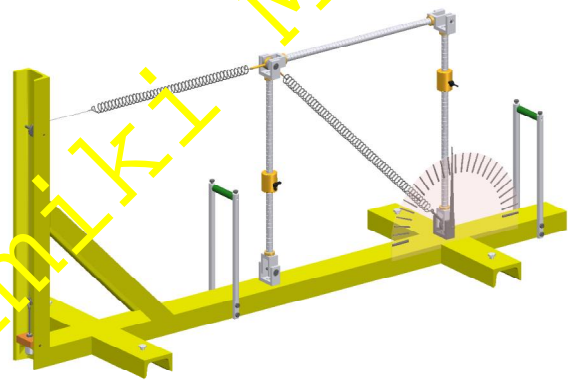
Obiektem badań są następujące układy mechaniczne:

- składający się z dwóch kół toczących się po sobie bez poślizgu i prętów połączonych z kołem zewnętrznym (rys. 16.1-a),
- złożony z trzech prętów połączonych ze sobą przegubowo i dwu sprężyn (rys. 16.1-b)

a)



b)



Rys. 16.1. Widok badanych układów:

a) koło zębate toczące się po nieruchomym kole, b) przegubowo połączone pręty

Pierwszy z analizowanych układów (pokazany na rys. 16.1-a) składa się z dwóch kół toczących się po sobie bez poślizgu i prętów (płaskowników). Koło wewnętrzne jest nieruchome, a jego środek jest połączony za pomocą łączników ze środkiem koła zewnętrznego (ruchomego). Pręty przymocowane do koła zewnętrznego stanowią dodatkowe obciążenie działające na układ. Rozpatrywany układ może pozostawać w równowadze lub poruszać się ruchem płaskim w płaszczyźnie pionowej. Układ ma jeden stopień swobody.

Drugi układ mechaniczny (rys. 16.1-b) składa się z trzech prętów połączonych ze sobą przegubowo. Końce dwóch prętów są zamocowane za pomocą przegubów walcowych do nieruchomej ramy. Na dwóch prętach umieszczone są tuleje, których położenia mogą być zmieniane. Umożliwiają one zmianę obciążeń działających na układ. Jeden z przegubów połączony jest z ostoją za pomocą dwu sprężyn śrubowych walcowych. Rozpatrywany układ może pozostawać w równowadze lub poruszać się w płaszczyźnie pionowej (układ ma jeden stopień swobody).

Pomiary dokonywane na stanowiskach badawczych polegają na poszukiwaniu oraz ocenie stateczności położenia równowagi układu.

Wyniki pomiarów są porównywane z rezultatami obliczeń prowadzonych na podstawie analizy zmian energii potencjalnej określonej dla modelu fizycznego badanego układu. Przy formułowaniu modelu przyjęto, że więzy nałożo-

ne na układ są idealne, zaś obciążenia wywołane są przez siły zachowawcze – uwzględniony jest jedynie wpływ sił ciężkości oraz sił oddziaływania sprężyn (dla układu z rys. 16.1-b). Siły oporu powstające w łożyskach tocznych i siły tarcia pomiędzy zębami kół są pominięte.

Oprócz eksperymentu w ramach ćwiczenia przewidziana jest symulacja komputerowa modelu wirtualnego analizowanego układu.

### 16.3. Teoretyczny opis zjawiska

Równania równowagi układu mechanicznego można otrzymać w różny sposób – na przykład na podstawie:

- warunków równowagi układu (*suma wszystkich sił zewnętrznych działających na układ i suma momentów tych sił względem dowolnego punktu muszą być równe zero*),
- twierdzenia o energii potencjalnej (*dla układów zachowawczych w położeniu równowagi energia potencjalna spełnia warunki konieczne do istnienia jej ekstremum*),
- zasady prac przygotowanych (*dla układów o więzach idealnych suma prac przygotowanych na przemieszczeniach wirtualnych jest równa zero*),
- sił uogólnionych (*przyjmujących zerowe wartości w położeniu równowagi*).

Położeniem równowagi statycznej układu nazywa się takie położenie, w którym znajduje się on przez dowolnie długi czas, jeżeli w chwili początkowej znajdował się on w tym położeniu, a prędkości wszystkich jego punktów były równe zero. Układ, który w chwili początkowej nie znajdował się w położeniu równowagi, może zmierzać do położenia równowagi, oddalać się od niego, pozostawać w stałej odległości lub oscylować wokół położenia równowagi.

#### 16.3.1. Rodzaje równowagi

Rozróżnia się trzy rodzaje równowagi: stałą, chwiejną i obojętną.

*Równowagą stałą* nazywa się taki rodzaj równowagi, przy którym po niewielkim wychyleniu układu z zajmowanego położenia, układ wraca do położenia wyjściowego bądź wykonuje wahania wokół tego położenia.

*Równowagą chwiejną* nazywa się taki rodzaj równowagi, przy którym najmniejsze wychylenie układu z zajmowanego położenia równowagi powoduje ruch układu bądź przejście do innego położenia albo wahania wokół nowego położenia równowagi.

*Równowagą obojętną* nazywa się taki rodzaj równowagi, przy którym każde małe wychylenie układu z zajmowanego położenia równowagi powoduje przejście układu do innego położenia równowagi.

W teorii stateczności położenie charakteryzujące się równowagą stałą nazywane jest *statecznym położeniem równowagi*. *Niestatecznym położeniem równowagi* określa się takie położenie, w którym równowaga układu jest chwiejna lub obojętna.

#### 16.3.2. Zasada Dirichleta

Można wykazać prawdziwość poniższego twierdzenia, noszącego nazwę *zasady Dirichleta*.

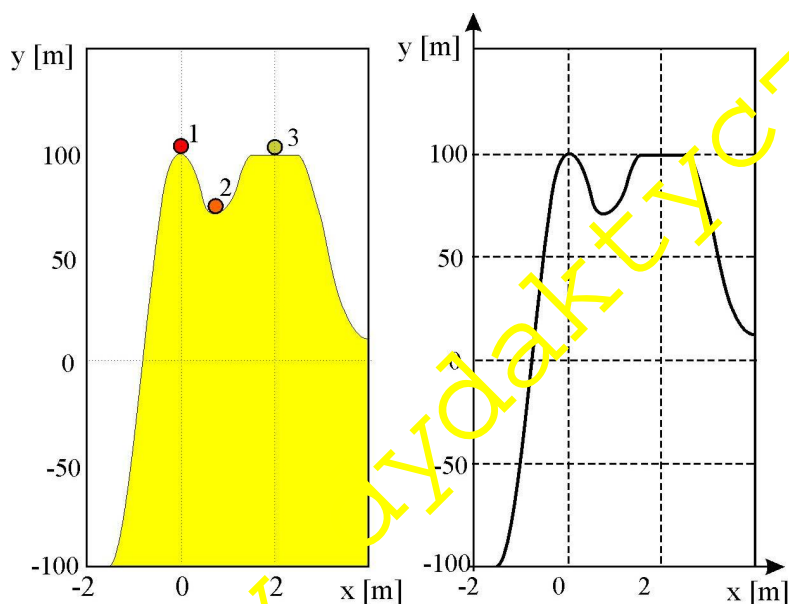
*Położenie układu materialnego (o więzach idealnych) znajdującego się w zachowawczym polu sił, w którym energia potencjalna osiąga minimum, jest położeniem równowagi stałej.*

Warunki konieczne i wystarczające spełnienia lokalnego minimum energii potencjalnej ( $V$ ) układu o jednym stopniu swobody ( $V=V(q_1)$ ) są określone zależnościami:

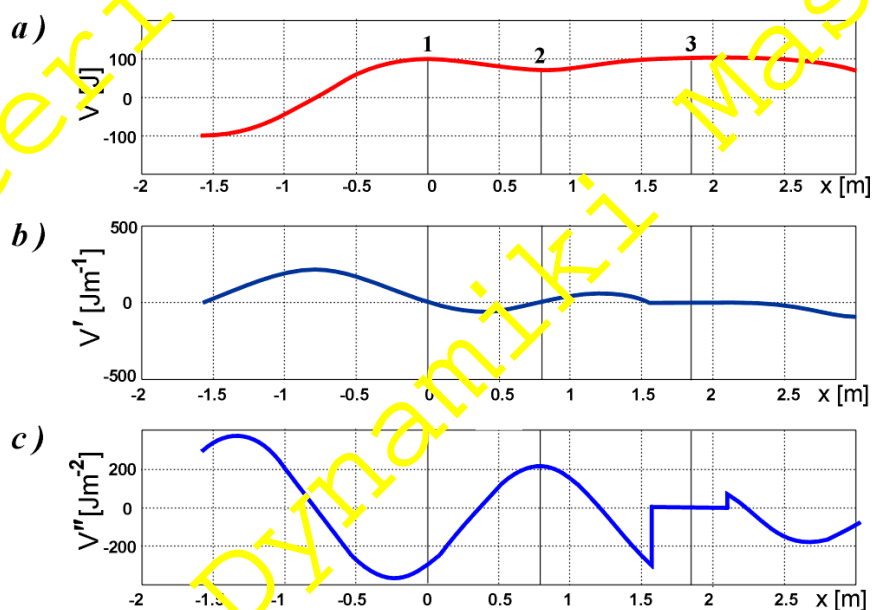
$$\frac{dV}{dq_1} = 0, \quad \frac{d^2V}{dq_1^2} > 0. \quad (16.1)$$

Szczególnym przypadkiem zasady Dirichleta jest twierdzenie *Toricellego*.

*Położeniem równowagi stałej nieswobodnego układu materialnego o więzach idealnych, znajdującego się w jednorodnym polu sił ciężkości jest takie położenie, w którym środek ciężkości znajduje się w najniższym z możliwych położeniach.*



Rys. 16.2. Punkt materialny umieszczony na powierzchni w położeniach równowagi: trwałej (2), chwilowej (1), obojętnej (3) oraz funkcja przedstawiająca przekrój powierzchni



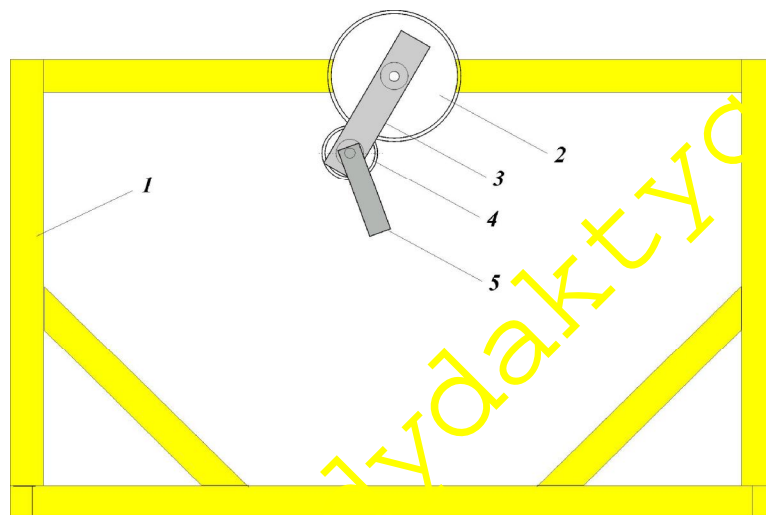
Rys. 16.3. Energia potencjalna  $V$  punktu (o masie  $m=10$  kg) pozostającego na powierzchni pokazanej na rys. 16.2. (a);

jej pochodne  $V' = \frac{dV}{dx}$  (b) oraz  $V'' = \frac{d^2V}{dx^2}$  (c)

## 16.4. Analiza modeli fizycznych badanych układów

### 16.4.1. Badane obiekty i ich modele fizyczne

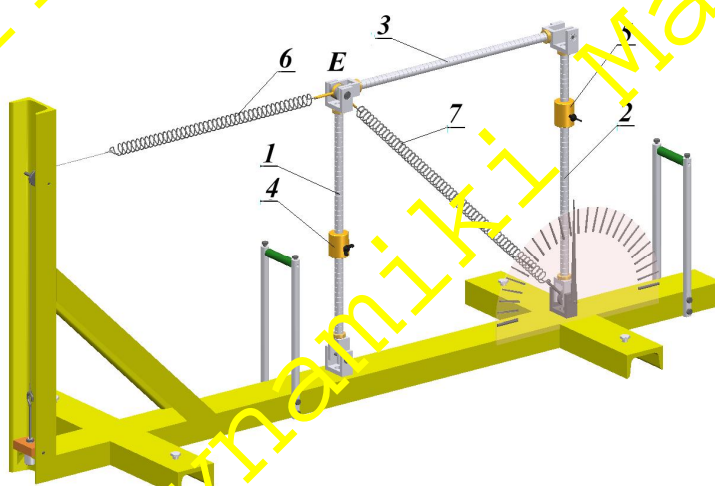
Stacjonary przygotowane do wykonania ćwiczenia są pokazane na rysunkach 16.4 i 16.5.



Rys. 16.4. Widok stanowiska badawczego 16-A

Badany mechanizm (rys.16.4) został zbudowany z dwóch kół zębatach (2) i (4) połączonych ze sobą łącznikiem (3). Na kole (4) znajduje się pręt (5). Więzy zewnętrzne jak i więzy wewnętrzne (przeguby łączące elementy, łożyska) są traktowane jako więzy idealne.

Drugi z badanych mechanizmów (rys.16.5) został zbudowany z trzech prętów (1), (2) i (3) połączonych ze sobą przegubami. Na prętach (1) i (2) znajdują się przesuwne tuleje (4) i (5), które mogą być mocowane w dowolnym położeniu. Przegub E układu jest połączony z ostoją za pomocą dwu sprężyn (6) i (7).



Rys. 16.5. Widok stanowiska badawczego 16-B

Model fizyczny tego układu (rys.16.5) składa się z pięciu ciał (trzech prętów i dwu tulei) oraz dwu sprężyn traktowanych jako nieważkie elementy. Więzy zewnętrzne (łączące pręty z ramą) jak i więzy wewnętrzne (przeguby łączące pręty) traktowane są jako więzy idealne.

Rozpatrywane układy posiadają jeden stopień swobody, a więc wszystkie zmienne można wyrazić w zależności od jednej współrzędnej ogólnionej ( $j$ ).

W przypadku, gdy układ jest poddany działaniu sił ciężkości, a ponadto zawiera elementy sprężyste, jego całkowitą energię potencjalną określa się z zależności

$$V(j) = \sum_{i=1}^{i=N} Q_i z_i + \sum_{j=1}^{j=K} \frac{1}{2} c_j I_j^2, \quad (16.2)$$

gdzie:  $Q_i$  – ciężar ciała  $i$  ( $N$  oznacza liczbę ciał w układzie),

$z_i$  – współrzędna środka ciężkości ciała  $i$ ,

$c_j$  – sztywność sprężyny  $j$  ( $K$  oznacza liczbę sprężyn w układzie),

$I_j$  – odkształcenie sprężyny  $j$ .

Położenie równowagi, zgodnie z zasadą Dirichleta, jest wyznaczane na podstawie równania

$$\frac{dV(j)}{dj} = 0 \quad (16.3)$$

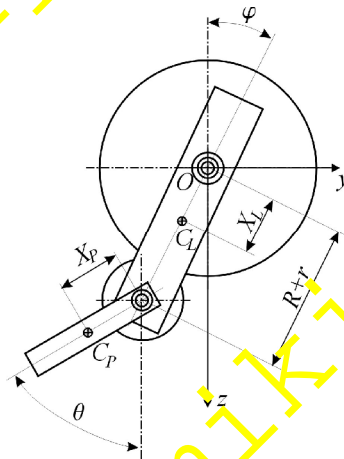
Oceny stanu równowagi dokonuje się, sprawdzając znak drugiej pochodnej energii potencjalnej  $V(j)$ . W przypadku stanu równowagi stałej w położeniu określonym kątem  $j_i$  ( $i=1, \dots, k$ ) winno być

$$\left[ \frac{d^2V(j)}{dj^2} \right]_{j=j_i} > 0, \quad i=1, \dots, k, \quad (16.4)$$

gdzie  $k$  oznacza liczbę rozwiązań równania (16.3).

#### 16.4.2. Określenie położenia równowagi i badanie ich stateczności – dla modelu złożonego z kół zębatach

Model fizyczny badanego układu (rys. 16.4) składa się z czterech ciał ( $i=1, \dots, 4$ ). Przyjęto, że współrzędną uogólnioną jest kąt  $j$  określający wychylenie łącznika (3) z położenia pionowego (rys. 16.6).



Rys. 16.6. Współrzędna uogólniona  $j$  oraz położenia środków ciężkości ciał

Jedno z ciał układu jest nieruchome, zatem energię potencjalną można przedstawić w postaci

$$V(j) = \sum_{i=1}^{i=3} Q_i z_i, \quad (16.5)$$

gdzie:  $Q_i$  – ciężar ciała  $i$ ,

$z_i$  – współrzędna środka ciężkości ciała  $i$ .

Współrzędne opisujące położenia poszczególnych punktów rozpatrywanego układu można wyrazić w zależności od współrzędnej uogólnionej  $j$  (określającej wychylenie łącznika (3) z położenia pionowego (rys. 16.6)). Dla ułatwienia obliczeń wprowadzono pomocniczy kąt obrotu koła zewnętrznego  $q$ .

Współrzędne środków ciężkości krążka ruchomego, łącznika i pręta są określone jako:

$$z_1 = (R+r) \cos j, \quad z_2 = X_L \cos j, \quad (16.6)$$

$$z_3 = (R+r) \cos j + X_P \cos q, \quad (16.7)$$

gdzie  $R$  oraz  $r$  oznaczają promienie nieruchomego i ruchomego koła, natomiast  $X_L$  i  $X_P$  są współrzędnymi środków ciężkości łącznika ( $C_L$ ) i pręta ( $C_P$ ) w lokalnych układach współrzędnych.

Po uwzględnieniu, że

$$(R+r)j = r q , \quad (16.8)$$

otrzymuje się

$$\sum_{i=1}^{i=3} Q_i z_i = Q_1(R+r) \cos j + Q_2 X_L \cos j + Q_3 \left[ (R+r) \cos j + X_p \cos \left( \frac{R+r}{r} j \right) \right], \quad (16.9)$$

przy czym

$$Q_1 = m_r g , \quad Q_2 = m_L g , \quad Q_3 = m_p g . \quad (16.10)$$

Energia potencjalna analizowanego układu może być przedstawiona jako

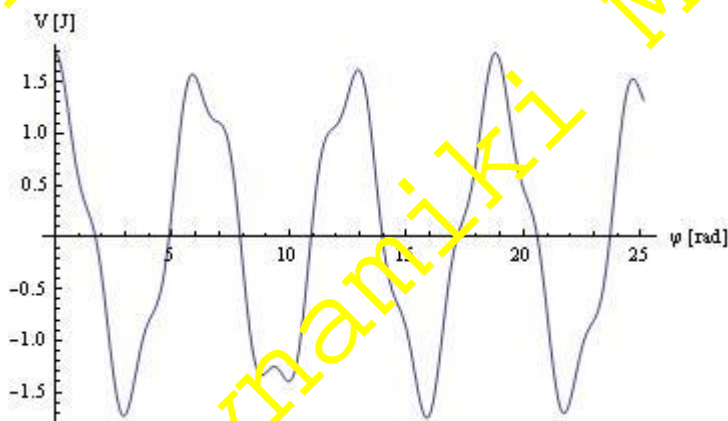
$$V = A \cos j + B \cos(cj) = M(j) , \quad (16.11)$$

gdzie:

$$A = (Q_1 + Q_3)(R+r) + Q_2 X_L , \quad (16.12)$$

$$B = Q_3 X_p . \quad (16.13)$$

Przykładowy wykres energii potencjalnej rozpatrywanego układu w funkcji kąta  $j$ , uzyskany dla określonego stosunku promieni kół  $c = \frac{R+r}{r}$  jest pokazany na rys. 16.7.



Rys. 16.7. Przykładowy przebieg energii potencjalnej w funkcji kąta  $j$  dla układu złożonego z kół zębatych

Określenie położenia równowagi i ich rodzaju wymaga obliczenia pierwszej i drugiej pochodnej energii potencjalnej względem współrzędnej uogólnionej. Pochodne energii potencjalnej przyjmują formę:

$$\frac{dV}{dj} = \frac{d}{dj} (A \cos j + B \cos(cj)) = -A \sin j - Bc \sin(cj) , \quad (16.14)$$

$$\frac{d^2V}{dj^2} = \frac{d}{dj} (-A \sin j - Bc \sin(cj)) = -A \cos j - Bc^2 \cos(cj) . \quad (16.15)$$

Na podstawie podanych zależności można określić warunki, jakie muszą być spełnione, aby położenie określone kątem  $j = 0$  było położeniem równowagi stałej.

### 16.4.3. Określenie położenia równowagi i badanie ich stateczności – dla modelu złożonego z prętów i sprężyn

Podobnie jak poprzednio, rozpatrywany układ ma jeden stopień swobody, a więc wszystkie zmienne można wyrazić w zależności od jednej współrzędnej uogólnionej. Jako współrzędną uogólnioną został przyjęty kąt  $j$  oznaczający wychylenie prętów BE i CD z położenia pionowego (rys. 16.8).

Model fizyczny tego układu składa się z pięciu ciał ( $i=1, \dots, 5$ ) i dwóch nieważkich elementów sprężystych ( $j=1, 2$ ). Więzy zewnętrzne (łącznie pręty z ramą) jak i więzy wewnętrzne (przeguby łączące pręty) traktowane są jako więzy idealne.

Energię potencjalną modelu można przedstawić w postaci

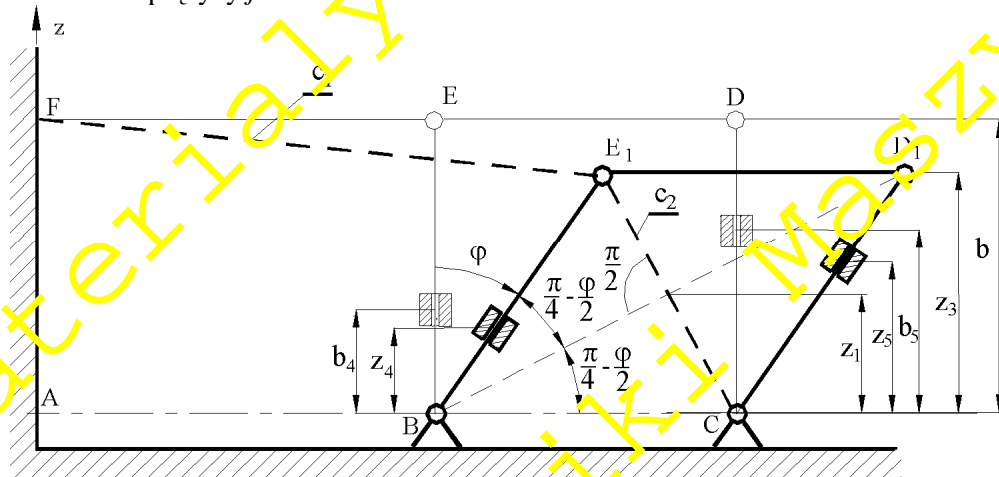
$$V(j) = \sum_{i=1}^{i=5} Q_i z_i + \sum_{j=1}^{j=2} \frac{1}{2} c_j l_j^2, \quad (16.16)$$

gdzie:  $Q_i$  – ciężar ciała  $i$ ,

$z_i$  – współrzędna środka ciężkości ciała  $i$ ,

$c_j$  – sztywność sprężyny  $j$ ,

$l_j$  – odkształcenie sprężyny  $j$ .



Rys. 16.8. Model fizyczny układu złożonego z prętów

Współrzędne opisujące położenia poszczególnych punktów rozpatrywanego układu można wyrazić w zależności od współrzędnej uogólnionej  $j$  (oznaczającej wychylenie prętów BE i CD z położenia pionowego (rys. 16.8)). Zatem:

$$z_1 = \frac{1}{2} b \cos j, \quad z_2 = \frac{1}{2} b \cos j, \quad (16.17)$$

$$z_3 = b \cos j, \quad (16.18)$$

$$z_4 = b_4 \cos j, \quad z_5 = b_5 \cos j, \quad (16.19)$$

gdzie  $b$  oznacza długości prętów (BE, CD i ED), natomiast  $b_4$  i  $b_5$  są odległościami środków ciężkości tulei (4) i (5) odpowiednio od punktów B i C.

Po uwzględnieniu, że

$$Q_1 = Q_2, \quad (16.20)$$

gdzie  $Q_1$  i  $Q_2$  oznaczają ciężary prętów (1) i (2) otrzymuje się

$$\sum_{i=1}^{i=5} Q_i z_i = (Q_2 b + Q_3 b + Q_4 b_4 + Q_5 b_5) \cos j = M \cos j, \quad (16.21)$$

przy czym

$$M = Q_2 b + Q_3 b + Q_4 b_4 + Q_5 b_5. \quad (16.22)$$

Wydłużenia sprężyn (zgodnie z rys. 16.8) można obliczyć z zależności:

$$I_1 = I_{10} + FE_1 - FE, \quad (16.23)$$

$$I_2 = I_{20} + CE_1 - CE, \quad (16.24)$$

gdzie przez  $\lambda_{10}$  i  $\lambda_{20}$  oznaczono odkształcenia sprężyn przy pionowym położeniu prętów (1) i (2). Długości odcinków  $CE$ ,  $CE_1$  i  $FE_1$  można określić na podstawie geometrii układu:

$$CE = b\sqrt{2}, \quad (16.25)$$

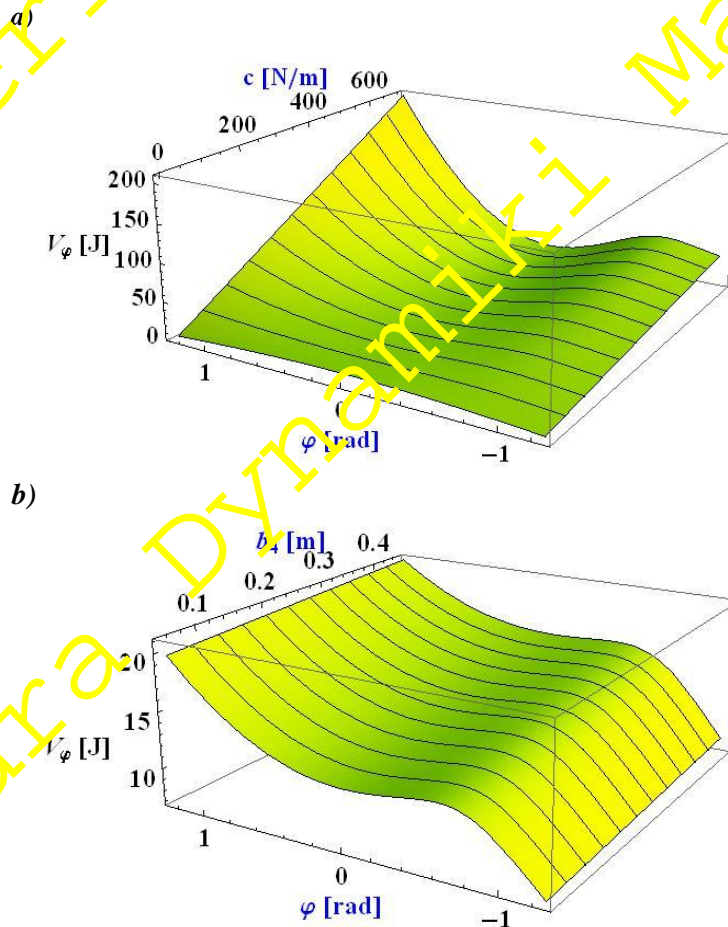
$$CE_1 = 2b \sin\left(\frac{\varphi - j}{4} - \frac{j}{2}\right), \quad (16.26)$$

$$FE_1 = \sqrt{(FE + b \sin j)^2 + (b - b \cos j)^2}. \quad (16.27)$$

Energia potencjalna analizowanego układu może być przedstawiona jako

$$V(j) = M \cos j + \frac{1}{2} c_1 I_1^2 + \frac{1}{2} c_2 I_2^2. \quad (16.28)$$

Przykładowe wykresy energii potencjalnej rozpatrywanego układu w funkcji kąta  $j$  i współczynnika sztywności sprężyn  $c$  oraz położenia obciążników są pokazane na rys.16.9.



Rys. 16.9 Energia potencjalna układu: a)  $V=V(j, c)$  – w funkcji kąta wychylenia ( $j$ ) i sztywności sprężyn ( $c_1=c_2=c$ ), b)  $V=V(j, b_4)$  – w funkcji kąta wychylenia ( $j$ ) i położenia obciążników ( $b_4=b_5$ )



Określenie położenia równowagi i ich rodzaju wymaga obliczenia pierwszej i drugiej pochodnej energii potencjalnej względem współrzędnej uogólnionej. Pochodne energii potencjalnej przyjmują formę:

$$\frac{dV}{dj} = -M \sin j + c_1 l_1 \frac{\partial l_1}{\partial j} + c_2 l_2 \frac{\partial l_2}{\partial j}, \quad (16.29)$$

$$\frac{d^2V}{dj^2} = -M \cos j + c_1 \left( \frac{\partial l_1}{\partial j} \right)^2 + c_1 l_1 \frac{\partial^2 l_1}{\partial j^2} + c_2 \left( \frac{\partial l_2}{\partial j} \right)^2 + c_2 l_2 \frac{\partial^2 l_2}{\partial j^2}, \quad (16.30)$$

przy czym:

$$\frac{dl_1}{dj} = \frac{b(FE \cos j + b \sin j)}{\sqrt{4b^2 \sin^4 \left( \frac{j}{2} \right) + (FE + b \sin j)^2}}, \quad (16.31)$$

$$\frac{dl_2}{dj} = -b \cos \left( \frac{p-j}{4} \right), \quad (16.32)$$

$$\frac{d^2 l_1}{dj^2} = \frac{b(-FE \sin j - b \cos j)}{\sqrt{4b^2 \sin^4 \left( \frac{j}{2} \right) + (FE + b \sin j)^2}} - \frac{b^2 (FE \cos j + b \sin j)^2}{\left( \sqrt{4b^2 \sin^4 \left( \frac{j}{2} \right) + (FE + b \sin j)^2} \right)^3}, \quad (16.33)$$

$$\frac{d^2 l_2}{dj^2} = -\frac{1}{2} b \sin \left( \frac{p-j}{4} \right). \quad (16.34)$$

Na podstawie podanych zależności można określić warunki, jakie muszą być spełnione, aby położenie określone kątem  $j = 0$  było położeniem równowagi stałej. Warunki te są następujące:

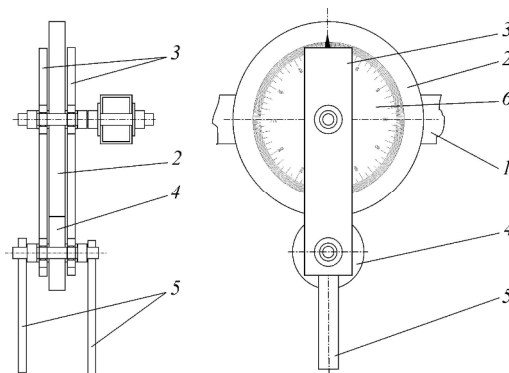
$$\left( \frac{dV}{dj} \right)_{j=0} = c_1 l_{10} b - c_2 l_{20} b \frac{\sqrt{2}}{2} = 0, \quad (16.35)$$

$$\left( \frac{d^2V}{dj^2} \right)_{j=0} = c_1 b^2 + \frac{1}{2} c_2 \left( b - l_{20} b \frac{\sqrt{2}}{2} \right) - M > 0. \quad (16.36)$$

## 16.5. Opis stanowisk badawczych i przebiegu pomiarów

### 16.5.1. Mechanizm złożony z kół zębatych

Stanowisko przygotowane do wykonania ćwiczenia jest pokazane na rysunku 16.4, a badany mechanizm na rysunku 16.10.



Rys. 16.10. Położenie początkowe układu

Mechanizm został zbudowany z dwóch kół zębatach (2 i 4) toczących się po sobie bez poślizgu i dwóch prętów (łącznika 3 i pręta 5). Na pręcie (5) może być zamocowany dodatkowy obciążnik. Do odczytu położenia łącznika (3) – określającego kąt wychylenia  $j$  – używany jest kątomierz (6).

### 16.5.2. Przebieg pomiarów

1. Ustawić pręt (5) w położeniu pionowym (zobacz rys. 16.10). Osiąga się to przy pomocy nakrętki, którą reguluje się położenie koła (2) tak, aby wspomniany pręt zajął położenie pionowe.
2. Następnie, wychylając delikatnie układ z położenia pionowego, należy sprawdzić rodzaj równowagi tego położenia.
3. Obracając pręt (5) zwiększać kąt wychylenia, poszukując nowych położen równowagi układu. W przypadku znalezienia innych położen równowagi należy określić ich rodzaj. Badania przeprowadza się dla położen łącznika (3) w zakresie podanym przez prowadzącego zajęcia. Wyniki zapisać w tabeli 16.1.

Tabela 16.1. Wyniki badań doświadczalnych

Lp.	Położenie równowagi	Przedział kąta $j_d$		Rodzaj równowagi	Uwagi
	$j_d$	$-Dj_d$	$+Dj_d$		
--	rad	rad	rad	--	--
1					
2					
...					

Tabela 16.2. Wyniki obliczeń teoretycznych

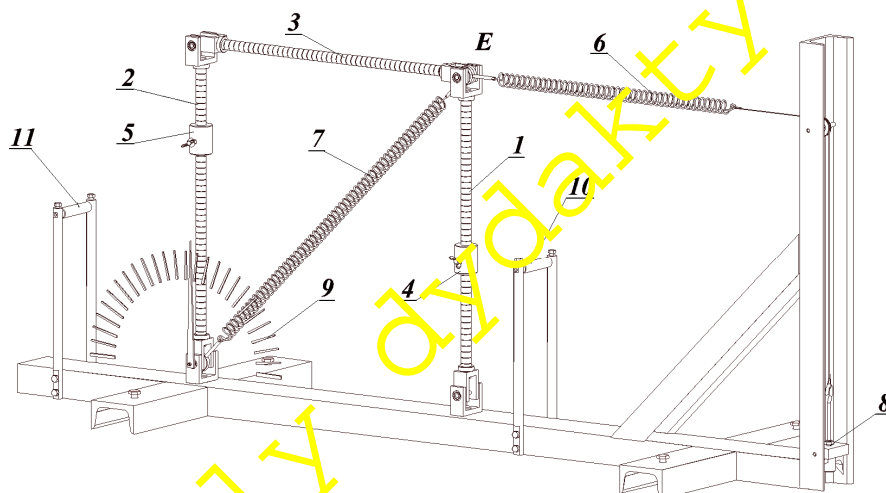
Lp.	Energia potencjalna	Pierwsza pochodna	Drua pochodna	Kąt	Przedział kąta $j_t$		Rodzaj równowagi	Uwagi
	$V_t$	$V'_t$	$V''_t$	$j_t$	$-Dj_t$	$+Dj_t$		
--	J	J/rad	J/rad <sup>2</sup>	rad	rad	rad	--	--
1								
2								
...								
6								

Tabela 16.3. Porównanie wyników badań doświadczalnych i teoretycznych

Lp.	Położenie równowagi (teoria)	Położenie równowagi (eksperyment)	Błąd bezwzględny	Błąd względny	Uwagi
	$j_d$	$j_d$	$Dj_d$	$Dj_d / j_t \cdot 100$	
--	rad	rad	rad	%	--
1					
...					
6					

### 16.5.3. Mechanizm złożony z prętów i sprężyn

Stanowisko badawcze do wykonania ćwiczenia jest pokazane na rysunkach 16.5, 16.8 i 16.11. Naciąg sprężyny (6) można regulować za pomocą śruby (8). Wychylenie układu jest ograniczone zatrzaskami (10) i (11). Do odczytu położenia (kąta wychylenia  $j$ ) pręta (2) używa się kątomierza (9).



Rys. 16.11. Podstawowe elementy stanowiska do badań

### 16.5.4. Przebieg pomiarów

Kolejność postępowania przy wykonywaniu ćwiczenia jest następująca:

1. Uruchomić program komputerowy przygotowany dla tego ćwiczenia.
2. Rozwiązać zadanie dla układu i danych pokazanych na ekranie monitora.
3. Dokonać wstępnego wyboru kompletu sprężyn i sprawdzić czy dla wybranego zestawu sprężyn i ustalonych położень tulei układ ma dwa różne położenia równowagi.  
W tym celu należy ustawić przesuwne tuleje (4) i (5) w dowolnym położeniu i zamocować sprężyny zgodnie z rys. 16.8. Za pomocą nakrętki (8) dopasować ustawienie sprężyny (6) tak, aby położenie pionowe pręta (2) było położeniem równowagi. Następnie, wychylając delikatnie układ z położenia pionowego w granicach  $30^\circ$ , należy sprawdzić rodzaj równowagi położenia pionowego. W przypadku znalezienia innych położень równowagi należy określić ich rodzaj. Takie same badania należy przeprowadzić się dla innych położень tulei (4) i (5).
4. Przeprowadzić pomiary potrzebne do wyznaczenia sztywności sprężyn.  
Współczynniki sztywności sprężyn ( $c_1$  i  $c_2$ ) należy wyznaczyć na drodze eksperymentalnej. Wykorzystywane są dwie metody doświadczalnego wyznaczenia sztywności sprężyn:
  - a) poprzez wyznaczenie wydłużeń sprężyn przy zadanych obciążeniach (tabela 16.4),
  - b) przez wyznaczenie okresu drgań swobodnych obciążnika zawieszzonego na sprężynie (tabela 16.5).
5. Umieścić sprężyny na właściwych miejscach i przeprowadzić pomiary kąta  $j$  w położeniach równowagi. Zanotować wartości kąta  $j$  w położeniach równowagi i rodzaje równowagi.

Do obliczeń teoretycznych należy przyjąć następujące dane:

- długości prętów (mierzone między osiami przegubów)  $b = 50 \text{ cm}$ ,
- ciężary prętów (1) i (2)  $Q_1 = Q_2 = 10,84 \text{ N}$ , a pręta (3)  $Q_3 = 11,71 \text{ N}$ ,
- środki ciężkości prętów znajdują się w połowie odległości między osiami przegubów,
- ciężary tulei przesuwnych  $Q_4 = Q_5 = 4,65 \text{ N}$ .

Pozostałe wielkości, to jest wydłużenie sprężyn w położeniu układu określonym kątem  $j = 0$  ( $l_{10}$ ,  $l_{20}$ ) oraz położenia tulei przesuwnych ( $b_4$ ,  $b_5$ ), określa się przez pomiar długości odpowiednich odcinków.

Tabela 16.4. Wyznaczanie sztywności sprężyn poprzez pomiary wydłużeń

Nr pomiaru	Obciążenie		Długości sprężyn		Wydłużenia sprężyn		Sztywności sprężyn	
	$Q_i$	$DQ_i$	Sprężyna 1 $l_{1i}$	Sprężyna 2 $l_{2i}$	Sprężyna 1 $Dl_{1i}=l_{1i}-l_{1(i-1)}$	Sprężyna 2 $Dl_{2i}=l_{2i}-l_{2(i-1)}$	Sprężyna 1 $c_{1i}$	Sprężyna 2 $c_{2i}$
--	N	N	cm	cm	cm	cm	N/cm	N/cm
1	0.0							
2	1×4.9=4.9	4.9						
3	2×4.9=9.8	4.9						
4	3×4.9=14.7	4.9						
5	4×4.9=19.6	4.9						
Wartości średnie:								

Tabela 16.5. Wyznaczanie sztywności sprężyn przez pomiary okresów wahań

Nr pomiaru	Obciążenie $Q_i$	Masa $m_i$	Okresy drgań obciążnika		Sztywności sprężyn	
			Sprężyna 1 $T_{1i}$	Sprężyna 2 $T_{2i}$	Sprężyna 1 $c_{1i}$	Sprężyna 2 $c_{2i}$
--	N	kg	s	s	N/cm	N/cm
1	4×4.9=19.6	4×0.5=2.0				
2	4×4.9=19.6	4×0.5=2.0				
3	4×4.9=19.6	4×0.5=2.0				
...						
Wartości średnie:						

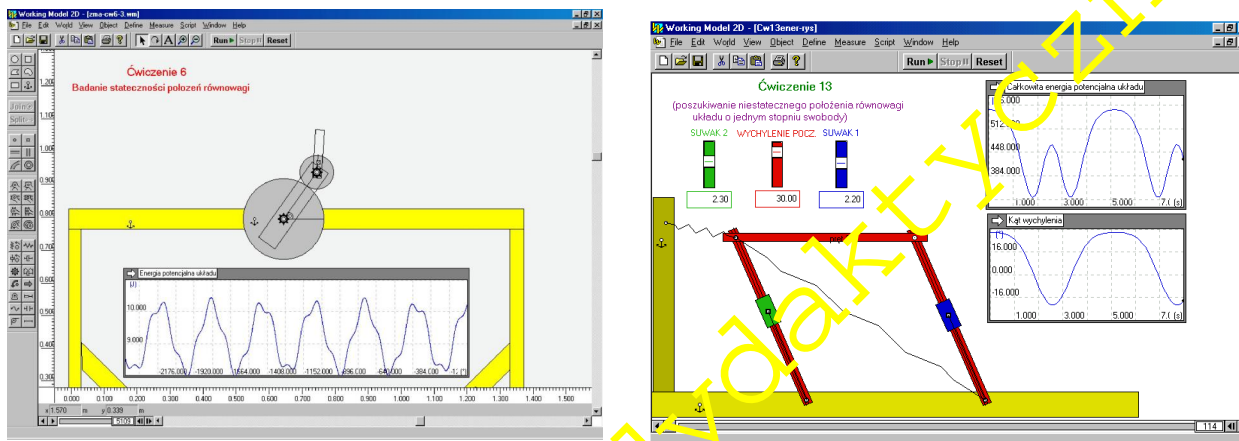
### 16.6. Badanie stateczności położenia równowagi z wykorzystaniem programów Mathematica i Working Model

Specjalna procedura napisana dla systemu *Mathematica* może być wykorzystana do wyznaczenia przebiegu energii potencjalnej układu w funkcji kąta  $j$ . Taka procedura pozwala na rozszerzenia zakresu analizy prowadzonej w tym ćwiczeniu i umożliwia wyznaczenie położenia równowagi i określenie stateczności tych położenia.

Eksperyment przeprowadzony na stoisku doświadczalnym można uzupełnić poprzez obserwację zachowania modelu wirtualnego badanego układu utworzonego w systemie *Working Model*. Analiza zachowania układu w systemie *Working Model* przebiega w następujący sposób:

- W oknie edytora graficznego programu *Working Model* należy narysować model układu i wprowadzić wartości parametrów przyjętych w badaniach doświadczalnych.
- Przeprowadzić eksperymenty na modelu wirtualnym, polegające na obserwowaniu ruchu układu dla zadanych położenia początkowych.

Na rysunku 16.12 zostały pokazane ekrany programu *Working Model* z widocznymi modelami badanych mechanizmów oraz przebiegiem zmian energii potencjalnej układu (w zależności od położenia mechanizmu).



Rys. 16.12. Modele wirtualne układów i przebiegi zmian energii potencjalnej w czasie

## 16.7. Opracowanie wyników pomiarów i sprawozdanie

### 16.7.1. Sprawozdanie

W sprawozdaniu należy zamieścić:

- wyznaczone doświadczalne położenia równowagi ( $j_i$ ) i odpowiadające im rodzaje równowagi (tabela 16.1),
- zestawienia wyników pomiarów doświadczalnych i obliczeń teoretycznych (tabele 16.2 i 16.3),
- wykresy charakterystyk sprężyn otrzymane na podstawie pomiarów wydłużeń (tabela 16.4),
- wykresy energii potencjalnej w funkcji kąta  $j$  (dla obu badanych układów),
- obserwacje i wnioski wynikające z przeprowadzonych eksperymentów.

## 16.8. Pytania sprawdzające

- Co to jest położenie równowagi?
- Scharakteryzować rodzaje równowagi ciała.
- Jakie twierdzenia pozwalają określić położenie równowagi w potencjalnym polu sił?
- Podać zależności, które wykorzystuje się do obliczenia energii potencjalnej sił sprężystych i grawitacyjnych?
- Narysować przykładowy wykres energii potencjalnej i omówić charakterystyczne punkty.
- Dlaczego położenia równowagi dla badanych w ćwiczeniu układów są wyznaczane numerycznie?
- Co to jest model fizyczny i model matematyczny układu mechanicznego?