

Ćwiczenie 17

MASZYNY PROSTE - WIELOKRAŻKI

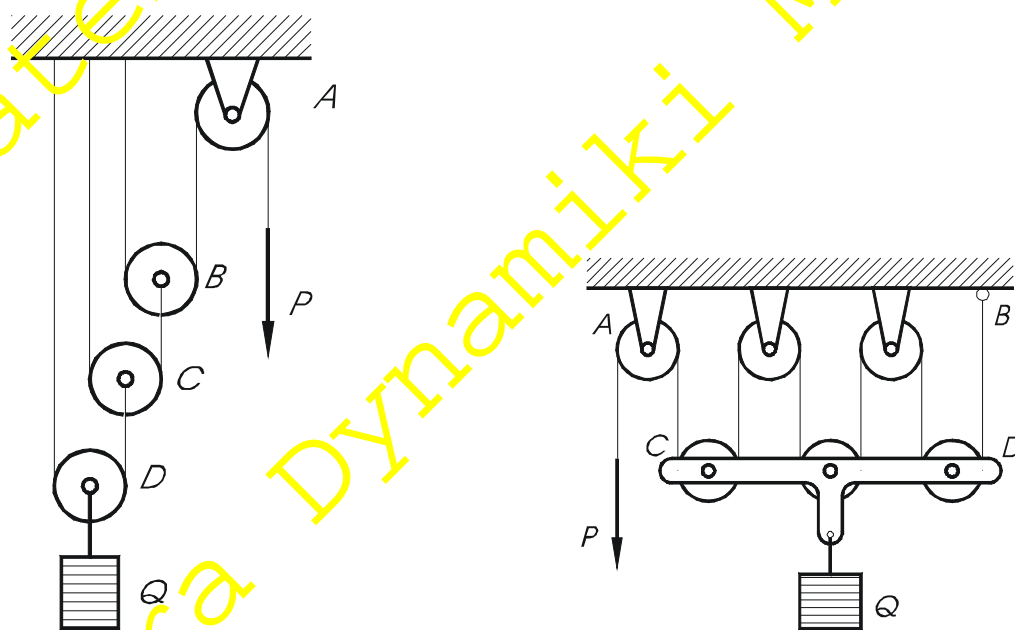
17.1. Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest teoretyczne i doświadczalne wyznaczenie sił w linach wielokrażka znajdującego się w położeniu równowagi i określenie sprawności wielokrażka.

17.2. Wprowadzenie

Obiektem badań jest układ mechaniczny składający się z kół o osiach nieruchomych i ruchomych opasanych linami. Układ taki nazywany jest wielokrażkiem.

Rozpatrywany układ może pozostawać w równowadze lub poruszać się w płaszczyźnie pionowej (układ ma jeden stopień swobody). Pomiary dokonywane na stanowisku badawczym polegają na poszukiwaniu obciążeń w położeniu równowagi układu.



Rys. 17.1. Wielokrażki: potęgowy i sumacyjny

Wyniki pomiarów są porównywane z rezultatami obliczeń otrzymanych na podstawie analizy statycznej przeprowadzonej dla modelu fizycznego badanego układu.

17.3. Teoretyczny opis zjawiska

Położeniem równowagi statycznej nazywa się takie położenie, w którym układ znajduje się przez dowolnie długi czas, jeżeli w chwili początkowej znajdował się on w tym położeniu, a prędkości wszystkich jego punktów były równe zeru.

Równania równowagi układu mechanicznego można otrzymać w różny sposób – na przykład na podstawie:

- analizy układu sił czynnych i reakcji więzów działających na układ i na poszczególne ciała należące do układu (*działające siły muszą spełniać warunki równowagi*),
- twierdzenia o energii potencjalnej (*dla układów zachowawczych w położeniu równowagi energia potencjalna spełnia warunki konieczne do istnienia jej ekstremum*),
- zasady prac przygotowanych (*dla układów o więzach idealnych suma prac przygotowanych na przemieszczeniach wirtualnych jest równa zeru*),
- sił uogólnionych (*przyjmujących zerowe wartości w położeniu równowagi*).

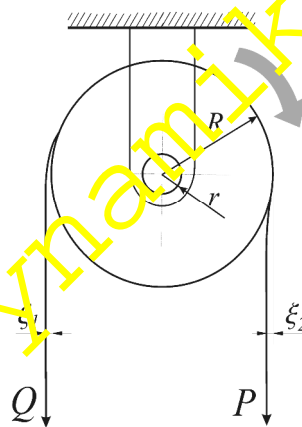
17.4. Analiza modelu fizycznego badanego układu

Wielokrążek może być rozpatrywany jako układ złożony z krążków osadzonych w idealnych łożyskach oraz idealnie wiotkich lin. Taki model wielokrążka nie pozwala na precyzyjny opis zachowanie rzeczywistego układu.

Dla modelu idealnego równowaga wielokrążka jest możliwa tylko dla jednej wartości siły przyłożonej do liny. W układzie rzeczywistym wielokrążek pozostaje w spoczynku dla pewnego zakresu wartości siły przyłożonej do liny. Przyczyną tego są opory ruchu krążka oraz pewna sztywność liny przy jej zaginaniu i prostowaniu.

17.4.1. Wpływ sztywności liny na zginanie na sprawność wielokrążka

Jeżeli lina opasuje koło i będziemy starali się obrócić koło ciągnąc lina za jeden koniec z siłą P , to lina przybierze postać jak wskazuje rys. 17.2 (po lewej stronie krążka jest pokazana część liny wchodzącej na koło, po prawej zaś stronie część liny schodzącej z koła). Taka właściwość odchylenia się liny spowodowana jest **sztywnością giętą** liny.



Rys. 17.2. Odkształcenie liny na krążku

W obliczeniach rzeczywistych układów można uwzględnić odchylenia liny od prostej stycznej do krążka. Oznaczając przez ξ_1 i ξ_2 wielkości tych odchyżeń, można określić sumę momentów sił obciążających końce liny względem osi koła jako

$$Q(R + x_1) - P(R - x_2) = 0. \quad (17.1)$$

Stąd wynika, że wartość siły P , potrzebnej do utrzymania krążka w równowadze jest określona wzorem

$$P = Q \frac{R + x_1}{R - x_2}. \quad (17.2)$$

Łatwo zauważyć, że $P > Q$, to jest, że siła „czynna” musi być większa od siły „biernej”.

Wielkości ξ_1 i ξ_2 wyznaczyć można tylko drogą doświadczalną.

Wzór (17.2) uprości się, jeśli przyjmiemy (zgodnie z doświadczeniem), że odciłyenia ξ_1 i ξ_2 posiadają bardzo małe wartości w stosunku do promienia R i niewiele różnią się między sobą. Przyjmując $\xi_1 = \xi_2 = \xi$ otrzymuje się

$$P = Q \left(\frac{R+x}{R-x} \right). \quad (17.3)$$

Dalsze uproszczenie wzoru jest możliwe po dokonaniu rozwinięcia wyrażenia $\frac{R+x}{R-x}$ w szereg Taylora, a następnie pominięciu składników nieliniowych

$$\frac{R+x}{R-x} = 1 + 2\left(\frac{x}{R}\right) + 2\left(\frac{x}{R}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{R}\right)^3 + \dots \quad (17.4)$$

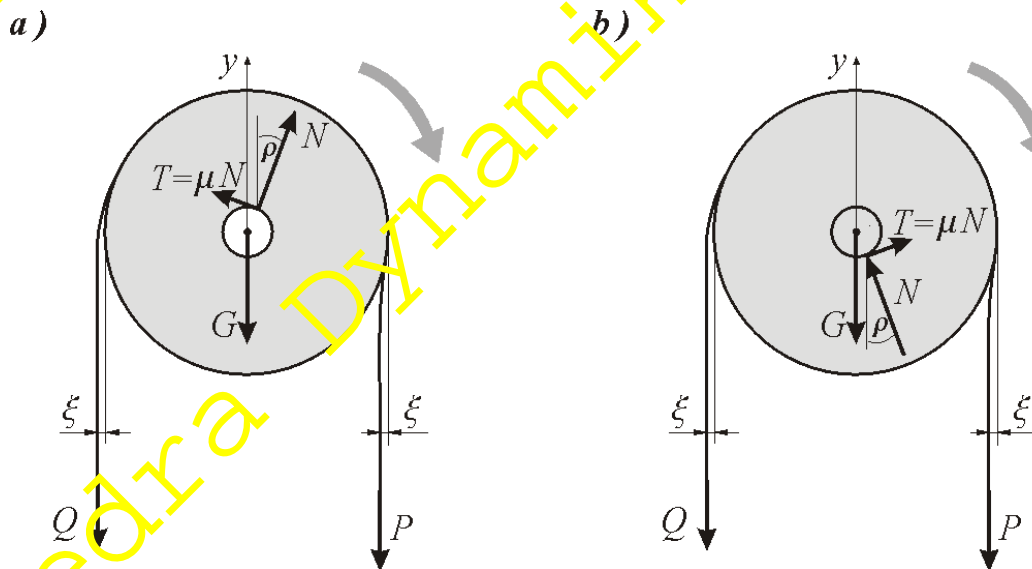
Odrzucając składniki zawierające ξ w drugiej i wyższych potęgach jako bardzo małe wartości, otrzymuje się wzór

$$P = Q \left(1 + \frac{2x}{R} \right). \quad (17.5)$$

Doświadczenia wykazały, iż wartości ξ zależą od materiału, z jakiego dana lina jest zrotowana i od jej średnicy. Na przykład dla lin konopnych wartości ξ mieści się w zakresie od $\xi = 0,03 d^2$ do $\xi = 0,09 d^2$, gdzie d oznacza średnicę przekroju liny wyrażoną w centymetrach (cm).

17.4.2. Wpływ tarcia w czopie i sztywności liny na zginanie na sprawność pojedynczego krążka

Rozpatrzmy teraz przypadek, gdy ciągnąca siła P podnosi ciężar Q za pomocą liny, przerzuconej przez krążek o promieniu R , ciężarze G , który może się obracać wokół nieruchomej osi o promieniu r , z tym, że uwzględnione będzie tarcie w czopie i sztywność liny. Na rys. 17.3 są pokazane siły działające na krążek.



Rys. 17.3. Siły działające na krążek podparty w łożysku ślizgowym:

a) krążek osadzony na nieruchomej osi, b) krążek z wałkiem osadzonym w łożysku

W położeniu spoczynku suma momentów sił względem bieguna, który został obrany w środku krążka równa się zero, zatem

$$Q(R+x) - P(R-x) + mNr = 0. \quad (17.6)$$

Wielkość siły N wyznaczmy na podstawie sumy rzutów wszystkich sił działających na krążek na oś pionową

$$-Q + N \cos r - P - G + mN \sin r = 0 \quad (17.7)$$

skąd, po wykorzystaniu związku $\mu = \tan r$ i przekształceniu otrzymuje się zależność

$$N = (Q + P + G) \cos r \quad (17.8)$$

Po wstawieniu do równania (17.6) zależności (17.8) i wykorzystaniu przybliżenia $\cos r \approx 1$ (które jest dopuszczalne dla małych kątów r , podobnie jak przybliżenie $m = \tan r \approx \sin r$), uzyskuje się równanie

$$Q(R+x) - P(R-x) + m(Q+G+P)r = 0 \quad (17.9)$$

Podstawiając $\xi = kd^2$, gdzie k oznacza współczynnik określony na podstawie badań przeprowadzanych dla lin¹ (d oznacza średnicę przekroju liny), otrzymuje się

$$Q(R + kd^2 + mr) - P(R - kd^2 - mr) + mGr = 0 \quad (17.10)$$

skąd

$$P = Q \frac{R + kd^2 + mr}{R - kd^2 - mr} + G \frac{mr}{R - kd^2 - mr} \quad (17.11)$$

W przypadku, gdy ciężar krążka G ma małą wartość w porównaniu z obciążeniem Q oraz, gdy licznik ułamka przy G jest mały w porównaniu z licznikiem ułamka przy Q , to cały wyraz zawierający ciężar G można pominąć. Wówczas

$$P \approx Q \frac{R + kd^2 + mr}{R - kd^2 - mr} \quad (17.12)$$

Oznaczając ułamek $\frac{R + kd^2 + mr}{R - kd^2 - mr}$ symbolem c i rozwijając go w szereg względem k , a następnie względem r , otrzymuje się (po pominięciu wyrazów zawierających $r^2, k^2, r^3, k^3 \dots$)

$$c = \frac{R + kd^2 + mr}{R - kd^2 - mr} \approx 1 + \frac{2mr}{R} + \frac{2kd^2}{R} + \frac{4k m r d^2}{R^2} \quad (17.13)$$

Wielkość c jest nazywana **współczynnikiem oporu tarcia i sztywności lin** dla układu lina-krążek (wartość współczynnika $c > 1$).

Podstawiając (17.13) do (17.12) otrzymuje się wzór określający przybliżoną wartość siły P , która jest potrzebna do pokonania oporów w układzie lina-krążek i podniesienia ciała o ciężarze Q

$$P \approx Q \quad c = Q \left(1 + \frac{2mr}{R} + \frac{2kd^2}{R} + \frac{4k m r d^2}{R^2} \right) \quad (17.14)$$

Sprawność układu (oznaczenie h) określa stosunek mocy uzyskanej (N_u) z układu do mocy doprowadzonej albo włożonej do układu (N_w).

Sprawność pojedynczego krążka – wobec jednakowej prędkości liny po obu stronach krążka – może być wyrażona przez stosunek wartości siły po stronie biernej (Q) do wartości siły po stronie czynnej (P)

$$h = \frac{N_u}{N_w} = \frac{Qv}{Pv} = \frac{Q}{P} \quad (17.15)$$

¹ Dla lin konopnych wartość współczynnika k mieści się w zakresie od 0,03 do 0,09 ($k = 0,03 \dots 0,09$)

Innymi słowy sprawność krążka można określić jako stosunek obciążenia czynnego dla krążka idealnego ($Q = P_{ideal}$) do obciążenia czynnego dla krążka rzeczywistego ($P = P_{rzecz}$)

$$h = \frac{P_{ideal}}{P_{rzecz}} \quad (17.16)$$

Wykorzystując wzór (17.14) określający przybliżoną wartość siły P sprawność pojedynczego krążka można wyznaczyć na podstawie współczynników charakteryzujących sztywność liny i tarcie włożysku ślizgowym

$$h = \frac{Q}{P} \cong \frac{1}{c} = 1 - \frac{2mr}{R} - \frac{2kd^2}{R^2} + \frac{4kmr d^2}{R^2} \quad (17.17)$$

17.4.3. Przełożenie i sprawność wielokrążka

Dla układu krążków (wielokrążka) wprowadzamy wielkości nazywane przełożeniem wielokrążka idealnego i przełożeniem wielokrążka rzeczywistego.

Przełożeniem wielokrążka idealnego nazywa się wielkość określoną stosunkiem prędkości liny po stronie czynnej (v_{cz}) do prędkości liny po stronie biernej (v_b)

$$i = \frac{v_{cz}}{v_b} \quad (17.18)$$

Przełożeniem siły dla wielokrążka idealnego będziemy nazywać wielkość określoną stosunkiem wartości obciążenia czynnego wielokrążka idealnego (P_{ideal}) do obciążenia biernego (Q)

$$a_{ideal} = \frac{P_{ideal}}{Q} \quad (17.19)$$

Przełożenie siły dla wielokrążka rzeczywistego jest określone na podstawie rzeczywistej siły czynnej (P_{rzecz})

$$a_{rzecz} = \frac{P_{rzecz}}{Q} \quad (17.20)$$

Do określenia **sprawności wielokrążka** konieczna jest znajomość prędkości odpowiednich punktów układu, a właściwie stosunku prędkości podnoszonego ciężaru (v_Q), a więc po stronie biernej, do prędkości końca liny po stronie czynnej (v_P)

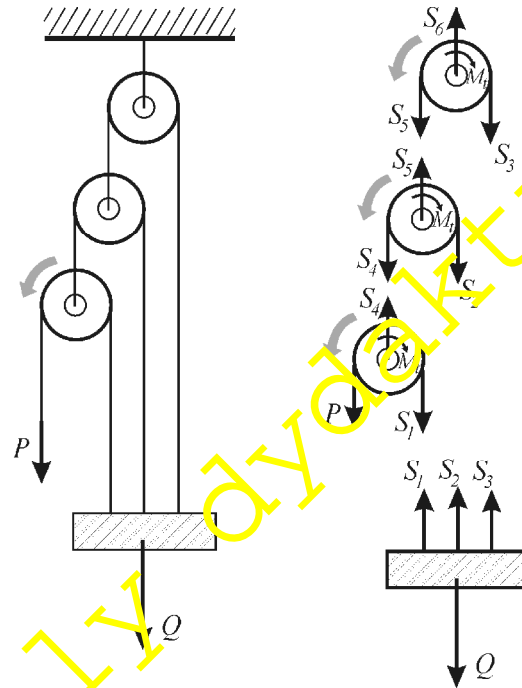
$$h_w = \frac{N_u}{N_w} = \frac{Q v_Q}{P v_P} \quad (17.21)$$

Sprawność wielokrążka można określić stosunkiem rzeczywistego przełożenia siły do przełożenia idealnego siły

$$h_w = \frac{a_{ideal}}{a_{rzecz}} = \frac{P_{ideal}}{P_{rzecz}} \quad (17.22)$$

Przykład wyznaczania sprawności dla układu krążków

Pokażemy teraz, jak dla przykładowego układu krążków – przedstawionego na rysunku 17.4 – obliczyć przełożenie sił oraz sprawność tego mechanizmu przy podnoszeniu ciała o ciężarze Q . Zakładamy przy tym, że dla każdego krążka i opasującej go liny znane są wartości m , r , k , d , to jest, że można wyznaczyć współczynniki c dla poszczególnych krążków i opasujących je lin.



Rys. 17.4. Układ krążków

Oznaczając przez S_1 do S_6 siły w przekrojach lin, tak jak pokazano na rys. 17.4 i rozpatrując równowagę poszczególnych ciał można napisać następujące równania:

$$P + S_1 = S_4,$$

$$S_4 + S_2 = S_5,$$

$$S_1 + S_2 + S_3 = Q.$$

Wykorzystując wartości c_i charakteryzujące poszczególne krążki można podać zależności:

$$P = c_1 S_1,$$

$$S_4 = c_2 S_5,$$

$$S_5 = c_3 S_3.$$

Z podanych sześciu równań można wyrugować pięć wielkości (S_1, S_2, \dots, S_5); pozostanie jedno równanie, określające zależność pomiędzy siłami P i Q . Ma ono postać

$$P = \frac{c_1 c_2 c_3}{1 + c_1 + c_2 + c_3 + c_1 c_2 + c_1 c_3 + c_2 c_3} Q.$$

Jeśli mamy do czynienia z jednakowymi krążkami, to $c_1 = c_2 = c_3 = c$ – w takim przypadku

$$P = \frac{c^3}{1 + 3c + 3c^2} Q.$$

Zakładając, że układ jest idealny (to jest pomijając tarcie w łożyskach i przyjmując, że lina jest doskonale wiotka) należy podstawić $c_1 = c_2 = c_3 = 1$ – wówczas uzyskuje się wynik

$$P = \frac{1}{1 + 3 + 3} Q = \frac{1}{7} Q = 0,142857 Q.$$

Dla układu rzeczywistego, na przykład dla wartości $c = 1,06$ otrzymuje się

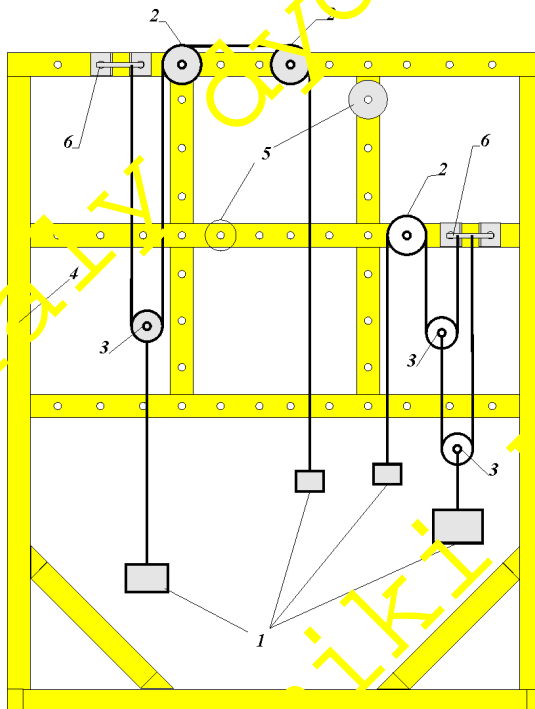
$$P = 0,1577 Q .$$

Bez rozpatrywania kinematyki układu na podstawie wzoru (17.22) można wyznaczyć sprawność rozpatrywanego wielokrażka jako

$$h_w = \frac{P_{ideal}}{P_{rzecz}} = \frac{0,1428}{0,1577} = 0,905 .$$

17.5. Opis stanowiska badawczego

Stanowisko badawcze przedstawione jest na rys. 17.5. W jego skład wchodzi: obciążniki (1), kółka stałe (2), kółka ruchome (3), rama (4), kółka pomocnicze (5), uchwyty lin (6).



Rys. 17.5. Schemat stanowiska badawczego

Przykładowe układy wielokrażków zostały przedstawione w tabeli 17.1 (pogrubiona linia pozioma na końcu liny oznacza ostoję, do której zamocowana jest lina). Prowadzący zajęcia ustala, który układ wielokrażków będzie badany. Zespół studentów wykonujący ćwiczenie otrzymuje zestaw bloczków, obciążniki i linki pozwalające na wykonanie odpowiedniego układu wielokrażków.

Tabela 17.1. Przykładowe układy wielokrażków

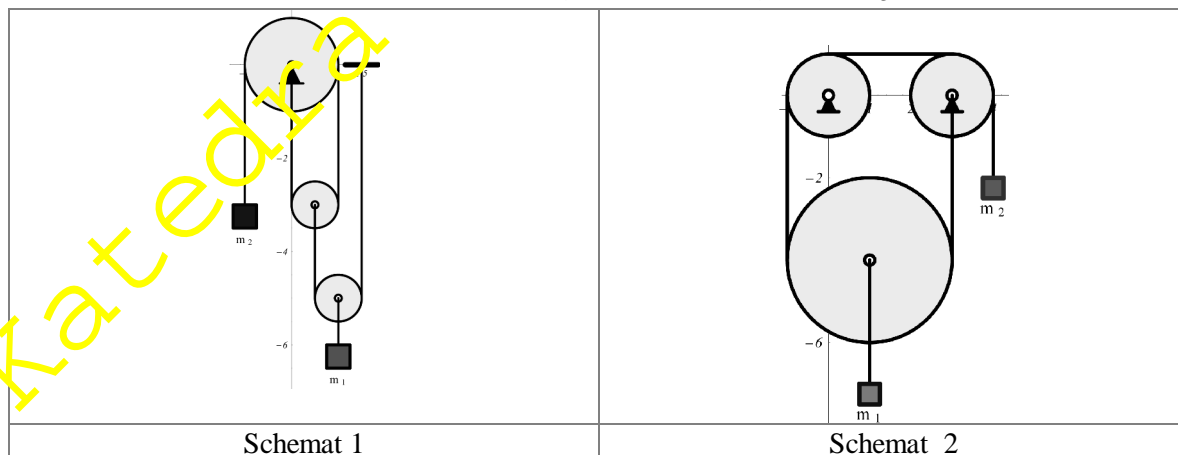


Tabela 17.1. - c.d.

<p>Schemat 3</p>	<p>Schemat 4</p>
<p>Schemat 5</p>	<p>Schemat 6</p>
<p>Schemat 7</p>	<p>Schemat 8</p>
<p>Schemat 9</p>	<p>Schemat 10</p>

17.6. Przebieg pomiarów

W tabeli 17.2 notowane są wartości sił obciążających końce liny opasującej pojedynczy krążek. Pomiarów wykonywane są dla jednej liny przy różnych obciążeniach po stronie biernej i czynnej.

Tabela 17.2. Wyniki badań doświadczalnych krążka stałego dla liny o średnicy $d = \dots\dots mm$

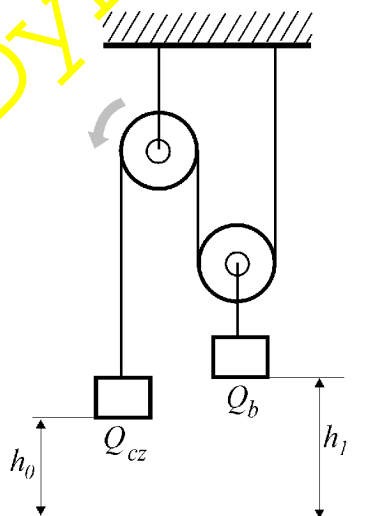
Lp	Masa po stronie biernej m_b	Siła po stronie biernej $Q_b = g m_b$	Masa po stronie czynnej m_{cz}	Siła po stronie czynnej $Q_{cz} = g m_{cz}$	Sprawność $h = \frac{Q_b}{Q_{cz}} 100$
--	kg	N	kg	N	%
1					
2					
3					
4					
5					
6					

W tabeli 17.3 zapisywane są wartości siły czynnej dla liny opasującej pojedynczy krążek, przy stałym obciążeniu biernym. Pomiarów dokonywane są dla *czterech* lin o różnych średnicach.

Tabela 17.3. Wyniki badań doświadczalnych krążka stałego dla obciążenia biernego $Q_b = \dots\dots N$

Lp	Średnica liny opasującej krążek d	Masa po stronie czynnej m_{cz}	Siła po stronie czynnej $Q_{cz} = m_{cz} g$	Sprawność $h = \frac{Q_b}{Q_{cz}} 100$
--	mm	kg	N	%
1				
2				
3				
4				

W tabeli 17.4 notowane są wartości sił obciążających układ (po stronie czynnej i biernej) dla układu złożonego z dwóch krążków – jednego ruchomego i jednego nieruchomego (rys. 17.6). Ponadto mierzone są przemieszczenia punktów przyłożenia siły czynnej i siły biernej. Pomiarów dokonywane są dla jednej liny.



Rys. 17.6. Układ dwóch krążków

Tabela 17.4. Wyniki badań doświadczalnych dwóch krążków dla liny o średnicy $d = \dots\dots mm$

Lp	Siła po stronie czynnej Q_{cz}	Siła po stronie biernej Q_b	Przemieszczenie h_0 punktu przyłożenia siły Q_{cz}	Przemieszczenie h_1 punktu przyłożenia siły Q_b	Sprawność $h = \frac{h_1 Q_b}{h_0 Q_{cz}} 100$
--	N	N	m	m	%
1					
2					
3					
4					
5					
6					

W tabeli 17.5 wpisywane są wartości sił obciążających wielokrążek o układzie krążków zgodnym z zadaniem schematem (wielokrążek naszkicowany w tabeli 17.1). Ponadto są mierzone i zapisywane w tabeli przemieszczenia (h_0) punktu przyłożenia siły czynnej (Q_{cz}) i przemieszczenia (h_1, h_2) punktów przyłożenia sił biernych (Q_{b1}, Q_{b2}). Pomiaru dokonywane są dla jednej liny.

Tabela 17.5. Wyniki badań doświadczalnych wielokrążka dla liny o średnicy $d = \dots\dots mm$

Lp	Siła po stronie czynnej Q_{cz}	Siła po stronie biernej Q_{b1}	Siła po stronie biernej Q_{b2}	Przemieszczenie h_0 punktu przyłożenia siły Q_{cz}	Przemieszczenie h_1 punktu przyłożenia siły Q_{b1}	Przemieszczenie h_2 punktu przyłożenia siły Q_{b2}	Sprawność $h = \frac{h_1 Q_{b1} + h_2 Q_{b2}}{h_0 Q_{cz}} 100$
--	N	N	N	m	m	m	%
1							
2							
3							
4							
5							
6							

17.7. Opracowanie wyników pomiarów i sprawozdanie

W sprawozdaniu należy zamieścić:

- schemat badanego wielokrążka,
- wypełnione tabele 17.2 – 17.5,
- wykres sprawności w funkcji średnicy liny sporządzony na podstawie danych z tabeli 17.3,
- obserwacje i wnioski.

17.8. Pytania sprawdzające

- Co to jest przełożenie wielokrążka?
- Jaki efekt powoduje niezerowa sztywność giętą liny opasującej krążek?
- Jak modelowany jest wpływ tarcia w łożysku ślizgowym?
- Jak określa się sprawność pojedynczego krążka?
- Jak wyznacza się sprawność wielokrążka?