

TARCIE CIĘGIEN O POWIERZCHNIĘ WALCOWĄ – WZÓR EULERA

18.1. Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest wyznaczenie statycznego współczynnika tarcia pomiędzy walcową powierzchnią ciała a opasującą je liną. Ponadto na drodze eksperymentalnej potwierdzana jest poprawność wzoru Eulera określającego graniczną wartość obciążenia końca cięgna opasującego nieruchome krążki.

18.2. Wprowadzenie

Przy rozpatrywaniu zachowania się lin, taśm, sznurów, pasów czy cięgien współpracujących z ciałami, względem których mogą się przesuwać (ślizgać), uwzględnia się siły tarcia działające na powierzchniach styku. Dzięki występowaniu sił tarcia, możliwe jest przenoszenie ruchu jednego ciała na drugie (tak jest w przypadku przekładni pasowych), zmniejszenie prędkości poruszającego się ciała i utrzymywanie ciała w położeniu równowagi (na przykład przy użyciu hamulca taśmowego).

W analizie zjawiska tarcia pomiędzy dwoma ciałami zwykle zakłada się, że współczynnik tarcia jest jednakowy na całej powierzchni styku. Współczynnik tarcia określony przy takim założeniu jest uśrednionym współczynnikiem tarcia.

Istnieją różne teorie pozwalające na modelowanie oddziaływań współpracujących ze sobą rzeczywistych ciał, charakteryzujących się, między innymi, chropowatością ich powierzchni. W przypadku gdy kontakt ciał jest bezpośredni – bez warstwy smarnej (tzw. kontakt suchy lub tarcie suche) – do opisu zjawiska często wykorzystywana jest metoda zaproponowana przez Coulomba.

Zgodnie z hipotezą Coulomba w miejscach kontaktu ciał, w których występuje względne ich przesunięcie powstaje siła tarcia rozwiniętego. Siła tarcia (składowa styczna reakcji wzajemnego oddziaływania ciał) ma następujące własności:

- wartość graniczna siły tarcia jest proporcjonalna do składowej normalnej reakcji ($T_{gr} = \mu_s N$),
- wartość siły tarcia nie zależy od wielkości powierzchni styku ani względnej prędkości ciał.

Ponadto:

- wartość współczynnika tarcia zależy od własności materiału stykających się ciał oraz stanu ich powierzchni.

Hipoteza Coulomba jest wykorzystywana między innymi do określenia sił działających w taśmach (a także cięgnach, pasach, linach) opasujących ciała.

Wprowadzona przez Eulera zależność ($S_2 = S_1 e^{m\alpha}$) określa graniczną wartość siły S_2 w taśmie po jednej stronie ciała opasanego w zależności od siły S_1 po drugiej stronie oraz współczynnika tarcia m i kąta opasania ciała α . Wzór Eulera dotyczy ciał o walcowych powierzchniach opasania.

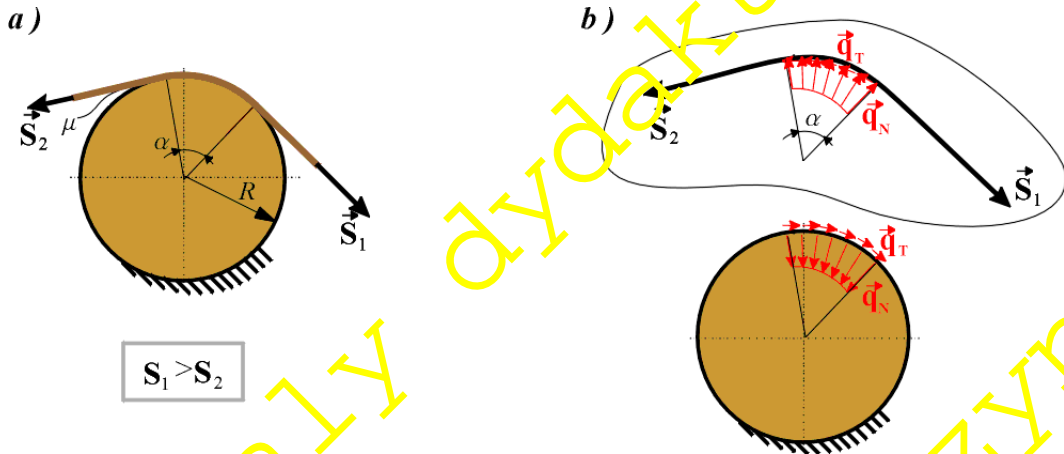
Objektem badań w opisywanym ćwiczeniu jest układ mechaniczny składający się z nieruchomych kół (krążków) opasanych wiotką liną. Przyprowadzane pomiary sił, działających na końcach liny w granicznym położeniu równowagi, pozwalają na wyznaczenie uśrednionego współczynnika tarcia pomiędzy liną a kołem.

Dla określonych tą metodą wartości współczynnika tarcia (μ_s) wyznacza się – na podstawie wzoru Eulera – wartość siły granicznej w nieruchomej linie opasującej układ kół. Wyniki otrzymane na drodze eksperymentalnej są porównywane z wynikami obliczeń.

18.3. Teoretyczny opis zjawiska

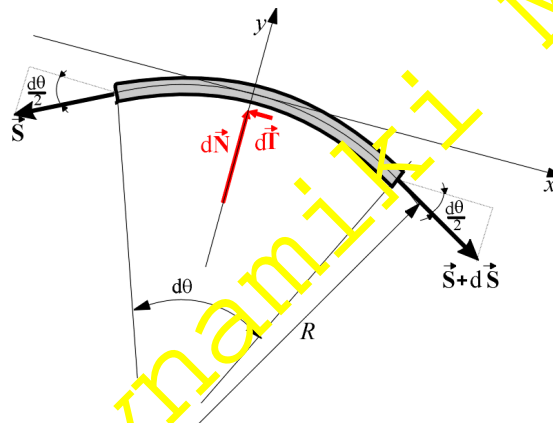
18.3.1. Wyprowadzenie wzoru Eulera

Sily zewnętrzne działające na taśmę są pokazane na rys. 18.1a, natomiast na rys. 18.1b są przedstawione dodatkowo reakcje wzajemnego oddziaływania pomiędzy walcem a taśmą. Reakcje te zostały przedstawione jako obciążenia ciągłe: normalne (q_N) i styczne (q_T) do powierzchni styku ciał.



Rys. 18.1. Taśma opasująca nieruchomy walec (a) i sily działające na taśmę oraz na walec (b)

Przy wyprowadzaniu wzoru Eulera należy rozpatrzyć równowagę nieskończenie małego (elementarnego) wycinka taśmy - przedstawionego na rys. 18.2.



Rys. 18.2. Sily działające na nieskończenie mały wycinek taśmy

Równania równowagi sił działających na nieskończenie mały wycinek taśmy (rys. 18.2) mają postać:

$$x: (S + dS) \cos \frac{dq}{2} - S \cos \frac{dq}{2} - m dN = 0, \quad (18.1)$$

$$y: dN - (S + dS) \sin \frac{dq}{2} - S \sin \frac{dq}{2} = 0. \quad (18.2)$$

Po redukcji i podstawieniu $dF = m dN$

$$x: dS \cos \frac{dq}{2} - m dN = 0, \quad (18.3)$$

$$y: dN - (2S + dS) \sin \frac{dq}{2} = 0. \quad (18.4)$$

Dla kąta $dq \rightarrow 0$ można przyjąć: $\sin \frac{dq}{2} \cong \frac{dq}{2}$, $\cos \frac{dq}{2} \cong 1$, stąd:

$$dS - m dN = 0, \quad (18.5)$$

$$dN - S dq + dS \frac{dq}{2} = 0. \quad (18.6)$$

Iloczyn $dS \frac{dq}{2}$ można pominąć (jako wielkość mniejszą o jeden rząd od dq i dS). Wówczas

$$dS = m dN, \quad (18.7)$$

$$dN = S dq. \quad (18.8)$$

Podstawiając (18.7) do (18.8) możemy tę zależność przedstawić w formie

$$\frac{dS}{S} = m dq. \quad (18.9)$$

Po scałkowaniu otrzymuje się

$$\ln S = m q + c_1. \quad (18.10)$$

Stałą całkowania c_1 można wyznaczyć wykorzystując jeden z warunków:

$$q = 0 \Rightarrow S = S_2, \quad (18.11)$$

$$q = a \Rightarrow S = S_1. \quad (18.12)$$

Na podstawie (18.11) mamy

$$\ln S_2 = c_1, \quad (18.13)$$

a po podstawieniu do (18.10) i wykorzystaniu definicji logarytmu naturalnego otrzymuje się

$$S = S_2 e^{mq}. \quad (18.14)$$

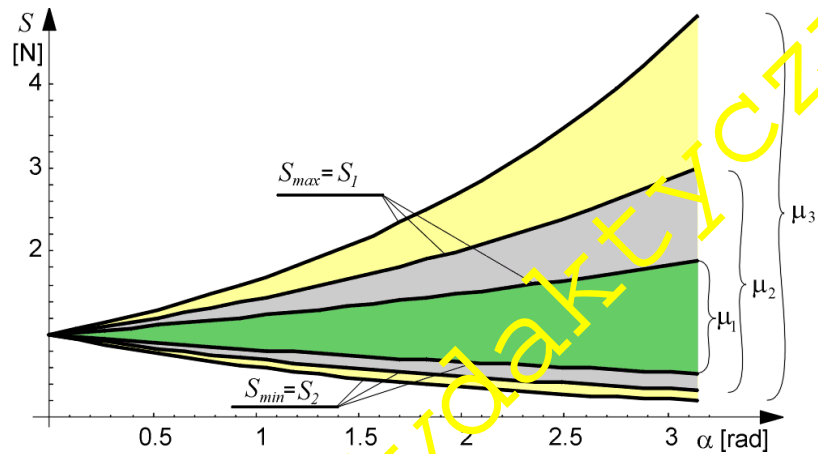
Siłę S_2 można wyznaczyć na podstawie (18.14) i warunku (18.12) jako

$$S_1 = S_{(q=a)} = S_2 e^{ma}, \quad (18.15)$$

a zależność pomiędzy obciążeniami na końcach taśmy przedstawić w formie

$$\frac{S_1}{S_2} = e^{r a}. \quad (18.16)$$

Dla zadanego obciążenia jednego końca taśmy (np. S_2) układ pozostaje w równowadze, jeśli drugi jej koniec jest obciążony siłą S ($S > S_2$), o wartościach z przedziału $S_2 \leq S \leq S_2 e^{ma}$ (przy czym jej wartość graniczna $S_1 = S_2 e^{ma}$). Obszary zmian siły S w zależności od kąta opasania α dla trzech różnych współczynników tarcia zostały przedstawione na rys. 18.3.



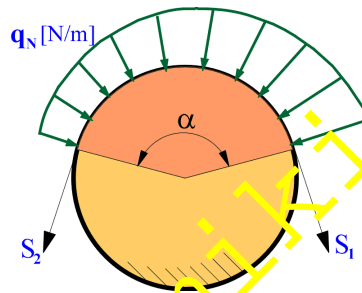
Rys. 18.3. Obszary równowagi taśmy przy różnych współczynnikach tarcia

W przypadku, gdy siła działająca na drugi koniec taśmy jest mniejsza od S_2 ($S < S_2$), to równowaga jest możliwa dla sił o wartościach należących do przedziału $S_2 e^{-\mu a} \leq S \leq S_2$ (wartość graniczna $S_1 = S_2 e^{-\mu a}$).

Na podstawie zależności (18.8) i (18.14) można określić rozkład wartości reakcji normalnej (nacisków na powierzchni walca i taśmy) jako

$$q_N = \frac{dN}{R dq} = \frac{S}{R} = \frac{S_2 e^{\mu q}}{R}. \quad (18.17)$$

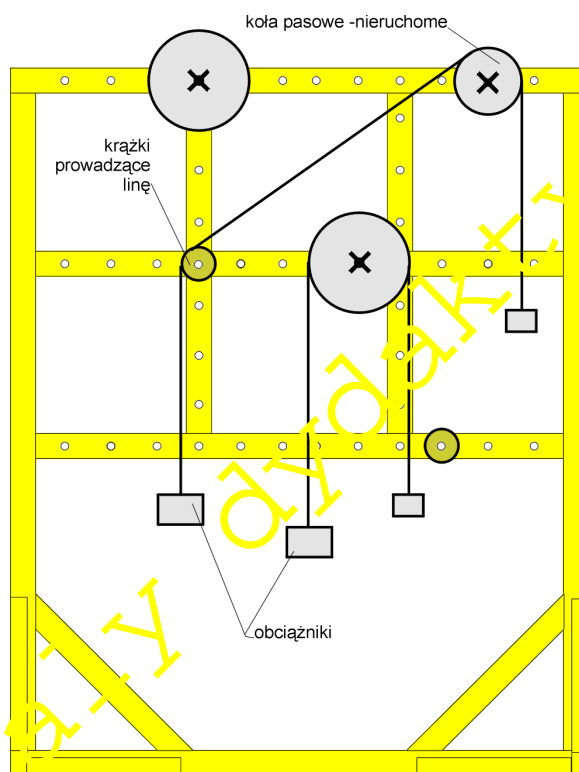
Przykładowy przebieg zmian nacisku taśmy na walec jest pokazany na rys. 18.4.



Rys. 18.4. Rozkład nacisków na powierzchni walca opasanego taśmą ($S_1 > S_2$)

18.4. Opis stanowiska badawczego

Widok stanowiska do badań jest przedstawiony na rys. 18.5.



Rys. 18.5. Stanowisko używane do wyznaczania granicznego obciążenia taśm opasującej nieruchome koło

Badany układ stanowią nieruchome koła, które są opasywane liną. Koła umieszczone są na ramie, przy czym ich położenie może być zmieniane.

Dzięki możliwości zmiany punktu zamocowania środka nieruchomych kół oraz krażków prowadzących linę można przeprowadzić pomiary przy różnych kątach opasania ciała. Przykłady różnych konfiguracji kół i opasującej je liny są pokazane na rys. 18.6.

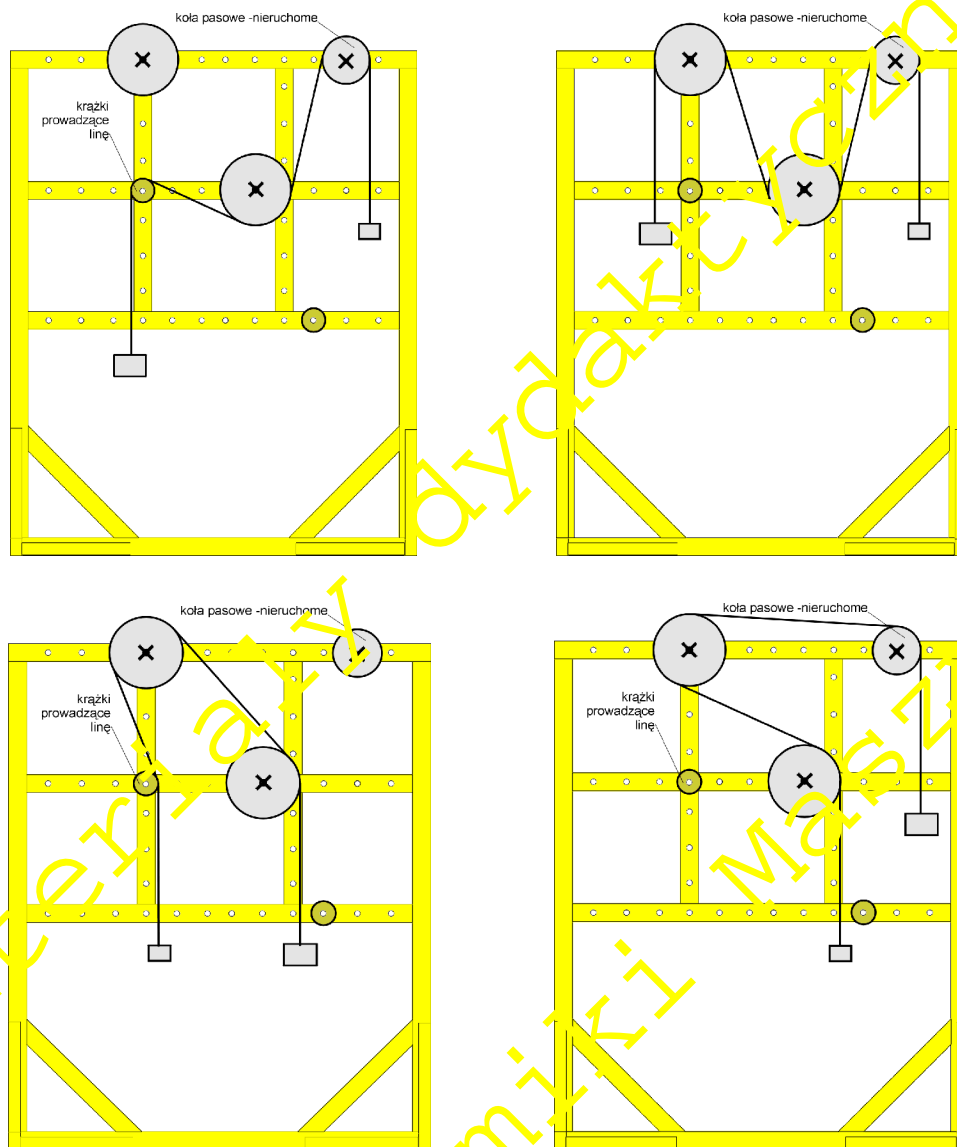
Na kołach nieruchomych umieszczone są wyskalowane tarcze pozwalające na odczytanie kąta opasania każdego z ciał.

Pomiary służące wyznaczeniu współczynników tarcia są przeprowadzane dla pojedynczych kół. Następnie, dla układu złożonego z kilku kół opasywanych jedną linką wyznaczana jest graniczna wartość obciążenia końca liny. Wartości otrzymane z pomiarów porównywane są z wartościami wyznaczonymi na podstawie wyprowadzonego przez Eulera wzoru (18.16).

Końce liny są obciążane w taki sposób, aby układ pozostawał w granicznym położeniu równowagi.

Szalki zamocowane na końcach linki umożliwiają zmianę obciążeń, a ruchome krażki pozwalają na zmianę kątów opasania poszczególnych kół. Pomiary dokonywane na stanowisku badawczym polegają na poszukiwaniu wartości granicznych obciążeń końca liny w położeniu równowagi układu.

Wyniki pomiarów są porównywane z rezultatami obliczeń prowadzonych na podstawie analizy równań równowagi i wzoru napisanego dla modelu fizycznego badanego układu. Parametry modelu fizycznego wyznaczane są na podstawie pomiarów.

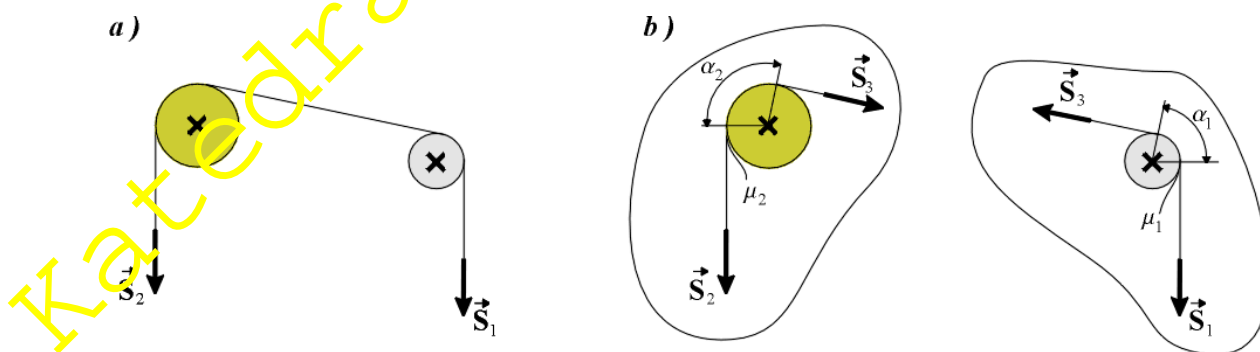


Rys. 18.6. Przykładowe konfiguracje kół i opasującej je liny

18.5. Analiza modelu fizycznego badanego układu

W przypadku, gdy badania dotyczą wyznaczania współczynnika tarcia pomiędzy liną a kołem, modelem jest układ pokazany na rys. 18.1 i opisany zależnością (18.16).

Przy badaniu polegającym na wyznaczeniu siły granicznej w linie opasującej dwa koła wykorzystywany jest model przedstawiony na rys. 18.7.



Rys. 18.7. Model układu złożonego z dwóch kół opasanych liną

Na podstawie wzoru (18.16) – przy założeniu, że $S_1 > S_2$, a w związku z tym $S_1 > S_3 > S_2$ – dla układów pokazanych na rys. 18.6b otrzymuje się zależności:

$$S_1 = S_3 e^{m_1 a_1} \quad \text{oraz} \quad S_3 = S_2 e^{m_2 a_2}, \quad (18.18)$$

z których uzyskuje się

$$S_1 = S_2 e^{m_2 a_2} e^{m_1 a_1}. \quad (18.19)$$

W przypadku, gdy współczynniki tarcia dla obu kół są równe ($m_1 = m_2 = m$), wzór (18.19) ma formę

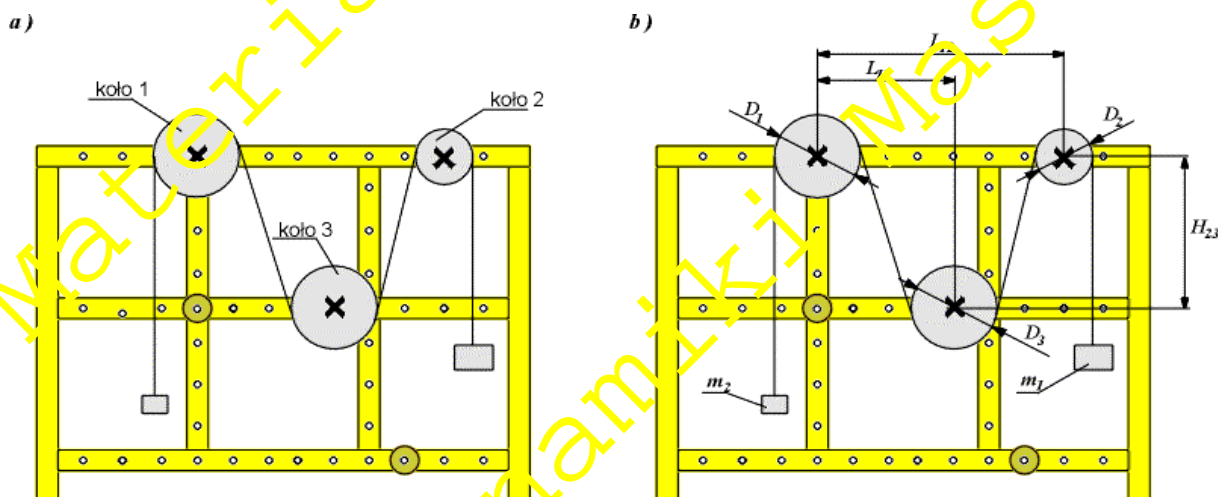
$$S_1 = S_2 e^{m(a_1 + a_2)}. \quad (18.20)$$

18.6. Przebieg pomiarów

Pomiary przeprowadzane są w dwóch etapach:

- 1) wyznaczenie współczynników tarcia pomiędzy liną a poszczególnymi kołami – zgodnie z opisem podanym w punkcie 18.6.1,
- 2) określenie granicznego obciążenia linii opasującej zestaw kół (których współczynniki tarcia zostały już wyznaczone) – zgodnie z opisem podanym w punkcie 18.6.2.

Przed przystąpieniem do pomiarów należy zaplanować konfigurację badanego układu (przykład układu złożonego z trzech kół jest pokazany na rys. 18.8a). Dla dokładnego określenia kątów opasania każdego z kół należy zmierzyć odległości pomiędzy kołami i średnice kół (zobacz rys. 18.8b).



Rys. 18.8. Schemat zaplanowanego układu (a) i parametry układu (b)

18.6.1. Wyznaczanie współczynnika tarcia pojedynczego koła przy stałym kącie opasania

Pomiary opisane w tym punkcie należy wykonać dla każdego koła badanego układu kół. Wyniki pomiarów należy wpisywać do tabeli 18.1 (osobna tabela dla każdego z kół).

Przebieg pomiarów:

- 1) Przełożyć linę przez wybrane koło – zanotować kąt opasania koła (α).
- 2) Na końcach linii zawiesić szalki - zanotować masę każdej szalki (odpowiednio m_1 i m_2).
- 3) Zwiększać obciążenie szalki o masie m_1 aż do momentu, gdy nastąpi poślizg linii. Zanotować wartość tej masy.

Uwaga: czas obserwacji linii niezbędny do stwierdzenia, czy lina porusza się, czy pozostaje w spoczynku nie powinien być mniejszy niż 10 sekund.

- 4) Obciąży szalkę o masie m_2 dodatkową masą Dm_2 . Zanotować całkowitą masę.
- 5) Czynności wymienione w punkcie 3 i 4 powtórzyć wielokrotnie.

Tabela 18.1. Wyznaczanie współczynnika tarcia pojedynczego koła przy stałym kącie opasania

Kolo - kąt opasania $a = \dots\dots\dots^\circ$ (..... rad)							
Lp (i)	m_1	$S_1 = m_1 g$	m_2	$S_2 = m_2 g$	S_1/S_2	$m_i = \frac{1}{a} \ln \frac{S_1}{S_2}$	$\bar{m} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i}{n}$
--	kg	N	kg	N	-	-	-
1							
2							
3							
...							
n							

$\sum_{i=1}^n m_i =$

18.6.2. Wyznaczanie siły granicznej dla układu kół przy stałym kącie opasania

Po wyznaczeniu współczynników tarcia dla wybranych kół przeprowadza się pomiary siły granicznej dla układu tych kół opasanych jedną linią. Wyniki pomiarów zapisywane są w tabeli 18.2.

Przebieg pomiarów:

- 1) Przełożyć linię przez wybrane koła – zanotować kąty opasania poszczególnych kół (a_1, a_2, \dots) i wymiary charakteryzujące badany układ (L_{12}, D_1, D_2, \dots).

Uwaga: kąty opasania można odczytać korzystając ze skali umieszczonej na kołach, a dodatkowo, wyznaczyć na podstawie wymiarów.

- 2) Na końcach linii zawiesić szalki - zanotować masę każdej szalki (odpowiednio m_1 i m_2).
- 3) Zwiększać obciążenie szalki o masie m_1 aż do momentu, gdy nastąpi poślizg linii. Zanotować wartość tej masy.
- 4) Obciążyć szalkę o masie m_2 dodatkową masą Dm_2 . Zanotować całkowitą masę.
- 5) Czynności wymienione w punkcie 3 i 4 powtórzyć wielokrotnie.

Tabela 18.2. Wyznaczanie siły granicznej dla układu kół

Lp (i)	m_1	$S_1 = m_1 g$	m_2	$S_2 = m_2 g$	S_1/S_2	$\overline{S_1/S_2}$	$(S_1/S_2)_{teor}$
--	kg	N	kg	N	-	-	-
1							
2							
3							
4							
...							
n							

$\sum_{i=1}^n (S_1/S_2)_i =$

18.7. Opracowanie wyników pomiarów i sprawozdanie

18.7.1. Opracowanie wyników pomiarów dla pojedynczego koła

Na podstawie wartości mas (m_1 i m_2), obciążających szalki w granicznym położeniu równowagi, należy wyznaczyć wartości siły na obu końcach liny (S_1 , S_2) oraz wartość współczynnika tarcia

$$m_i = \frac{1}{a} \ln \frac{S_1}{S_2} \quad (18.21)$$

Ponadto wyznacza się wartość średnią współczynnika tarcia (dla n pomiarów) jako

$$\bar{m} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i}{n} \quad (18.22)$$

Wyniki tych obliczeń wpisywane są w tabeli 18.1 (dla każdego koła jest jedna tabela).

18.7.2. Wyznaczenie niepewności pomiarów współczynnika tarcia m

Niepewność pomiaru będzie obejmowała tylko te składowe wygenerowane w czasie pomiaru zjawiska, które spostrzegł eksperymentator. Niepewność pomiaru w tym przypadku opisuje zależność

$$u_c(m) = S_m = \frac{S_m}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (m_i - \bar{m})^2} \quad (18.23)$$

gdzie:

$u_c(m)$ – niepewność pomiaru współczynnika tarcia,

n – liczba pomiarów,

m_i – wartość obliczonego współczynnika tarcia,

\bar{m} – wartość średnia współczynnika tarcia.

W celu wyznaczenia niepewności rozszerzonej U należy:

- przyjąć poziom ufności $p = 95\%$ ($\alpha = 0,05$),
- z tablicy 18.3 znaleźć wartość krytyczną zmiennej losowej Studenta t ,
- przyjąć współczynnik rozszerzenia $k = t$.

Wartość niepewności rozszerzonej wyznacza się z zależności:

$$U = k_{0,05;n} u_c(m) \quad (18.24)$$

Wynik pomiaru należy zapisać w postaci:

$$m = \bar{m} \pm U \quad (18.25)$$

Tabela 18.3. Wartości kwantyli zmiennej losowej t o rozkładzie Studenta

$n \backslash p$	0,90	0,95	0,975	0,990	0,995
1	3,078	6,314	12,71	31,82	63,66
2	1,886	2,920	4,303	6,96	9,925
3	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841
4	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604
5	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032
6	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707
7	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499
8	1,397	1,860	2,306	2,896	3,335
9	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250
10	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169

18.7.3. Opracowanie wyników pomiarów dla układu kół

W tabeli 18.2 zamieszczone są wyniki pomiarów siły granicznej dla układu kół opasanych liną. Wartości sił (S_1 i S_2) wyznacza się na podstawie wartości mas (m_1 i m_2), a następnie oblicza się iloraz tych sił $(S_1/S_2)_i$ – dla każdego z pomiarów. Dodatkowo wyznacza się wartość średnią tego ilorazu

$$\overline{S_1/S_2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{S_1}{S_2} \right)_i, \quad (18.26)$$

a także wartość teoretyczną otrzymaną na podstawie wzoru (18.20)

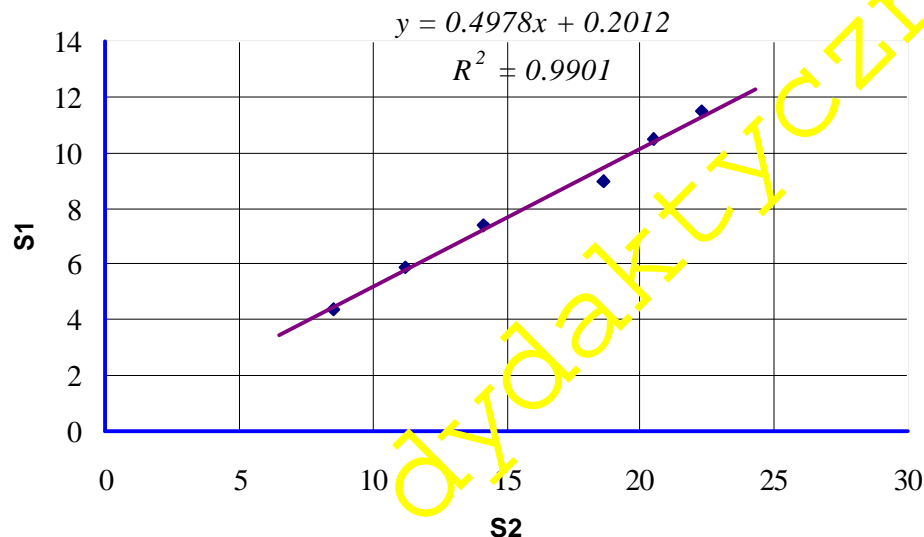
$$\frac{S_1}{S_2} = e^{m_1 a_1 + m_2 a_2 + \dots} \quad (18.27)$$

Wyniki otrzymane na drodze doświadczalnej, to znaczy wartość średnia ilorazu sił, określona na podstawie wzoru (18.26) są porównywane z rezultatami wynikającymi z wzoru Eulera (18.27).

18.7.4. Sprawozdanie

Sprawozdanie powinno zawierać:

- rysunek badanego układu,
- wypełnione tabele 18.1 i 18.2,
- wyniki pomiarów w formie wykresu ($S_1 = f(S_2)$) przedstawiającego zależność pomiędzy siłami na obu końcach liny (dla jednego koła) – w granicznym położeniu równowagi,
- krzywą regresji (w tym przypadku zależność jest liniowa),
- analizę niepewności pomiarów dla wybranego koła i podanie wyniku pomiarów współczynnika tarcia tego koła z uwzględnieniem niepewności,
- obserwacje i wnioski wynikające z przeprowadzonych badań.



Rys. 18.9. Przykładowy przebieg zmian $S_1 = f(S_2)$ z naniesioną linią regresji

18.8. Pytania sprawdzające

1. Dlaczego siły na końcach taśmy opasującej nieładki walec mają - w położeniu równowagi - różne wartości?
2. Czy:
 - a) opuszczanie ciężaru przy pomocy liny przerzuconej przez chropowaty walec jest sensowne?
 - b) podnoszenie ciężaru przy pomocy liny przerzuconej przez chropowaty walec jest sensowne?
3. Wyznaczyć wartość siły jaka jest niezbędna do utrzymania ciała o masie 100 kg w równowadze, o ile wiadomo, że kąt opasania walca liną jest równy 180° , a współczynnik tarcia $\mu = 1/3, 14$.
4. Wyznaczyć minimalną wartość siły jaka jest potrzebna do podniesienia ciała o masie 100 kg, o ile wiadomo, że kąt opasania walca liną jest równy 180° , a współczynnik tarcia $\mu = 1/3, 14$.
5. Czym jest zasada działania hamulca taśmowego.