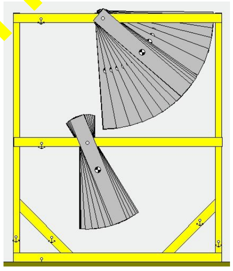


Ćwiczenie 19

WYZNACZANIE WARTOŚCI ENERGII ROZPRASZANEJ PODCZAS ZDERZENIA CIAŁ

19.1. Cel ćwiczenia

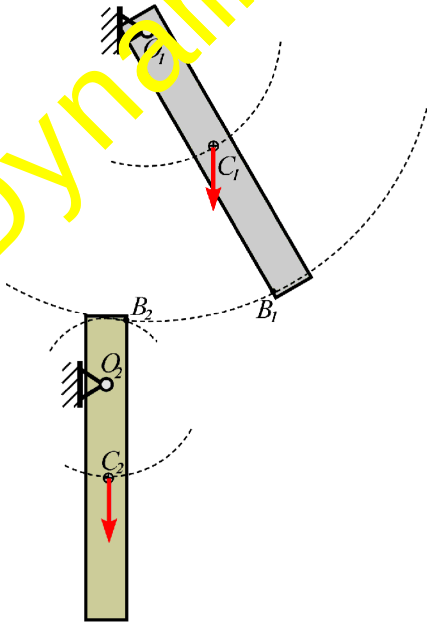
Celem ćwiczenia jest wyznaczenie wartości energii rozpraszanej podczas zderzenia ciał oraz współczynnika restytucji charakteryzującego własności zderzających się ciał.

19.2. Wprowadzenie

Omawiane tu zagadnienia dotyczą modelowania i analizy zjawiska zderzenia ciał nieswobodnych. Rozpatrywane są dwa ciała, które mogą poruszać się ruchem obrotowym wokół poziomej osi. Położenie ciał jest takie, że wychylenie jednego ciała z położenia równowagi, a następnie umożliwienie mu ruchu pod wpływem sił ciężkości, prowadzi do uderzenia ciała w drugie, będące w spoczynku. W czasie zderzenia ciał następuje strata energii mechanicznej układu. Chwilowe siły działające podczas zderzenia ciał wywołują też dodatkowe reakcje w łożyskach.

Matematyczny opis zjawiska, pozwala na wyznaczenie wartości energii rozpraszanej podczas zderzenia ciał. Jest to możliwe na podstawie znajomości prawa zmienności energii kinetycznej oraz hipotezy Newtona odnoszącej się do zderzenia ciał.

Stanowisko badawcze umożliwia przeprowadzenie pomiarów, które są podstawą do wyznaczenia: wartości energii rozpraszanej podczas zderzenia ciał oraz współczynnika restytucji dla badanych ciał. Dodatkowo, na drodze eksperymentalnej wyznaczany jest moment bezwładności ciała względem jego osi obrotu.



Rys. 19.1. Model fizyczny badanego układu

Autorzy ćwiczenia: **J. Grabski**, **J. Strzałko**

19.3. Teoretyczny opis zjawiska

Do analizy zjawisk towarzyszących zderzeniu ciał niezbędna jest znajomość następujących zagadnień:

- modelowanie zjawiska zderzenia (wykorzystujemy tu hipotezę Newtona),
- prawo zmienności energii kinetycznej,
- prawo zmienności pędu,
- prawo zmienności krętu.

Wykorzystanie prawa zmienności pędu i prawa zmienności krętu umożliwia wyznaczenie impulsów sił oddziaływania pomiędzy ciałami i impulsów reakcji łożysk. W tym ćwiczeniu impulsy reakcji nie będą rozpatrywane.

19.3.1. Modelowanie zjawiska zderzenia

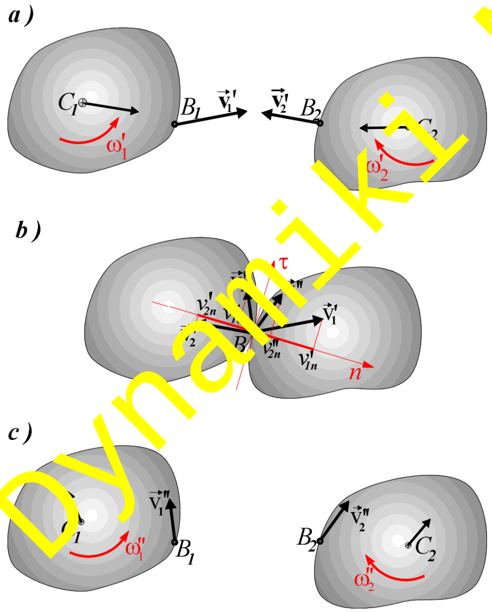
Przytoczymy tu niektóre pojęcia i hipotezy wykorzystywane w modelowaniu zjawiska zderzenia ciał.

Normalna uderzenia jest to prosta prostopadła do płaszczyzny stycznej do ciał w punkcie, w którym następuje zderzenie. Symbolem n będzie dalej oznaczona oś o kierunku normalnej uderzenia.

Zgodnie z *hipotezą Newtona* stosunek względnej prędkości punktów zderzających się ciał po uderzeniu do ich prędkości względnej przed uderzeniem jest wielkością stałą i charakteryzuje własności materiałów, z jakich wykonane są ciała. Przedstawia to zależność

$$\boxed{k = -\frac{v''_{1n} - v''_{2n}}{v'_{1n} - v'_{2n}}}\,, \tag{19.1}$$

w której v''_{1n} i v''_{2n} oznaczają rzuty prędkości punktów styku zderzających się ciał na oś n tuż po zderzeniu, a v'_{1n} i v'_{2n} tuż przed zderzeniem (rys. 19.2). Tak określoną wielkość (k) nazywa się współczynnikiem restytucji.



Rys. 19.2. Prędkości wybranych punktów zderzających się ciał: a) tuż przed zderzeniem, b) podczas zderzenia (zaznaczone są rzuty prędkości na oś o kierunku normalnej uderzenia *n*), c) tuż po zderzeniu

W przypadku, gdy jedno z ciał jest nieruchome (np. $v'_{2n} = v''_{2n} = 0$), to znając współczynnik restytucji i prędkość przed uderzeniem, można wyznaczyć prędkość punktu ciała ruchomego po uderzeniu jako

$$v''_{1n} = -k\, v'_{1n}\ . \tag{19.2}$$

Współczynnik restytucji (k) jest miarą odzyskiwania prędkości po uderzeniu (a ściślej składowej normalnej tej prędkości). Składowe prędkości ciał w kierunku stycznym (t) nie zależą od współczynnika restytucji (są one zależne od sił tarcia, a w przypadku ciał idealnie gładkich nie ulegają zmianie podczas uderzenia).

Wartość współczynnika restytucji zawiera się w granicach od *0* do *1* ($0 \le k \le 1$), przy czym dla $k=0$ mamy do czynienia ze zderzeniem idealnie plastycznym, a dla $k=1$ ze zderzeniem idealnie sprężystym.

19.3.2. Prawo zmienności energii kinetycznej

Prawo zmienności energii kinetycznej układu materialnego[1], w przypadku układu ciał sztywnych o więzach idealnych, można zapisać w formie

$$E_k - E_p = L_{p-k} \;, \tag{19.3}$$

gdzie E_k i E_p oznaczają energię kinetyczną w położeniu końcowym i początkowym, natomiast L_{p-k} jest pracą wykonaną przez siły zewnętrzne na drodze pomiędzy położeniem początkowym i końcowym.

Przypomnimy, że energię kinetyczną ciała sztywnego określa zależność

$$E = \frac{1}{2} m v_C^2 + \frac{1}{2} J_C w^2 \;, \tag{19.4}$$

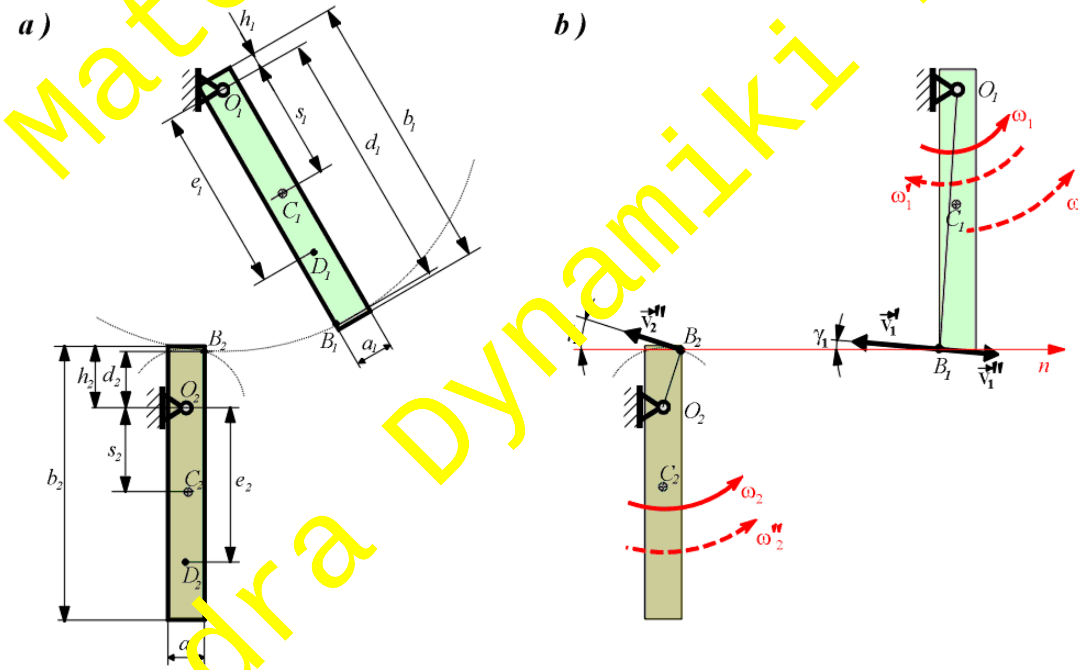
w której v_C oznacza prędkość środka masy ciała, a J_C masowy moment bezwładności ciała względem osi przechodzącej przez środek masy i równoległej do wektora prędkości kątowej. W przypadku, gdy ciało porusza się ruchem obrotowym można stosować prostszy wzór

$$E = \frac{1}{2} J_O w^2 \;, \tag{19.5}$$

przy czym J_O jest masowym momentem bezwładności ciała względem osi pokrywającej się z osią obrotu.

19.3.3. Wyznaczenie współczynnika restytucji

Współczynnik restytucji jest wyznaczany na podstawie hipotezy Newtona (19.1).



Rys. 19.3. Oznaczenia używane do opisu modelu badanego układu: a) wymiary ciał, b) kierunki prędkości przed i po zderzeniu

[1] Prawo zmienności energii kinetycznej dowolnego układu materialnego ma postać

$$dE = d'L_Z + d'L_W + d'L_R \;,$$

gdzie: $d'L_Z$ oznacza elementarną pracę zewnętrznych sił czynnych, $d'L_W$ elementarną pracę sił wewnętrznych, a $d'L_R$ pracę zewnętrznych sił biernych (reakcji). W przypadku ciał sztywnych praca sił wewnętrznych jest równa zeru ($d'L_W=0$ oraz $L_W=0$). Dla układów o więzach idealnych praca reakcji jest równa zeru ($d'L_R=0$ oraz $L_R=0$).

Uderzenie ciała poruszającego się ruchem obrotowym w drugie ciało, które ma również możliwość obrotu (rys. 19.3) oznacza, że zachodzą następujące zależności kinematyczne:

$$v'_{1n} = -w'_1 \frac{d_1}{\cos g_1} \cos g_1 = -w'_1 d_1 \ , \qquad v''_{1n} = w''_1 \frac{d_1}{\cos g_1} \cos g_1 = w''_1 d_1 \ , \tag{19.6}$$

$$v''_{2n} = 0 \ , \qquad v''_{2n} = -w''_2 \frac{d_2}{\cos g_2} \cos g_2 = -w''_2 d_2 \tag{19.7}$$

gdzie v'_{1n}, v''_{1n} oznaczają rzuty wektora prędkości punktu B_1 (ciała 1) przed uderzeniem i po uderzeniu na kierunek normalnej uderzenia (oś x_1 lub x_2), a v''_{2n} oznacza rzut wektora prędkości punktu B_2 (ciała 2) po uderzeniu. Symbol w'_1 oznacza wartość prędkości kątowej ciała uderzającego (ciała *1*) tuż przed uderzeniem, a w''_1 wartość jego prędkości kątowej tuż po uderzeniu. Założono przy tym, że prędkość kątowa w''_1 jest dodatnia (podobnie jak pozostałe prędkości kątowe ciał, których kierunek obrotu jest zgodny z kierunkiem trygonometrycznym – rys. 19.3b). Dla ciała *2* prędkość kątowa w'_2 przed uderzeniem jest znana ($w'_2 = 0$), natomiast po tuż uderzeniu jest oznaczona jako w''_2. Odległości d_1 i d_2 oraz kąty g_1 i g_2 wraz z innymi wymiarami są zaznaczone na rys. 19.3.

Współczynnik restytucji (19.1) dla rozpatrywanego układu można przedstawić – po wykorzystaniu (19.6) i (19.7) – jako

$$k = -\frac{w''_1 d_1 - (-w''_2 d_2)}{-w'_1 d_1} = \frac{w''_1 d_1 + w''_2 d_2}{w'_1 d_1} \tag{19.8}$$

Wyznaczenie współczynnika restytucji jest więc możliwe wówczas, gdy znane są prędkości kątowe ciał przed i po uderzeniu.

Jeśli znane jest położenie początkowe ciała 1, to można wyznaczyć prędkość w'_1 – na podstawie twierdzenia o przyroście energii kinetycznej – z zależności[2]

$$\frac{1}{2} J_1 (w'_1)^2 - 0 = m_1 g s_1 \left(1 - \cos a_1\right) \ , \tag{19.9}$$

gdzie założono, że w położeniu początkowym określonym kątem a_1 prędkość kątowa ciała *1* jest równa zero, masa jest równa m_1, masowy moment bezwładności względem osi obrotu wynosi J_1, a odległość środka masy od osi obrotu s_1 (rys. 19.3a).

W podobny sposób można wyznaczyć prędkość w''_1. Rozpatrując zmianę energii kinetycznej w chwili tuż po uderzeniu i w chwili gdy ciało osiąga najwyższe wychylenie (określone kątem b_1) otrzymuje się

$$0 - \frac{1}{2} J_1 (w''_1)^2 = -m_1 g s_1 \left(1 - \cos b_1\right) \ . \tag{19.10}$$

Dla ciała *2* prędkość w'_2 jest znana ($w'_2 = 0$), natomiast prędkość po uderzeniu (w''_2) może być wyznaczona na podstawie wartości kąta b_2 (oznaczającego maksymalny kąt wychylenia ciała *2* po uderzeniu) – na podstawie zależności

$$0 - \frac{1}{2} J_2 (w''_2)^2 = -m_2 g s_2 \left(1 - \cos b_2\right) \ , \tag{19.11}$$

[2] Kierunek obrotu ciała 1 przed uderzeniem będzie przeciwny do przyjętego za dodatni kierunku prędkości kątowej w_1 (rys. 19.3b). Zatem przyjmiemy ujemną wartość prędkości kątowej w'_1, wyznaczoną na podstawie zależności

$$w'_1 = \pm \sqrt{\frac{2 m_1 g s_1}{J_1} \left(1 - \cos a_1\right)} \ .$$

w której m_2 oznacza masę ciała *2*, J_2 masowy moment bezwładności tego ciała względem osi obrotu, a s_2 odległość środka masy od osi obrotu (rys. 19.3a).

Po rozwiązaniu równań (19.8)–(19.11) zależność określającą współczynnik restytucji można przedstawić w formie

$$\boxed{k = \frac{d_1\sqrt{J_2 m_1 s_1 (1-\cos b_1)} + d_2\sqrt{J_1 m_2 s_2 (1-\cos b_2)}}{d_1\sqrt{J_2 m_1 s_1 (1-\cos a_1)}}} , \qquad (19.12)$$

to jest w zależności od kątów a_1, b_1 i b_2 określających położenia ciał przed i po uderzeniu.

19.3.4. Wyznaczenie wartości energii rozpraszanej podczas zderzenia

Jak wspomniano we wprowadzeniu, w momencie zderzenia ciał rzeczywistych (model ciała idealnie sztywnego nie pozwala na opis zjawisk zachodzących podczas zderzenia) następuje ich odkształcenie. Mogą przy tym pojawić się odkształcenia trwałe (plastyczne) jak i odwracalne (sprężyste). Jest to pierwsza faza zderzenia. Następnie – na skutek sprężystości ciał – zachodzi proces rozprężania, który powoduje odbicie się ciał od siebie. Odkształcenia sprężyste zanikają, a pozostają odkształcenia plastyczne. Powstanie odkształceń plastycznych powoduje, że nie jest odzyskiwana cała energia zużyta na deformację ciał, a tylko ta jej część, która związana jest z odkształceniami sprężystymi.

Porównując energię mechaniczną rozpatrywanego układu tuż przed uderzeniem i tuż po uderzeniu można określić stratę energii układu podczas zderzenia. Wartość energii rozpraszanej przy zderzeniu wyznacza się z zależności

$$E_r = (E_1' + E_2') - (E_1'' + E_2'') , \qquad (19.13)$$

w której E_1' i E_2' oznaczają energie kinetyczne każdego z ciał tuż przed zderzeniem ($E_2' = 0$), a E_1'' i E_2'' tuż po zderzeniu. Po podstawieniu wzorów określających poszczególne energie otrzymuje się

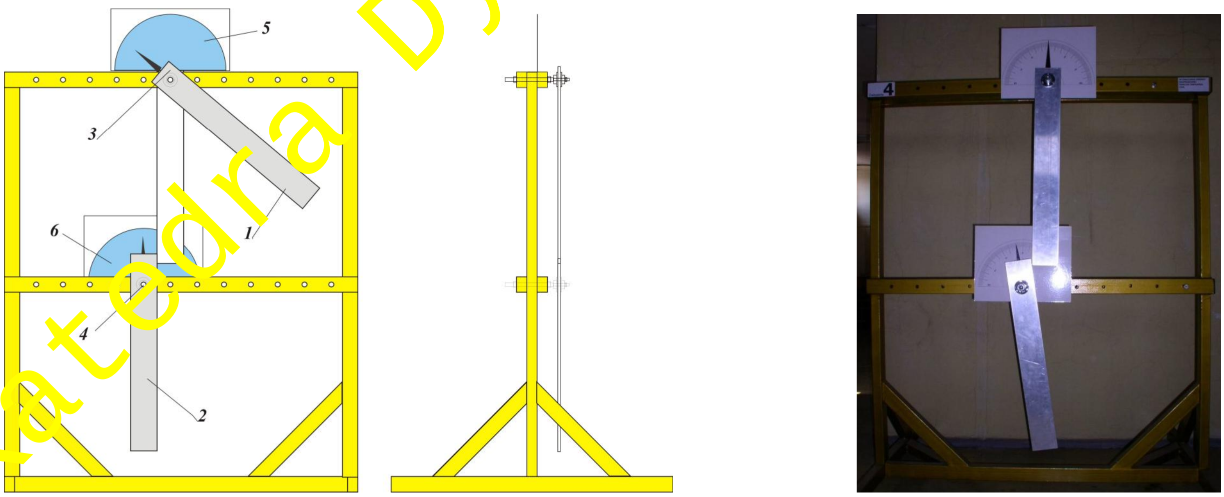
$$E_r = \frac{1}{2} J_1 (w_1')^2 - \frac{1}{2} J_1 (w_1'')^2 - \frac{1}{2} J_2 (w_2'')^2 . \qquad (19.14)$$

Wykorzystując wzory (19.9) – (19.11) wartość energii rozpraszanej podczas zderzenia ciał rozpatrywanego układu można przedstawić w formie

$$\boxed{E_r = m_1 g s_1 (\cos b_1 - \cos a_1) - m_2 g s_2 (1-\cos b_2)} . \qquad (19.15)$$

19.4. Opis stanowiska badawczego

Widok stanowiska do badań jest przedstawiony na rys. 19.4.



Rys. 19.4. Schemat i widok stanowiska badawczego

Badany układ składa się z dwu ciał (*1* i *2*) zamocowanych w łożyskach (*3* i *4*) o poziomych osiach. Kątomierze (*5* i *6*) służą do odczytu maksymalnych kątów wychylenia ciał po zderzeniu oraz ustawienia wychylenia ciała *1* w położeniu początkowym

19.5. Przebieg pomiarów i opracowanie wyników

19.5.1. Doświadczalne określenie masowych momentów bezwładności

Masowe momenty bezwładności ciał badanego układu są wyznaczane na podstawie obliczeń oraz na drodze eksperymentalnej. Doświadczalne określenie masowych momentów bezwładności polega, w tym przypadku, na pomiarze okresu swobodnych wahań, osobno dla każdego z ciał.

Korzystając ze wzoru na okres (T) małych wahań wahadła fizycznego

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{m\,g\,s}}\ , \tag{19.16}$$

można wyznaczyć masowy moment bezwładności J wahadła o masie m i odległości środka ciężkości od osi obrotu równej s – względem osi pokrywającej się z osią obrotu – jako:

$$J = \frac{m g s T^2}{4\pi^2}\ . \tag{19.17}$$

Znając okresy wahań (T_1 i T_2) ciała *1* i ciała *2* można wyznaczyć ich masowe momenty bezwładności:

$$J_1 = \frac{m_1 g s_1 T_1^2}{4\pi^2}\ , \qquad J_2 = \frac{m_2 g s_2 T_2^2}{4\pi^2}\ . \tag{19.18}$$

Sposób przeprowadzenia pomiaru okresu wahań:
- odchylić ciało od pionu o niewielki kąt (nie przekraczający 10^0), a następnie puścić swobodnie,
- zmierzyć czas dziesięciu pełnych wahnięć,
- powtórzyć pomiar kilka razy.

Wyniki pomiarów i rezultaty obliczeń umieścić w odpowiednich rubrykach tabeli 19.1.

Tabela 19.1. Wyniki pomiarów masowych momentów bezwładności

Numer pomiaru		Czas dziesięciu wahnięć	Okres wahań	Masowy moment bezwładności z jednego pomiaru	Wartość średnia momentu bezwładności
i		t_{10}	T_i	J_i	$\bar{J}$
--		**s**	**s**	**kg m²**	**kg m²**
ciało 1	*1*				
	2				
	3				
	...				
ciało 2	*1*				
	2				
	3				
	...				

19.5.2. Wyznaczanie współczynnika restytucji

W celu wyznaczenia współczynnika restytucji (k) należy dokonać kilku pomiarów kąta wychylenia ciała *1* (β_1) i ciała *2* (β_2) po zderzeniu ciał, dla ustalonego kąta α_1 oznaczającego wychylenie początkowe ciała *1*.

Wartość współczynnika k określa się na podstawie zależności (19.12) o postaci

$$k=\frac{d_1\sqrt{J_2 m_1 s_1(1-\cos b_1)}+d_2\sqrt{J_1 m_2 s_2(1-\cos b_2)}}{d_1\sqrt{J_2 m_1 s_1(1-\cos a_1)}}\,.$$

Sposób przeprowadzenia pomiarów współczynnika restytucji:

- wychylić ciało *1* o kąt a_1, a następnie puścić swobodnie,
- obserwować ruch ciał po zderzeniu i określić maksymalne kąty (b_1 i b_2), o jakie wychyliło się każde z ciał po zderzeniu.

Wyniki pomiarów i rezultaty obliczeń umieścić w odpowiednich rubrykach tabeli 19.2.

Powyższe pomiary należy przeprowadzić dla różnych wartości kąta a_1.

Tabela 19.2. Wyniki pomiarów współczynnika restytucji (*k*)

Numer pomiaru	Początkowy kąt wychylenia ciała 1	Kąt wychylenia ciała *1* po zderzeniu	Kąt wychylenia ciała *2* po zderzeniu	Współczynnik restytucji z jednego pomiaru	Wartość średnia współczynnika restytucji
i	a_{1i}	b_{1i}	b_{2i}	k_i	$\bar{k}$
--	°	°	°	--	--
1					
2					
...					
1					
2					
...					

19.5.3. Wyznaczanie wartości energii rozpraszanej podczas uderzenia

Wartość energii rozpraszanej podczas zderzenia ciał rozpatrywanego układu jest wyznaczana z zależności (19.15), to znaczy

$$E_r=m_1 g s_1\left(\cos b_1-\cos a_1\right)-m_2 g s_2\left(1-\cos b_2\right)\,.$$

Wartość energii mechanicznej (potencjalnej) rozpatrywanego układu przed zderzeniem ciał można wyznaczyć z zależności

$$E_0=m_1 g s_1\left(1-\cos a_1\right)\,.$$

Obliczenia należy przeprowadzić na podstawie pomiarów wykonanych w poprzednim punkcie.

Dane do obliczeń:

- masa ciała 1 $m_1 = 2{,}138$ kg
- masa ciała 2 $m_2 = 2{,}276$ kg
- wymiary ciała 1: $a_1 = 0{,}100$ m , $b_1 = 0{,}770$ m , $c_1 = 0{,}010$ m ,
- wymiary ciała 2: $a_2 = 0{,}100$ m , $b_2 = 0{,}748$ m , $c_2 = 0{,}010$ m ,
- odległość punktu B_1 od osi obrotu $d_1 = 0{,}720$ m ,
- odległość punktu B_2 od osi obrotu $d_2 = 0{,}085$ m .
- odległość środka ciężkości ciała 1 od osi obrotu $s_1 = 0{,}335$ m ,
- odległość środka ciężkości ciała 2 od osi obrotu $s_2 = 0{,}270$ m.

Wyniki pomiarów i rezultaty obliczeń umieścić w odpowiednich rubrykach tabeli 19.3.

Tabela 19.3. Wyniki pomiarów energii rozpraszanej podczas uderzenia

Numer pomiaru	Początkowy kąt wychylenia ciała 1	Energia układu przed zderzeniem	Kąt wychylenia ciała *1* po zderzeniu	Kąt wychylenia ciała *2* po zderzeniu	Energia rozproszona podczas zderzenia	Wartość średnia rozproszonej energii	Wartość względna rozproszonej energii
i	a_{1i}	E_0	b_{1i}	b_{2i}	E_r	$\bar{E}_r$	$\bar{E}_r / E_0$
-	°	**kgm²/s²**	°	°	**kgm²/s²**	**kgm²/s²**	**-**
1							
2							
...							
1							
2							
...							

19.6. Opracowanie wyników pomiarów i sprawozdanie

19.6.1. Analiza niepewności pomiarów

Niepewność pomiaru dokonywanego metodą pośrednią wyznacza się na podstawie ogólnej zależności

$$u_c(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{\partial f(y_1, y_2, ...y_n)}{\partial y_i} \Delta y_i \right)^2} \quad , \tag{19.19}$$

a maksymalną wartość niepewności pomiarów wykonanych metodą pośrednią określa się jako

$$|\Delta x| = \sum_{i=1}^{i=n} \left| \frac{\partial f(y_1, y_2, ...y_n)}{\partial y_i} \Delta y_i \right| \quad , \tag{19.20}$$

Symbole użyte w powyższych wzorach oznaczają:

f(y₁, y₂,...,yₙ) – funkcję określającą wielkość *x* mierzoną pośrednio,

$y_1, y_2, ..., y_n$ – wielkości mierzone bezpośrednio,

Dy_i – oznaczają niepewności pomiaru $y_1, y_2, ..., y_n$.

Taki sposób określania niepewności jest dalej wykorzystany do wyznaczenia wartości niepewności pomiaru masowych momentów bezwładności, współczynnika restytucji, i energii rozpraszanej w czasie uderzenia.

Określenie niepewności pomiaru masowych momentów bezwładności

Niepewność pomiaru masowych momentów bezwładności można wyznaczyć z zależności

$$u_c(J) = S_{\bar{J}} = \frac{S_J}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n} (J_i - \bar{J})^2} \quad . \tag{19.21}$$

W celu wyznaczenia niepewności rozszerzonej należy:

- przyjąć poziom ufności np. $p = 95\%$ $(a = 0{,}05)$,
- z tablic znaleźć wartość krytyczną zmiennej losowej Studenta *(t)*,
- przyjąć współczynnik rozszerzenia $k = t$.

Wartość niepewności rozszerzonej wyznaczyć z zależności

$$U(J) = k_{0,05;n} \cdot u_c(J) \quad . \tag{19.22}$$

Wynik pomiaru należy zapisać w postaci:

$$J = \bar{J} \pm U(J) \quad . \tag{19.23}$$

Przy wyznaczaniu masowych momentów bezwładności ciała *1* i ciała *2* jest wykorzystywana zależność (19.17). Stosując do niej wzór (19.19) otrzymuje się niepewność pomiaru

$$u_c(J) = \sqrt{\left(\frac{\partial J}{\partial s}\right)^2 \Delta s^2 + \left(\frac{\partial J}{\partial T}\right)^2 \Delta T^2 + \left(\frac{\partial J}{\partial m}\right)^2 \Delta m^2}, \tag{19.24}$$

a po zróżniczkowaniu otrzymujemy wzór w postaci

$$u_c(J) = \frac{mgsT^2}{4p^2}\sqrt{\left(\frac{\Delta s}{s}\right)^2 + \left(\frac{2\Delta T}{T}\right)^2 + \left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2}\ . \tag{19.25}$$

Wzór (19.25) może być wykorzystany, gdy podane są niepewności: *Ds* – niepewność pomiaru odległości, *D* – niepewność pomiaru masy, *DT* – niepewność pomiaru okresu wahań.

Wyznaczenie niepewności pomiaru współczynnika restytucji

Przy wyznaczaniu współczynnika restytucji (k_i) wykorzystywana jest zależność (19.12). Stosując do niej wzór analogiczny (19.21) można wyznaczyć niepewność względną jako

$$u_c(k) = S_{\bar{k}} = \frac{S_k}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(k_i - \bar{k}_{1,2})^2}\ . \tag{19.26}$$

Określenie niepewności pomiaru energii rozpraszanej podczas zderzenia

Przy wyznaczaniu wartości energii rozpraszanej podczas zderzenia korzysta się z zależności (19.15). Stosując do niej wzór (19.19) po zróżniczkowaniu otrzymuje się wyrażenie, które można zapisać jako:

$$u_c(E_r) = g\sqrt{W_1 + W_2 + W_3} \tag{19.27}$$

przy czym

$$\begin{aligned} W_1 &= (s_1{}^2\Delta m_1{}^2 + m_1{}^2\Delta s_1{}^2)(\cos b_1 - \cos a_1)^2\ ,\\ W_2 &= m_1{}^2 s_1{}^2(\Delta b_1{}^2 \sin^2 b_1 + \Delta a_1{}^2 \sin^2 a_1)\ ,\\ W_3 &= (-1+\cos b_2)^2(s_2{}^2\Delta m_2{}^2 + m_2{}^2\Delta s_2{}^2) + m_2{}^2 s_2{}^2\Delta b_2{}^2 \sin^2 b_2 . \end{aligned} \tag{19.28}$$

19.6.2. Sprawozdanie

W sprawozdaniu należy zamieścić:

a) opis przeprowadzonych eksperymentów,
b) wypełnione tabele 19.1, 19.2 i 19.3,
c) obliczenia wartości niepewności pomiarów:
   - masowych momentów bezwładności,
   - współczynnika restytucji,
   - energii rozpraszanej w czasie uderzenia,
d) obserwacje i wnioski wynikające z przeprowadzonych eksperymentów i obliczeń.

19.7. Pytania sprawdzające

1. *Co to jest masowy moment bezwładności ciała względem płaszczyzny, osi, bieguna?*
2. *Jak wyznacza się masowy moment bezwładności ciała względem osi przesuniętej poza środek masy?*
3. *Jak można wyznaczyć na drodze eksperymentalnej masowy moment bezwładności ciała względem osi?*
4. *Co to jest współczynnik restytucji?*
5. *Jak wyznacza się energię ciała poruszającego się ruchem obrotowym?*
6. *Z czego wynikają straty energii układu podczas zderzenia?*