

## Ćwiczenie 2

# WYZNACZANIE SIŁ W PRĘTACH MODELU KRATOWNICY PŁASKIEJ

## 2.1. Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest porównanie wartości sił działających w elementach modelu płaskiej kratownicy, wyznaczonych teoretycznie i doświadczalnie.

## 2.2. Wprowadzenie

Kratownicą nazywamy układ prostych prętów, których końce są ze sobą połączone przegubowo. Kratownice są szeroko rozpowszechnionymi konstrukcjami inżynierskimi (przęsła mostów, słupy trakcji elektrycznej, różnego rodzaju dźwigary, wysięgniki, belki dźwignic itp. Rozróżnia się kratownice płaskie (wszystkie pręty leżą w jednej płaszczyźnie) i kratownice przestrzenne.

W rzeczywistych konstrukcjach połączenia prętów wykonywane są za pomocą spawania, nitowania, skręcania śrubami itp. W obliczeniach takich konstrukcji przyjmuje się, że węzły stanowią połączenia przegubowe, co znacznie ułatwia analizę. Dodatkowym uproszczeniem jest pominięcie w obliczeniach ciężaru prętów.

Stanowisko laboratoryjne umożliwia wyznaczenie, w sposób doświadczalny, sił w prętach kratownicy. Porównanie wyników otrzymanych z pomiarów z rezultatami obliczeń teoretycznych dla modelu fizycznego kratownicy pozwala na weryfikację przyjętego modelu.

## 2.3. Opis teoretyczny

### 2.3.1. Obliczanie sił w prętach kratownicy płaskiej

Z punktu widzenia zastosowań praktycznych ważne jest określenie sił reakcji podpór i wyznaczeniu sił działających w jej prętach. Dla wyznaczenia reakcji korzysta się z warunków równowagi całej kratownicy (płaski dowolny układ sił). Po wyznaczeniu tych reakcji można określić siły wewnętrzne w prętach.

Stosowanych jest kilka metod wyznaczania sił w prętach kratownicy – między innymi:

1. Metoda równowagi węzłów – polega na uwolnieniu od więzów poszczególnych węzłów kratownicy i ułożeniu równań równowagi oddzielnie dla każdego z węzłów (rzutując wszystkie działające siły, na dwie dowolne, nierównoległe osie).
2. Metoda Rittera – umożliwia wyznaczenie sił w wybranych prętach. W tym przypadku rozpatruje się równowagę jednego z dwóch podokładów otrzymanych z myślowego przecięcia kratownicy. Przekrój prowadzi się, przez co najwyżej trzy pręty, przy czym ich osie nie mogą zbiegać się w tym samym punkcie.
3. Metody komputerowe – są stosowane do rozwiązywania kratownic o dużej liczbie prętów. Używane do tego celu procedury umożliwiają numeryczne, a niekiedy również analityczne rozwiązanie zadania.

Warunkiem koniecznym na to, by kratownica była statycznie wyznaczalna jest:

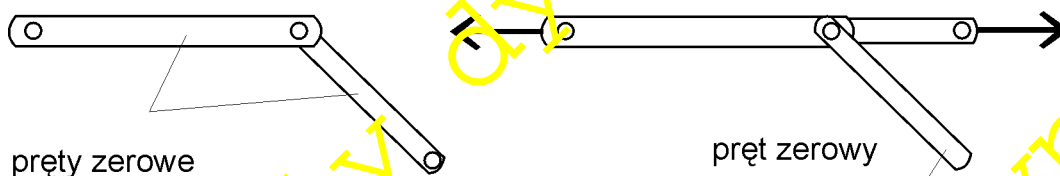
$$p = 2w - 3 \quad (2.1)$$

przy czym:

- $p$  – liczba prętów kratownicy,
- $w$  – liczba węzłów (przegubów).

Jeśli liczba prętów  $p$  jest większa niż wynika to z zależności (2.1), wówczas niezależnych równań równowagi jest mniej niż niewiadomych. Układ ma wtedy nieskończenie wiele rozwiązań. Taką kratownicę nazywamy statycznie niewyznaczalną. Nadliczbowe pręty powodują przeszywnienie konstrukcji.

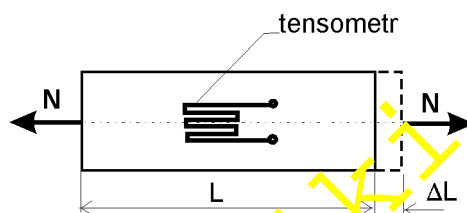
Rozwiązywanie zagadnienia można przyspieszyć eliminując z kratownicy tzw. pręty zerowe. Na rys. 2.2 przedstawiono dwa przypadki układu prętów zerowych, występujące w kratownicy płaskiej.



Rys. 2.2. Układy prętów zerowych w kratownicy płaskiej

### 2.3.2. Wprowadzenie do tensometrii oporowej

Rozważmy pręt, na którego końce działają dwie siły o identycznej wartości  $N$ , jak pokazano na rys. 2.3.



Rys. 2.3. Pręta rozciągany siłami osiowymi

W przypadku jednoosiowego rozciągania pręta (wykonanego z jednorodnego, izotropowego materiału), na podstawie prawa Hooke'a otrzymuje się:

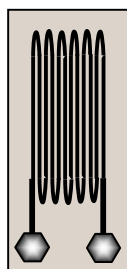
$$e = \frac{\Delta L}{L} = \frac{N}{EF} = \frac{s}{E}, \quad (2.2)$$

gdzie:

- $E$  – moduł Younga,
- $F$  – pole przekroju pręta,
- $\Delta L$  – wydłużenie pręta o długości  $L$ ,
- $s$  – naprężenie normalne
- $e$  – odkształcenie względne.

Przedstawiona powyżej zależność (2.2) nie ujmuje całokształtu zagadnienia związanego z odkształceniami jakich doznaje rzeczywisty pręt przy obciążeniu osiowymi siłami. Bowiem pręt taki obok odkształceń wzdłużnych  $e$  doznaje również odkształceń poprzecznych o znaku przeciwnym do znaku  $e$ . Oznacza to, że pręt rozciągany będzie wykazywał zmniejszenie jego wymiarów poprzecznych w miarę wzrostu przyłożonej siły. Wielkość tych zmian jest zależna od do liczby Poissona  $n$  (dla stali konstrukcyjnych  $n = 0,3$ ).

Na rozciągany pręcie jest naklejony tensometr oporowy, którym jest rezystor drutowy lub foliowy (widok poniżej). Wraz z odkształceniami pręta, tensometr także ulega odkształceniom, zmieniając swoją oporność elektryczną  $R$  o wartość  $\Delta R$ . Dla danego typu tensometru (w zakresie odkształceń sprężystych, czyli stosowność prawa Hooke'a) zachodzi następujący związek:



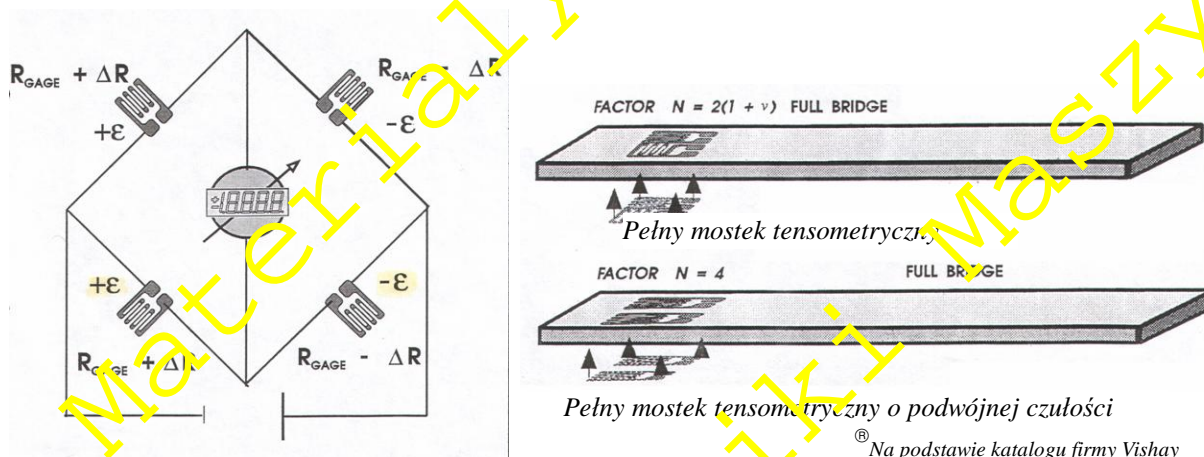
$$\frac{\frac{\Delta R}{R}}{e} = k \quad (2.3)$$

gdzie:  $k$  – współczynnik czułości odkształceniowej danego tensometru

Mierząc zmiany oporności tensometru, wywołane odkształceniami i znając jego współczynnik czułości  $k$  można wyznaczyć odkształcenia względne  $e$ , a następnie obliczyć siłę w przecie. Siła ta określona jest zależnością

$$N = EFe \quad (2.4)$$

Ponieważ wywołane zmiany względne oporności są niewielkie (rzędu promila), a ponadto są one porównywalne ze zmianami oporności wywołanymi wpływem temperatury otoczenia, stosuje się układy tensometrów (dwa lub cztery) połączone w układ mostka Wheatstone'a (rys.2.4).



Rys. 2.4. Tensometryczny mostek Wheatstone'a oraz sposób umieszczania tensometrów na przecie

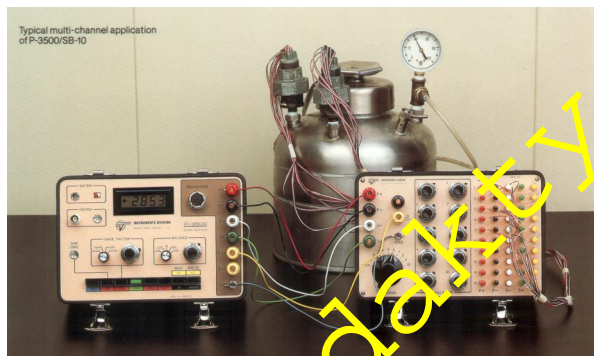
Zmiany oporności tensometrów włączonych do obwodu mostka powodują powstawanie zmian napięcia na pionowej przekątnej mostka. Zastosowanie odpowiednio wyskalowanego wzmacniacza pomiarowego pozwala odczytać bezpośrednio na jego wskaźniku wartość odkształcenia  $e$  lub przyrost odkształceń względem stanu początkowego (uzależnione to jest od typu używanego wzmacniacza). Na rys. 2.5 przedstawiony jest wzmacniacz tensometryczny firmy *Vishay Measurements*.



Rys. 2.5. Widok nowoczesnego wzmacniacza tensometrycznego

Wzmacniacz tensometryczny może w danym momencie współpracować tylko z jednym mostkiem tensometrycznym (punktem pomiarowym). Aby móc mierzyć odkształcenia z użyciem większej ilości mostków stosuje się przełączniki mostków tzw. skrzynki przełącznikowe.

Umożliwiają one pomiary odkształceń w dużej liczbie punktów (w przypadku kratownic w wielu prętach).



Rys. 2.6. Widok stoiska do badań tensometrycznych

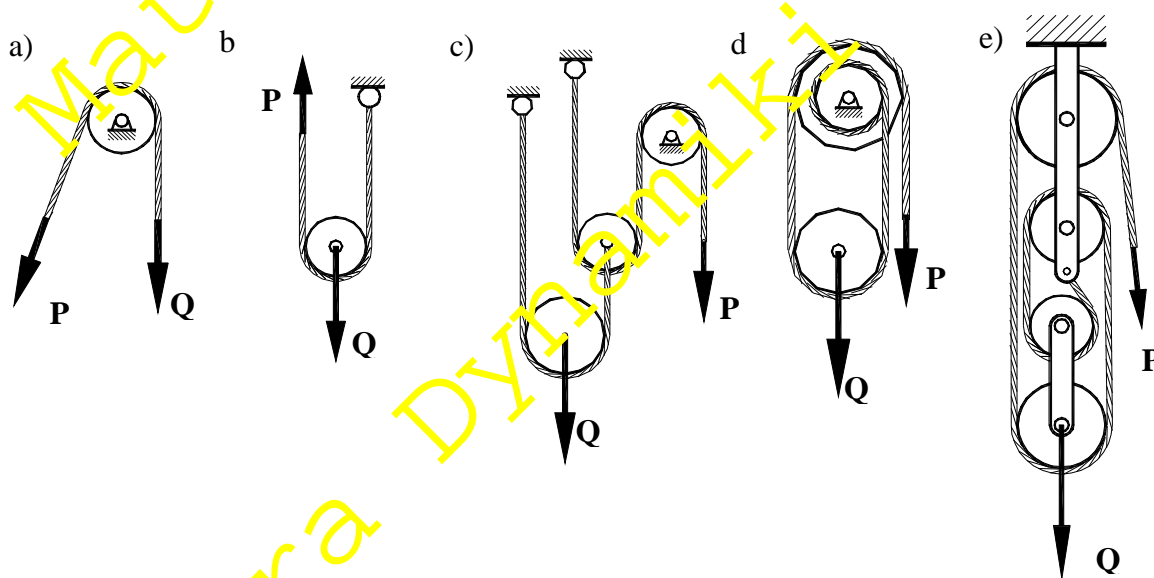
Na rys. 2.6 przedstawiony jest widok stoiska pomiarowego do badania odkształceń zbiornika z wykorzystaniem tego wzmacniacza oraz skrzynki przełącznikowej. Wzmacniacze tensometryczne i skrzynki przełącznikowe innych firm mogą różnić się jedynie sposobami regulacji, skalowania i ewentualnie rodzajami wskaźników – analogowe (wskazówkowe) lub cyfrowe.

Obecnie coraz częściej stosuje się mostki z wyjściem cyfrowym, mogące współpracować z komputerem PC. Ułatwia to wszelkie obliczenia i opracowania wyników badań doświadczalnych, zwłaszcza bardzo złożonych konstrukcji mechanicznych.

Dokładny sposób postępowania z konkretnym typem wzmacniacza jest zawarty w jego instrukcji obsługi.

### 2.3.3. Wielokrążki

Wielokrążki są układami zaliczonymi do „maszyn prostych”. Na rys. 2.7 zostały przedstawione różne przykłady maszyn prostych z krążkami i wielokrążkami.



Rys. 2.7. Krążki i wielokrążki: (a) krążek stały, (b) krążek ruchomy, (c) wielokrążek potęgowy, (d) wielokrążek różnicowy, (e) wielokrążek sumacyjny

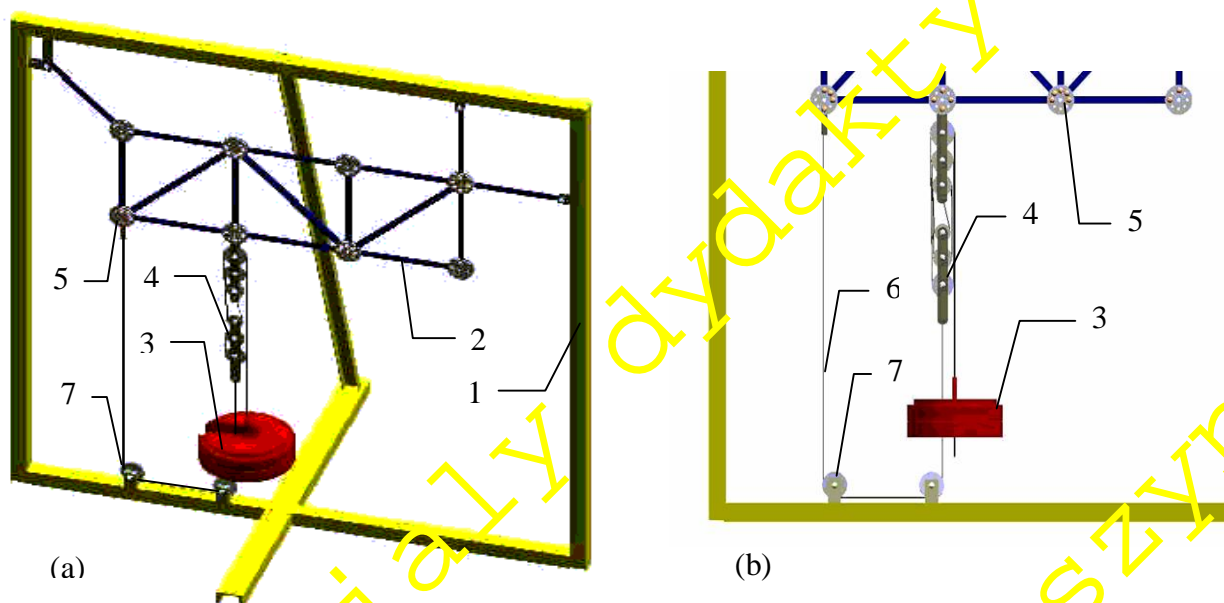
Maszyny proste służą do pokonywania sił oporu użytecznego  $\dot{Q}$  siłami napędzającymi  $\dot{P}$  bądź to zmniejszonymi w sposób dla nas wygodny, bądź to skierowanymi w kierunku dla nas pożądanym. W idealnych maszynach prostych praca siły  $\dot{Q}$  jest równa pracy siły  $\dot{P}$ . Tym samym chcąc działać siłą  $\dot{P}$  o mniejszej wartości musimy nią działać na dłuższej drodze.

Siły rzeczywiste, jakimi musimy działać korzystając z maszyn prostych są większe od sił teoretycznych, gdyż są powiększone o siły oporów, tarcia, itp. Przykładowo, sprawność pojedynczego, krążka wynosi 97-99%.

## 2.4. Opis stanowiska badawczego

### 2.4.1. Opis badanego obiektu

Na rys.2.8-a jest pokazane stanowisko do badań sił w elementach modelu kratownicy płaskiej.



**Rys. 2.8. Widok badanego układu mechanicznego:**  
(a) model kratownicy, (b) widok wielokrążka z obciążnikami

Stanowisko składa się ze stalowej ramy (1), na której jest rozpięta kratownica (2) wykonana z cienkich płaszczyk stalowych, połączonych ze sobą poprzez blachy węzłowe (5). Kratownicę podwieszono na ramie za pomocą prętów. Obciążana jest ona krążkami (3) poprzez wielokrążek sumacyjny (4) – rys. 2.8-b. Ciężno jest prowadzone poprzez krążki stałe (7), które umożliwiają zmianę sposobu obciążenia kratownicy. Umieszczenie na szalce wielokrążka obciążników powoduje powstanie sił w prętach.

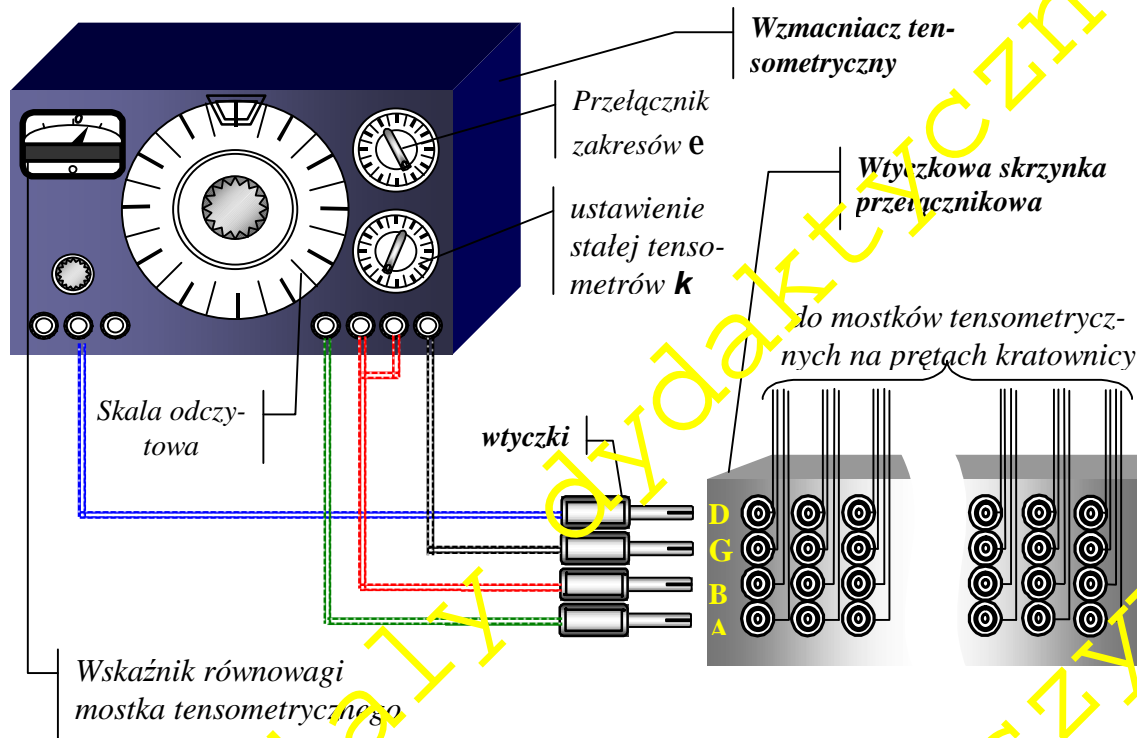
Na prętach (właściwych kratownicy, podporowych oraz pomocniczych) naklejono mostki tensometryczne. Do wyprowadzeń mostków przyłutowano bardzo cienkie przewody, których drugie końce przyłutowano do listwy zbiorczej umocowanej na górnej poprzeczce ramy stoiska.

### 2.4.2. Przyrządy pomiarowe i sposób wykonania pomiarów

Do pomiaru sił w prętach kratownicy wykorzystano tensometry, naklejone na przeciwległych stronach prętów i tworzących pełne mostki tensometryczne. Takie usytuowanie tensometrów eliminuje wpływ zginania prętów przy obciążeniu kratownicy i zmniejsza wpływ zmian temperatury. W wyniku obciążenia kratownicy jej pręty ulegają odkształceniom proporcjonalnym do działających wewnątrz nich sił. Równocześnie z odkształcaniem się prętów, odkształcają się tensometry i tym samym ulega zmianie ich oporność elektryczna.

Tensometry połączone są w układzie mostka Wheatstone'a do pomiaru oporności. Zmiany oporności tensometrów mierzone są poprzez tensometryczny wzmacniacz pomiarowy. Sygnał pomiarowy dociera do niego poprzez skrzynkę przełącznikową, umożliwiającą podłączenie wybranych tensometrów za pomocą zestawu wtyczek.

Schemat układu pomiarowego jest przedstawiony na rys.2.9.



Rys. 2.9. Tensometryczny układ pomiarowy

Dokładny opis używanego wzmacniacza jest zawarty w dokumentacji stoiska.

## 2.5. Przebieg pomiarów

Ćwiczenie jest wspomagane programem komputerowym. Po zapoznaniu się z konstrukcją układu mechanicznego i układem pomiarowym należy – w obecności prowadzącego zajęcia – włączyć wzmacniacz tensometryczny i komputer. Następnie trzeba uruchomić program *CW2.EXE* i postępować zgodnie z poleceniami ukazującymi się na ekranie monitora.

Po wykonaniu pierwszej, obliczeniowej części ćwiczenia należy wykonać następujące czynności.

1. Uzgodnić z prowadzącym numery badanych prętów (maksymalna liczba prętów - nie licząc podporowych - wynosi 6) oraz liczbę wariantów obciążeń zewnętrznych kratownicy.
2. Umieścić na szalce wielokrążka czerwony obciążnik, powodujący likwidację luzów i wstępne obciążenie kratownicy.
 

*Uwaga!*

  - Obciążniki należy umieszczać na szalce wielokrążka delikatnie.
  - Szalka z obciążnikami musi pozostać nieruchoma podczas dokonywania odczytu.
  - W przypadku trudności z wyzerowaniem wzmacniacza tensometrycznego skonsultować się z osobą prowadzącą ćwiczenie.
3. Dokonać zrównoważenia mostka dla badanego pręta i odczytać wskazanie wzmacniacza. Wartości  $W_{oi}$  (odpowiadające wstępnemu obciążeniu  $i$ -tego pręta) zapisać w tabeli 2.1 albo 2.2 i wprowadzić jako dane do programu komputerowego.
4. Umieścić na szalce wielokrążka żółty obciążnik.
5. Dokonać zrównoważenia mostka dla badanych prętów; odczytane wartości  $W_i$  zapisać w odpowiedniej tabeli (2.1 albo 2.2) i następnie wprowadzić je do programu.
6. Wyniki obliczeń komputerowych przepisać do tabeli 2.1 oraz 2.2.
7. Wykonać pomiary dla kolejnego wariantu obciążenia kratownicy powtarzając kroki (4) - (6).
8. Zdjąć żółte obciążniki z szalki (pozostawić natomiast ten w kolorze czerwonym), odczytać wskazania wzmacniacza dla badanych prętów i zapisać wartości  $W_{ki}$  w odpowiednich tabelach. W przypadku stwierdzenia znacznych różnic warto-

ści  $W_{0i}$  - **przed** założeniem obciążnika i  $W_{ki}$  - **po** jego zdjęciu dla któregośkolwiek z badanych prętów, należy powtórzyć pomiary dla tego pręta.

Po zakończeniu wszystkich pomiarów zdjęć żółte obciążniki, wyłączyć wzmacniacz i komputer.

## 2.6. Opracowanie wyników pomiarów i sprawozdanie

### 2.6.1. Obliczenia pomocnicze

Na podstawie uzyskanych wyników pomiarów należy obliczyć wartości doświadczalne sił w prętach podporowych ( $R_{AY}$ ,  $R_B$ ) kratownicy.

W tym celu korzysta się z następujących zależności określających:

- odkształcenia względne pręta o numerze  $i$

$$\Delta W_i = W_{ki} - W_{0i},$$

- siły w  $i$ -tym pręcie

$$P_{id} = \frac{E F \Delta W_i}{1000 k_u}.$$

Należy przyjąć:

- moduł Younga
- pole przekroju pręta
- współczynnik układu tensometrycznego

$$E = 210 \text{ GPa},$$

$$F = 27,0 \text{ mm}^2,$$

$$k_u = 2,47.$$

Wartości teoretyczne tych reakcji obliczyć wykorzystując wyniki przeprowadzonych wcześniej obliczeń wstępnych i własność liniowości konstrukcji.

Różnicę względną (procentową) wartości sił otrzymanych doświadczalnie ( $P_{id}$ ) i obliczonych teoretycznie ( $P_i$ ) wyznacza się ze wzoru:

$$d_i = \frac{P_{id} - P_i}{P_i} 100\% .$$

Powyższe obliczenia zamieścić w sprawozdaniu, a wyniki liczbowe wpisać do tabeli 2.2.

Następnie trzeba znaleźć – korzystając z **metody Rittera** - siły we wskazanych przez prowadzącego ćwiczenie prętach kratownicy. Obliczenia wykonać tylko dla jednego wybranego wariantu obciążenia, np.  $G = 50 \text{ N}$ . Potrzebne ewentualnie wartości sił w prętach podporowych ( $R_{Ax}$ ,  $R_{Ay}$  i  $R_B$ ) oraz pomocniczych ( $S_1$  i  $S_2$ ) wyznaczyć wykorzystując wyniki przeprowadzonych wcześniej obliczeń wstępnych.

### 2.6.2. Sprawozdanie

W sprawozdaniu, które musi być bezwzględnie oddane na zakończenie zajęć należy zamieścić:

- temat i cel ćwiczenia,
- obliczenia wstępne,
- wypełnione tabele 2.1 i 2.2,
- schemat obliczeniowy, równania i wyniki liczbowe rozwiązania metodą Rittera,
- obserwacje i wnioski.

## 2.7. Pytania sprawdzające

- Co to są wielokątiki i do czego służą? Podaj przykłady wielokątów.
- Co to jest kratownica i jaki jest warunek jej statycznej wyznaczalności?
- Co to są pręty zerowe kratownicy? Podaj przykłady prętów zerowych.
- Na czym polega metoda Rittera rozwiązywania kratownic?
- Wyjaśnij zasadę działania tensometru oporowego?

Tabela 2.1. Wyniki pomiarów i obliczeń sił w prętach kratownicy

Wariant obciążenia nr 1	Badany pręt	Wskazania miernika		Wielkości wyznaczone na podstawie pomiarów i obliczeń				Wskazania miernika <i>po</i> usunięciu obciążenia (tylko z obciążnikiem czerwonym)
		<i>przed</i> obciążeniem kratownicy (czerwony)	<i>po</i> obciążeniu kratownicy (1 lub 2 żółte)	Odkształcenia względne	Siły doświadczalne	Siły teoretyczne	Różnice względne $P_i$ oraz $P_{id}$	
G = ..... N	<i>i</i>	$W_{oi}$ [‰]	$W_i$ [‰]	$DW_i$ [‰]	$P_{id}$ [N]	$P_i$ [N]	$d_i$ [%]	
	1							X
	4							
	5							
	8							
	10							
	12							
13								
Wariant obciążenia nr 2	<i>i</i>		$W_i$ [‰]	$DW_i$ [‰]	$P_{id}$ [N]	$P_i$ [N]	$d_i$ [%]	$W_{ki}$ [‰]
	1	X						
	4							
	5							
	8							
	10							
	12							
13								

Tabela 2.2. Wyniki pomiarów i obliczeń sił w prętach pomocniczych i podporowych

Wariant obciążenia nr 1	Badany pręt	Wskazania miernika		Wielkości wyznaczone na podstawie pomiarów i obliczeń				Wskazania miernika <i>po</i> usunięciu obciążenia (tylko z obciążnikiem czerwonym)
		<i>przed</i> obciążeniem kratownicy (czerwony)	<i>po</i> obciążeniu kratownicy (1 żółty)	Odkształcenia względne	Siły doświadczalne	Siły teoretyczne	Różnice względne $P_i$ oraz $P_{id}$	
G = ..... N		$W_{oi}$ [‰]	$W_i$ [‰]	$DW_i$ [‰]	$P_{id}$ [N]	$P_i$ [N]	$d_i$ [%]	$W_{ki}$ [‰]
	14 (S <sub>1</sub> )							
	15 (S <sub>2</sub> )							
	R <sub>AY</sub>							
	R <sub>B</sub>							