

LABORATORIUM DYNAMIKI MASZYN

Ćwiczenie 5

IDENTYFIKACJA OBIEKTU DYNAMICZNEGO NA PODSTAWIE JEGO LOGARYTMICZNYCH CHARAKTERYSTYK CZĘSTOTLIWOŚCIOWYCH

1. Cel ćwiczenia¹

Określenie równania ruchu obiektu dynamicznego na podstawie jego logarytmicznych charakterystyk częstotliwościowych, które została wyznaczone doświadczalnie.

2. Wprowadzenie teoretyczne

Jedną z najbardziej użytecznych metod przedstawiania charakterystyk częstotliwościowych obiektów dynamicznych została opracowana przez Bodego. Tak zwane wykresy Bodego (logarytmiczne charakterystyki częstotliwościowe) przedstawiają odpowiedź częstotliwościową układu w postaci dwóch wykresów. Pierwszy z nich obrazuje amplitudę przepustowości widmowej wyrażoną w decybelach, drugi – kąt fazowy. W obu przypadkach są to funkcje częstotliwości wyrażonej w skali logarytmicznej.

2.1. Minimalnofazowa przepustowość w postaci iloczynu czynników rogowych

Przepustowość obiektu dynamicznego $G(s)$ jest definiowana jako minimalnofazowa jeśli wszystkie jej bieguny² i zera³ znajdują się w lewej półpłaszczyźnie zespolonej ($Re(s) \leq 0$). Minimalnofazową przepustowość można przedstawić w postaci iloczynu czynników rogowych:

$$G(s) = k s^n \frac{m_1(s) m_2(s) \dots}{a_1(s) a_2(s) \dots} \quad (1)$$

gdzie: k – współczynnik wzmocnienia,
 n – liczba całkowita przedstawiająca ilość zer (jeśli $n > 0$) lub biegunów (jeśli $n < 0$) przy $s = 0$,
 $m_i(s)$ – czynnik zerowy,
 $a_i(s)$ – czynnik biegunowy.

Odpowiadająca (1) przepustowość widmowa ma postać:

$$G(j\omega) = G(s)|_{s=j\omega} = k (j\omega)^n \frac{m_1(j\omega) m_2(j\omega) \dots}{a_1(j\omega) a_2(j\omega) \dots} \quad (2)$$

Każdy zespolony czynnik $m_i(j\omega)$ i $a_i(j\omega)$ w (2) może być przedstawiony w postaci wykładniczej:

$$\begin{aligned} m_i(j\omega) &= |m_i(j\omega)| e^{j\alpha_i}, \\ a_i(j\omega) &= |a_i(j\omega)| e^{j\beta_i}. \end{aligned} \quad (3)$$

Czynnik niskoczęstotliwościowy $k (j\omega)^n$ może być przedstawiony w następującej postaci:

$$k (j\omega)^n = k \omega^n j^n = k \omega^n e^{jn\frac{\pi}{2}} \quad (4)$$

Podstawiając (3) i (4) do (2), otrzymuje się:

$$G(j\omega) = |G(j\omega)| e^{j\phi} = k \omega^n \frac{|m_1(j\omega)| |m_2(j\omega)| \dots}{|a_1(j\omega)| |a_2(j\omega)| \dots} e^{j(n\frac{\pi}{2} + \alpha_1 + \alpha_2 + \dots - \beta_1 - \beta_2 - \dots)} \quad (5)$$

¹ Instrukcję opracował Krzysztof Marynowski

² bieguny - pierwiastki wielomianu znajdującego się w mianowniku przepustowości

³ zera - pierwiastki wielomianu znajdującego się w liczniku przepustowości

Wykorzystując (5), amplitudę przepustowości widmowej można wyznaczyć w decybelach⁴

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log |G(j\omega)| = 20 \log k + 20n \log \omega + 20 + 20 \log |m_1(j\omega)| + 20 \log |m_2(j\omega)| + \dots - 20 \log |a_1(j\omega)| - 20 \log |a_2(j\omega)| - \dots \quad (6)$$

Kąt fazowy określa zależność:

$$\phi = n \frac{\pi}{2} + \alpha_1 + \alpha_2 + \dots - \beta_1 - \beta_2 - \dots \quad (7)$$

Równania (6) i (7) wyrażają amplitudę i kąt fazowy minimalnofazowej przepustowości obiektu dynamicznego w postaci liniowej kombinacji czynników, które są wzajemnie niezależne.

2.2. Logarytmiczne charakterystyki czynnika niskoczęstotliwościowego, czynnika 1-go rzędu, oraz czynnika 2-go rzędu.

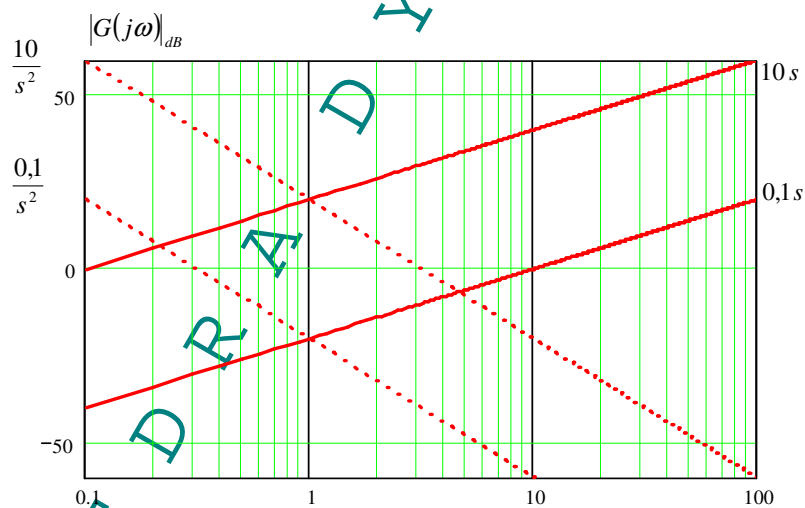
Równanie (4) przedstawia postać wykładniczą przepustowości widmowej czynnika niskoczęstotliwościowego. Amplituda (4) wyrażona w decybelach ma postać

$$|G_0(j\omega)|_{dB} = 20 \log k \omega^n = 20 \log k + 20n \log \omega \quad (8)$$

Dla różnych częstotliwości ω z zakresu $0,01 \div 100$ rd/s ta amplituda przyjmuje wartości przedstawione w Tabeli 1. Na tej podstawie, w skali logarytmicznej, $|G_0(j\omega)|_{dB}$ jest rysowana jako prosta linia o nachyleniu $20n$ dB/dekadę (Rys. 1). Kąt fazowy czynnika niskoczęstotliwościowego $\phi_0 = n\pi/2$.

Tabela 1. Wartości amplitud czynnika niskoczęstotliwościowego

Częstotliwość ω	Amplituda $ G(j\omega) _{dB}$
0.01	$20 \log k - 40n$
0.1	$20 \log k - 20n$
1.0	$20 \log k$
10.0	$20 \log k + 20n$
100.0	$20 \log k + 40n$



Rys. 1. Logarytmiczne charakterystyki amplitudowe czynnika niskoczęstotliwościowego $G_0(s) = ks^n$ dla dwóch wartości $k = 0,1$ i 10 oraz dwóch wartości $n = 1$ (linie ciągłe) i $n = -2$ (linie przerywane)

⁴ W akustyce jednostką ilorazu dwóch mocy ruchów drgających jest Bel, przy czym liczbę tych jednostek oblicza się ze wzoru $L = \log(P_1/P_2)$ [B]. Jednostką 10 razy mniejszą jest decybel, zatem $L = 10 \log(P_1/P_2)$ [dB]. Ponieważ moce są proporcjonalne do kwadratów amplitud, stąd $L = 10 \log(A_1^2/A_2^2) = 20 \log(A_1/A_2)$ [dB].

Czynnik zerowy 1-go rzędu o częstotliwości rogowej ω_1 ma następującą postać

$$G_1(s) = (Ts + 1) = \left(\frac{s}{\omega_1} + 1 \right). \quad (9)$$

Odpowiadająca przepustowość widmowa w postaci wykładniczej

$$G_1(j\omega) = G_1(s)|_{s=j\omega} = |G_1(j\omega)| e^{j\phi_1} = \sqrt{1 + \frac{\omega^2}{\omega_1^2}} e^{j(\tan^{-1} \frac{\omega}{\omega_1})} \quad (10)$$

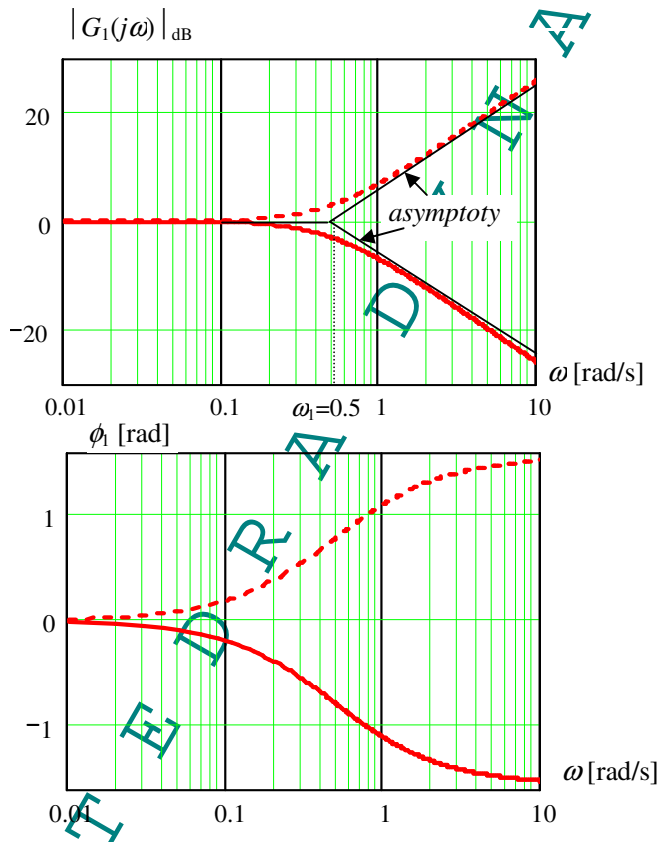
W tym przypadku, $|G_1(j\omega)|_{dB}$ może być aproksymowana przez dwie linie proste nazywane asymptotami rzeczywistej charakterystyki amplitudowej. Niskoczęstotliwościową asymptotą (dla $\omega \ll \omega_1$) opisuje zależność:

$$|G_1(j\omega)| = 1 \Rightarrow |G_1(j\omega)|_{dB} = 20 \log 1 = 0 \text{ dB}. \quad (11)$$

Stąd, niskoczęstotliwościową asymptotą czynnika 1-go rzędu jest linia pozioma 0 dB (Rys. 2). Wysokoczęstotliwościową asymptotą (dla $\omega \gg \omega_1$) opisuje zależność:

$$|G_1(j\omega)| = \frac{\omega}{\omega_1} \Rightarrow |G_1(j\omega)|_{dB} = 20 \log \omega - 20 \log \omega_1. \quad (12)$$

Wyrażenie (12) wskazuje, że wysokoczęstotliwościową asymptotą czynnika 1-go rzędu jest linia prosta o nachyleniu 20 dB/dek, która przecina poziom 0 dB przy częstotliwości $\omega = \omega_1$, która stąd jest nazywana częstotliwością rogową (Rys. 2). Równanie (10) pokazuje, że kąt fazowy ϕ_1 wzrasta w sposób ciągły od 0° przy $\omega = 0$ do 45° kiedy $\omega = \omega_1$ i do 90° gdy $\omega \rightarrow \infty$. Ponieważ $(Ae^{j\phi})^{-1} = (1/A) e^{-j\phi}$ oraz $20 \log (1/A) = -20 \log A$, zarówno amplitudowy jak i fazowy wykres Bodego czynnika biegunowego 1-go rzędu $(Ts + 1)^{-1}$ mają postać zwierciadlanych odbić odpowiadających wykresów czynnika zerowego 1-go rzędu $(Ts + 1)$. Własność tę ilustruje Rys.2.



Rys. 2. Rzeczywiste i asymptotyczne wykresy Bodego czynnika zerowego (linia przerywana) i czynnika biegunowego (linia ciągła) 1-go rzędu ($\omega_1 = 0.5$ rad/s)

Czynnik zerowy 2-go rzędu o częstotliwości rogowej ω_2 ma postać:

$$(T^2 s^2 + 2T\xi s + 1) = \left(\frac{s^2}{\omega_2^2} + \frac{2\xi s}{\omega_2} + 1 \right). \quad (13)$$

Odpowiadająca przepustowość widmowa w postaci wykładniczej

$$G_2(j\omega) = |G_2(j\omega)| e^{j\phi_1} = \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_2^2}\right)^2 + 4\xi^2 \frac{\omega^2}{\omega_2^2}} e^{j \left[\tan^{-1} \frac{-2\xi \frac{\omega}{\omega_2}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_2^2}} \right]}. \quad (14)$$

Amplitudę przepustowości widmowej wyraża zależność:

$$|G_2(j\omega)|_{dB} = 20 \log \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_2^2}\right)^2 + 4\xi^2 \frac{\omega^2}{\omega_2^2}}. \quad (15)$$

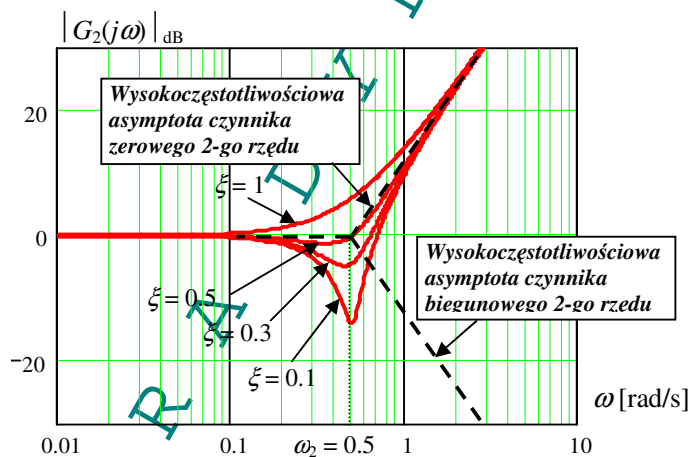
Niskoczęstotliwościowa asymptota (dla $\omega \ll \omega_2$):

$$|G_2(j\omega)| = 1 \Rightarrow |G_2(j\omega)|_{dB} = 20 \log 1 = 0 \text{ dB}. \quad (16)$$

Stąd, niskoczęstotliwościową asymptotą czynnika 2-go rzędu jest linia pozioma 0 dB (Rys. 3). Wysokoczęstotliwościową asymptotą (dla $\omega \gg \omega_2$) opisuje zależność:

$$|G_2(j\omega)| = \frac{\omega^2}{\omega_2^2} \Rightarrow |G_2(j\omega)|_{dB} = 40 \log \omega - 40 \log \omega_2 \quad (17)$$

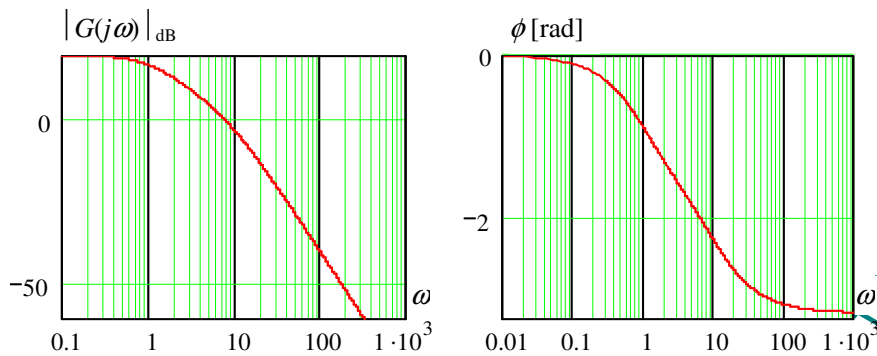
Wyrażenie (17) wskazuje, że wysokoczęstotliwościową asymptotą czynnika 2-go rzędu jest linia prosta o nachyleniu 40 dB/dek, która przecina poziom 0 dB przy częstotliwości rogowej $\omega = \omega_2$ (Rys. 3). Równanie (14) wskazuje, że kąt fazowy ϕ_2 wzrasta w sposób ciągły od 0° przy $\omega = 0$ do 90° kiedy $\omega = \omega_2$ i do 180° gdy $\omega \rightarrow \infty$. Podobnie jak w przypadku czynników 1-go rzędu, zarówno amplitudowy jak i fazowy wykres Bodego czynnika biegunowego 2-go rzędu $(Ts^2 + 2T\xi s + 1)^{-1}$ mają postać zwierciadlanych odbić odpowiadających wykresów czynnika zerowego 2-go rzędu $(Ts^2 + 2T\xi s + 1)$. Własność tę ilustruje Rys.3.



Rys. 3. Rzeczywiste (linie ciągłe) i asymptotyczne (linie przerywane) amplitudowe wykresy Bodego czynników 2-go rzędu ($\omega_1 = 0.5$ rad/s)

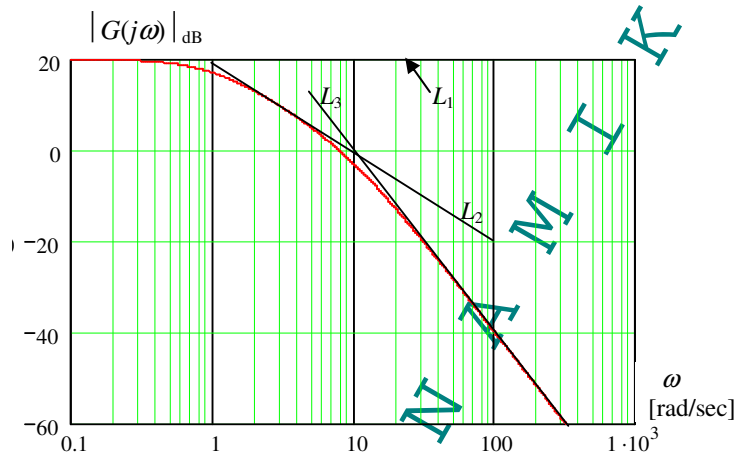
2.3. Przykład wyznaczania przepustowości obiektu dynamicznego na podstawie wykresów Bodego określonych eksperymentalnie

Przykład ilustruje procedurę wyznaczania równania ruchu układu dynamicznego na podstawie wykresów Bodego uzyskanych eksperymentalnie (Rys. 4)



Rys. 4. Eksperymentalne wykresy Bodego identyfikowanego obiektu dynamicznego

Rozwiązanie zostało przedstawione w postaci graficznej na Rys. 5.



Rys. 5. Aproksymacja wykresu Bodego rodziną asymptot

W pierwszym etapie rozwiązania przeprowadza się aproksymację rzeczywistego wykresu Bodego rodziną asymptot. Rys. 5 przedstawia tę aproksymację trzema liniami prostymi: L_1 (początkowa niskoczęstotliwościowa asymptota), L_2 i L_3 . Na podstawie lokalizacji asymptoty L_1 można wyznaczyć wartość współczynnika wzmocnienia k oraz wykładnika n , reprezentującego liczbę zer i biegunów. Punkty przecięcia dwóch kolejnych asymptot wyznaczają wartości częstotliwości rogowych. Na podstawie zmiany nachylenia dwóch kolejnych asymptot przy częstotliwości rogowej można określić typ czynnika. W przypadku wystąpienia czynnika 2-go rzędu, wartość bezwymiarowego współczynnika tłumienia ξ wyznacza się biorąc pod uwagę wartość rzeczywistą amplitudy i jej wartość aproksymowaną przy częstotliwości rogowej. Tablica 2 pokazuje wyniki obliczeń na podstawie aproksymacji przedstawionej na Rys. 5.

Tabela 2. Wyniki obliczeń

Asymptoty	Częstotliwości rogowe [rad/s]	Nachylenie [dB/dek]	Zmiana nachylenia [dB/dek]	Typ czynnika	Przepustowość czynnika
L_1	0	0	bez zmiany	$n = 0$	$k = 10$
L_2	1	-20	-20	biegunowy 1-rz	$(s+1)$
L_3	10	-40	-20	biegunowy 1-rz	$(0,1s+1)$

Wyniki obliczeń przedstawione w Tabeli 2 umożliwiają określenie przepustowości badanego obiektu dynamicznego

$$G(s) = 10 \frac{1}{(s+1)\left(\frac{s}{10} + 1\right)} = \frac{100}{s^2 + 11s + 10} \quad (18)$$

Na podstawie (18) można określić równanie ruchu obiektu

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 11 \frac{dy}{dt} + 10 y = 100 u \quad (19),$$

gdzie: y – sygnał wyjściowy,
 u – sygnał wejściowy.

3. Przebieg ćwiczenia

W pierwszej części ćwiczenia na drodze eksperymentalnej należy wyznaczyć logarytmiczne charakterystyki częstotliwościowe badanego obiektu dynamicznego w postaci wykresów Bodego. Następnie rzeczywistą charakterystykę amplitudową należy aproksymować rodziną asymptot. Na podstawie lokalizacji asymptoty niskoczęstotliwościowej należy wyznaczyć wartość współczynnika wzmocnienia k oraz wykładnika n . Punkty przecięcia dwóch kolejnych asymptot wyznaczają wartości częstotliwości rogowych. Na podstawie zmiany nachylenia dwóch kolejnych asymptot przy częstotliwości rogowej należy określić typ czynnika. W przypadku czynnika 2-go rzędu, wartość bezwymiarowego współczynnika tłumienia ξ należy wyznaczyć biorąc pod uwagę wartość rzeczywistą amplitudy i jej wartość aproksymowaną przy częstotliwości rogowej. W końcowym etapie ćwiczenia należy wyznaczyć przepustowość i na jej podstawie równanie ruchu badanego obiektu dynamicznego.

4. Sprawozdanie z laboratorium powinno zawierać:

1. Cel ćwiczenia.
2. Wyniki pomiarów eksperymentalnych w postaci wykresów Bodego badanego obiektu.
3. Aproksymację asymptotyczną wykresu eksperymentalnego.
4. Wyniki obliczeń.
5. Przepustowość badanego obiektu dynamicznego.
6. Równanie ruchu badanego obiektu dynamicznego.
7. Wnioski.

Literatura

1. Wolovich W.A.: *Automatic Control Systems, Basic Analysis and Design*, Harcour Brace College Publishers, 1994.
2. Ogata K.: *Modern Control Engineering*, IV-th Edition, Prentice Hall, 2002.
3. Takahashi Y., Rabins M., Auslander D. M.: *Sterowanie i systemy dynamiczne*, WNT Warszawa 1976