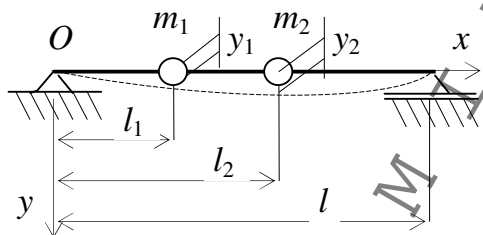


Ćwiczenie 3
DYNAMIKA WIRNIKA DWUMASOWEGO

1. Cel ćwiczenia

Analiza numeryczna drgań wału z osadzonymi elementami o masach skupionych oraz obliczenie prędkości krytycznych wału metodą współczynników wpływowych.

2. Wprowadzenie teoretyczne - drgania swobodne wału z osadzonymi elementami o masach skupionych



Rys.1

Związki pomiędzy statycznymi ugięciami wału a siłami reakcji (Rys.1):

$$y_1 = \delta_{11}P_1 + \delta_{12}P_2 \quad (1)$$

$$y_2 = \delta_{21}P_1 + \delta_{22}P_2$$

W przypadku ogólnym:

$$y_1 = \delta_{11}P_1 + \delta_{12}P_2 + \dots + \delta_{1n}P_n \quad (1a)$$

.....

$$y_n = \delta_{n1}P_1 + \delta_{n2}P_2 + \dots + \delta_{nm}P_m$$

gdzie: δ_{ij} – współczynnik wpływowy wyrażający ugięcie wału w punkcie i wywołane siłą jednostkową przyłożoną w punkcie j , przy czym $\delta_{ij} = \delta_{ji}$.

Macierz współczynników wpływowych dla wału 2-masowego:

$$[\delta] = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix} \quad (2)$$

Ogólnie:

$$[\delta] = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \dots & \delta_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \dots & \delta_{nm} \end{bmatrix} \quad (2a)$$

Stosując rachunek macierzowy równania (1a) można zapisać w następującej postaci:

$$\{y\} = [\delta]\{P\} \quad (3)$$

gdzie: $\{y\} = \{y_1 \ y_2 \ \dots \ y_n\}^T$ – wektor przemieszczeń mas skupionych;

$\{P\} = \{P_1 \ P_2 \ \dots \ P_n\}^T$ – wektor sił reakcji wału na masy skupione.

Mnożąc lewostronnie obie strony (3) przez macierz odwrotną do macierzy podatności otrzymuje się

$$\{P\} = [\delta]^{-1} \{y\} = [k] \{y\} \quad (4),$$

gdzie: $[k] = [\delta]^{-1}$ – macierz sztywności.

W przypadku wału z dwiema masami elementy macierzy sztywności są określone następująco:

$$[k] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\delta_{22}}{\Delta} & -\frac{\delta_{12}}{\Delta} \\ -\frac{\delta_{12}}{\Delta} & \frac{\delta_{11}}{\Delta} \end{bmatrix} \quad (5),$$

gdzie: $\Delta = \delta_{11} \delta_{22} - \delta_{12}^2$.

Macierzowe równanie ruchu drgającego mas skupionych umieszczonych na bezmasowym wale można zapisać w następującej postaci:

$$[m] \{\ddot{y}\} = -[k] \{y\} \quad (6)$$

gdzie: $[m] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & m_n \end{bmatrix}$ – macierz bezwładności.

Dla układu 2-masowego równanie macierzowe (6) można zapisać w postaci układu dwóch równań różniczkowych:

$$m_1 \ddot{y}_1 + k_{11} y_1 + k_{12} y_2 = 0 \quad (7)$$

$$m_2 \ddot{y}_2 + k_{12} y_1 + k_{22} y_2 = 0$$

Przyjmując, że układ opisany równaniami (7) drga według jednej z postaci głównych poszukuje się rozwiązań w postaci harmonicznej

$$y_1 = A_1 \sin(\alpha t); \quad y_2 = A_2 \sin(\alpha t) \quad (8)$$

Po podstawieniu (8) do (7) otrzymuje się układ równań algebraicznych względem niewiadomych A_1 i A_2

$$(k_{11} - \alpha^2 m_1) A_1 + k_{12} A_2 = 0 \quad (9)$$

$$k_{12} A_1 + (k_{22} - \alpha^2 m_2) A_2 = 0$$

Warunkiem istnienia niezerowych rozwiązań na A_1 i A_2 jest zerowanie się wyznacznika charakterystycznego układu równań (9). Otrzymuje się w ten sposób równanie częstości, z którego wyznacza się poszukiwane częstości drgań własnych układu

$$\begin{vmatrix} k_{11} - \alpha^2 m_1 & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} - \alpha^2 m_2 \end{vmatrix} = 0 \quad (10)$$

Po rozpisaniu wyznacznika równanie częstości ma następującą postać:

$$m_1 m_2 \alpha^4 - (k_{11} m_2 + k_{22} m_1) \alpha^2 + k_{11} k_{22} - k_{12}^2 = 0 \quad (11)$$

W ogólnym przypadku wału z n masami równanie częstości można zapisać w postaci:

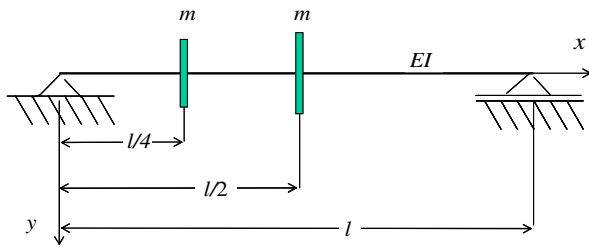
$$|[k] - \alpha^2 [m]| = 0 \quad (12)$$

Stosunki amplitud odpowiadające głównym postaciom drgań układu dwumasowego są określone na podstawie jednego z równań (9). Biorąc pod uwagę na przykład równanie pierwsze otrzymuje się:

$$u_1 = \left(\frac{A_2}{A_1} \right)_1 = \frac{k_{11} - \alpha^2 m_1}{-k_{12}}; \quad u_2 = \left(\frac{A_2}{A_1} \right)_2 = \frac{k_{11} - \alpha^2 m_1}{-k_{12}} \quad (13)$$

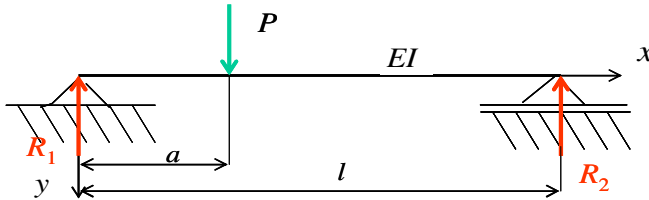
Stosunek amplitud u_1 jest zawsze dodatni, co oznacza że obie masy poruszają się w fazie (zawsze w tę samą stronę). Stosunek amplitud u_2 jest ujemny, co oznacza że obie masy poruszają się w przeciwfazie (w przeciwne strony). Wynika stąd, że drugą postacią drgań wału charakteryzuje przegięcie. Jeden przekrój wału w czasie drgań jest nieruchomy, czyli stanowi węzeł. Ogólnie większej częstości drgań własnych odpowiada większa liczba węzłów i większa energia ugięcia odpowiadająca postaci drgań.

3. Obliczanie elementów macierzy sztywności wału z masami skupionymi (Rys.2)



Rys. 2

Wyznaczenie macierzy współczynników wpływowych (macierzy podatności)



Rys. 3

Reakcje na podporach (Rys.3):

$$\begin{aligned} R_1 + R_2 &= P \\ Pa &= R_2 l \end{aligned} \Rightarrow R_1 = P \frac{l-a}{l}; \quad R_2 = P \frac{a}{l} \quad (a)$$

Równanie różniczkowe osi ugiętej belki:

- dla $x \leq a$:

$$EIy_1'' = -R_2(l-x) + P(a-x) = -P \frac{a}{l}(l-x) + P(a-x)$$

$$EIy_1' = P \frac{a}{l} \frac{x^2}{2} - P \frac{x^2}{2} + C_1 \quad (b)$$

$$EIy_1 = P \frac{a}{l} \frac{x^3}{6} - P \frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2$$

- dla $x > a$:

$$EIy_2'' = -R_2(l-x) = -P \frac{a}{l}(l-x)$$

$$EIy_2' = P \frac{a}{l} \frac{x^2}{2} - Pa x + C_3 \quad (c)$$

$$EIy_2 = P \frac{a}{l} \frac{x^3}{6} - Pa \frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4$$

Warunki brzegowe i warunki ciągłości:

$$\begin{aligned} - \text{dla } x = 0, \quad y_1 &= 0 \Rightarrow C_2 = 0 \\ - \text{dla } x = l, \quad y_2 &= 0 \Rightarrow C_3 l + C_4 = P a l^2 / 3 \\ - \text{dla } x = a, \quad y_1' &= y_2' \Rightarrow C_3 - C_1 = P a^2 / 2 \\ - \text{dla } x = a, \quad y_1 &= y_2 \Rightarrow C_1 a - C_3 a - C_4 = -P a^3 / 3 \end{aligned} \quad (d)$$

Stałe całkowania wyznaczone z układu równań (d):

$$C_1 = P \frac{al}{3} + P \frac{a^3}{6l} - P \frac{a^2}{2}; \quad C_3 = P \frac{al}{3} + P \frac{a^3}{6l}; \quad C_4 = -P \frac{a^3}{6} \quad (e)$$

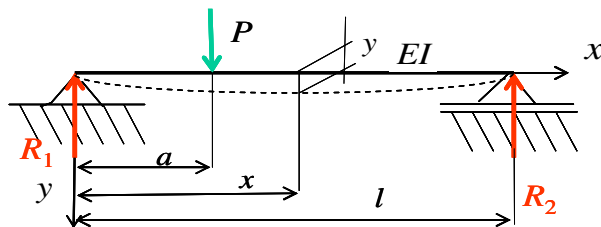
Końcowa postać równania linii ugięcia:

- dla $x \leq a$:

$$EIy_1 = P \frac{a}{l} \frac{x^3}{6} - P \frac{x^3}{6} + P \frac{al}{3} x + P \frac{a^3}{6l} x - P \frac{a^2}{2} x \quad (f)$$

- dla $x \geq a$:

$$EIy_2 = P \frac{a}{l} \frac{x^3}{6} - Pa \frac{x^2}{2} + P \frac{al}{3} x + P \frac{a^3}{6l} x - P \frac{a^3}{6} \quad (g)$$



Rys. 4

Wyznaczenie ugięć belki dla różnych położenia siły (oznaczenia jak na Rys.4)

$$\begin{aligned}
 & \text{- dla } a = l/4, x = l/4 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{3}{256} \frac{Pl^3}{EI} \\
 & \text{- dla } a = l/2, x = l/4 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{11}{768} \frac{Pl^3}{EI} \\
 & \text{- dla } a = l/4, x = l/2 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{11}{768} \frac{Pl^3}{EI} \\
 & \text{- dla } a = l/2, x = l/2 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{48} \frac{Pl^3}{EI}
 \end{aligned} \tag{h}$$

Macierz współczynników wpływowych:

$$[\delta] = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{256} & \frac{11}{768} \\ \frac{11}{768} & \frac{1}{48} \end{bmatrix} \frac{l^3}{EI} \Rightarrow [\delta] = \begin{bmatrix} 1,17 & 1,43 \\ 1,43 & 2,08 \end{bmatrix} 10^{-2} \frac{l^3}{EI} \tag{i}$$

Wyznaczenie macierzy sztywności:

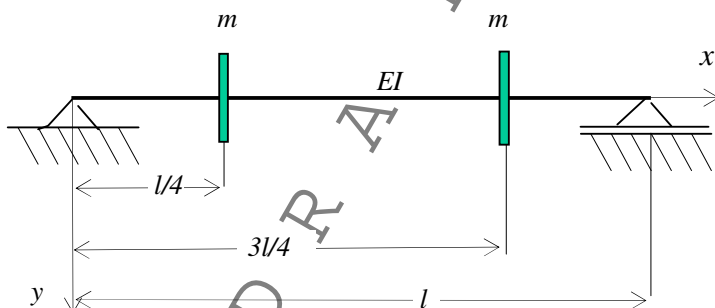
$$[k] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix} = [\delta]^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} \delta_{22} & -\delta_{12} \\ -\delta_{12} & \delta_{11} \end{bmatrix} \tag{j}$$

gdzie: $\Delta = \delta_{11} \delta_{22} - \delta_{12}^2$.

$$[k] = \frac{1}{0,391 \times 10^{-4}} \begin{bmatrix} 2,08 & -1,43 \\ -1,43 & 1,17 \end{bmatrix} \times 10^{-2} \frac{EI}{l^3} = \begin{bmatrix} 5,33 & -3,67 \\ -3,67 & 3,0 \end{bmatrix} \times 10^2 \frac{EI}{l^3} \text{ [N/m]}$$

4. Przebieg ćwiczenia

a) wyznaczyć współczynniki wpływu dla wału przedstawionego na Rys.5 przyjmując następujące dane liczbowe: $E = 2,1 \times 10^{11} \text{ Nm}^2$; $I = 6,362 \times 10^{-11} \text{ m}^4$



Rys. 5

b) przy użyciu arkusza kalkulacyjnego Excel przeprowadzić analizę wpływu zmiany długości wału oraz wielkości mas osadzonych na wale na wartość prędkości krytycznych (zakresy zmian: l (0,5 ÷ 1,5 m); m (0,1 ÷ 1 kg))

c) sformułować wniosek

5. Literatura

1. Parszewski Z.; *Drgania i dynamika maszyn*, WNT Warszawa 1982;
2. Kapitańiak T.: *Wstęp do teorii drgań*. Wydawnictwo Politechniki Łódzkiej, Łódź 1992.
3. Tse F.S., Morse I.E., Hinkle R.T.: *Mechanical Vibrations - Theory and Applications*, Allyn and Bacon Inc., Boston, London, Sydney, Toronto, 1978.