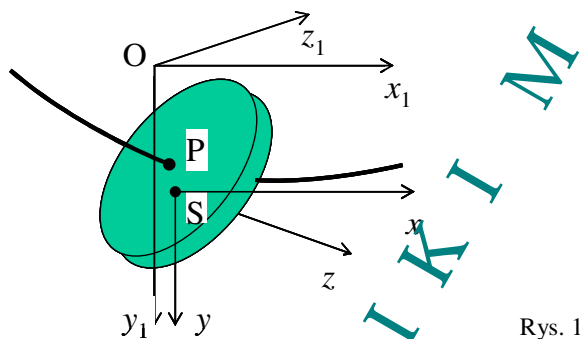


Ćwiczenie 4
BADANIE EFEKTU ŻYROSKOPOWEGO

1. Cel ćwiczenia¹

Badanie wpływu efektu żyroskopowego na prędkości krytyczne wirnika z tarczą osadzoną w dowolnym miejscu bezmasowego wału.

2. Równania ruchu tarczy osadzonej w dowolnym miejscu bezmasowego wału



Rys. 1

Równania ruchu krążka osadzonego w dowolnym miejscu na wale (Rys.1):

- równanie ruchu środka masy krążka:

$$m \frac{d\bar{v}_s}{dt} = \bar{P} \quad (1)$$

- równanie ruchu dookoła środka masy S:

$$\frac{d\bar{K}_c}{dt} = \bar{M}_s \quad (2)$$

W stałym układzie współrzędnych na podstawie (1) otrzymuje się

$$\begin{aligned} m \ddot{x}_s &= P_x; \\ m \ddot{y}_s &= P_y; \\ m \ddot{z}_s &= P_z \end{aligned} \quad (3)$$

Ruch kulisty wzg. środka masy S można opisać w dowolnym układzie osi ruchomych z początkiem w środka masy krążka (Rys.1). Równanie (2) przyjmuje wtedy postać:

$$\frac{d\bar{K}_s}{dt} + \bar{\omega}_u \times \bar{K}_s = \bar{M}_s \quad (4)$$

gdzie: ω_u – prędkość kątowa układu osi Sxyz.

Rzutuując (4) na kierunki osi układu ruchomego otrzymuje się:

$$\begin{aligned} \frac{dK_x}{dt} + \omega_{yu} K_z - \omega_{zu} K_y &= M_x; \\ \frac{dK_y}{dt} + \omega_{zu} K_x - \omega_{xu} K_z &= M_y; \\ \frac{dK_z}{dt} + \omega_{xu} K_y - \omega_{yu} K_x &= M_z \end{aligned} \quad (5)$$

gdzie: M_x, M_y, M_z – sumy momentów sił działających na krążek wzg. osi układu ruchomego.

¹ Instrukcję opracował Krzysztof Marynowski

Dla dowolnego układu osi ruchomych z początkiem w środka masy S jest

$$\begin{aligned} K_x &= B_x \omega_x - B_{xy} \omega_y - B_{xz} \omega_z; \\ K_y &= B_y \omega_y - B_{yx} \omega_x - B_{yz} \omega_z; \\ K_z &= B_z \omega_z - B_{zx} \omega_x - B_{zy} \omega_y \end{aligned} \quad (6)$$

gdzie: B_x, B_y, B_z – masowe momenty bezwładności krążka względem poszczególnych osi,
 B_{xy}, B_{xz}, B_{yz} – momenty odśrodkowe krążka względem poszczególnych osi.

Korzystnie jest przyjąć układ ruchomy tak, by jedna z osi (np. z) stale pokrywała się z osią symetrii i obrotu krążka, ale który nie obraca się wraz z krążkiem wokół tej osi. Krążek obraca się względem osi z z prędkością kątową ω . Wtedy składowe prędkości kątowej krążka i prędkości kątowej ω_0 układu ruchomego są jednakowe. Zachodzą wtedy następujące równości:

$$\begin{aligned} \omega_{zu} &= 0; \quad \omega_x = \omega_{xu}; \quad \omega_y = \omega_{yu}; \\ B_z &= B_0 = const.; \quad B_x = B_y = B = const.; \quad B_{xy} = B_{xz} = B_{yz} = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

Składowe krętu względem osi ruchomych:

$$K_x = B \omega_x; \quad K_y = B \omega_y; \quad K_z = B_0 \omega \quad (8)$$

Uwzględniając (6), (7) i (8) w równaniach (5) otrzymuje się

$$\begin{aligned} B \dot{\omega}_x + B_0 \omega \omega_y &= M_x \\ B \dot{\omega}_y - B_0 \omega \omega_x &= M_y \\ B \dot{\omega} &= M_z \end{aligned} \quad (9)$$

Równania (9) wraz z równaniami (3) opisują ruch tarczy wirnika. Ze względu na to, że sztywność osiowa wału jest zazwyczaj duża względem sztywności zginania, przemieszczenia osiowe można pominąć. Ponadto ostatnie równanie (9) opisuje jednostajny ruch obrotowy wału. Ostatecznie ruch drgający tarczy wirnika jest opisany następującym układem równań:

$$\begin{aligned} m \ddot{x}_S &= P_x \\ B \ddot{\phi}_{yS} - B_0 \omega \dot{\phi}_x &= M_y \\ m \ddot{y}_S &= P_y \\ B \ddot{\phi}_{xS} + B_0 \omega \dot{\phi}_y &= M_x \end{aligned} \quad (10)$$

3. Prędkości krytyczne wirnika z tarczą

Po prawych stronach równań ruchu tarczy wirnika (10) występują siły i momenty sił reakcji wału na tarczę. W celu określenia reakcji wykorzystano metodę współczynników wpływowych. Została wyznaczona macierz podatności wału w miejscu osadzenia tarczy w następującej postaci

$$[\delta] = \begin{bmatrix} \delta_{xx} & \delta_{x\phi} \\ \delta_{\phi x} & \delta_{\phi\phi} \end{bmatrix} \quad (11)$$

gdzie: δ_{xx} - współczynnik wpływowy wyrażający ugięcie wału wywołane siłą jednostkową,
 $\delta_{x\phi}$ - współczynnik wpływowy wyrażający ugięcie wału wywołane momentem jednostkowym,
 $\delta_{\phi x}$ - współczynnik wpływowy wyrażający kąt ugięcia wału wywołany siłą jednostkową,
 $\delta_{\phi\phi}$ - współczynnik wpływowy wyrażający kąt ugięcia wału wywołany momentem jednostkowym.

Macierz odwrotna do macierzy podatności (11) jest macierzą sztywności

$$[k] = [\delta]^{-1} = \frac{1}{\delta_{xx} \delta_{\phi\phi} - \delta_{x\phi} \delta_{\phi x}} \begin{bmatrix} \delta_{\phi\phi} & -\delta_{x\phi} \\ -\delta_{\phi x} & \delta_{xx} \end{bmatrix} \quad (12)$$

Po wprowadzeniu macierzy sztywności $[k]$ równania (10) można zapisać w postaci macierzowej:

$$[m]\{\ddot{r}_s\} + [G]\{\dot{r}_s\} + [k]\{r_s\} = 0 \quad (13)$$

gdzie: $\{r_s\} = \{x_s \varphi_{ys} y_s \varphi_{xs}\}^T$ – wektor przemieszczeń środka masy tarczy,

$\{r_w\} = \{x_w \varphi_{yw} y_w \varphi_{xw}\}^T$ – wektor przemieszczeń wału w miejscu osadzenia tarczy,

$[m]$ – macierz bezwładności,

$[G]$ – macierz żyroskopowa.

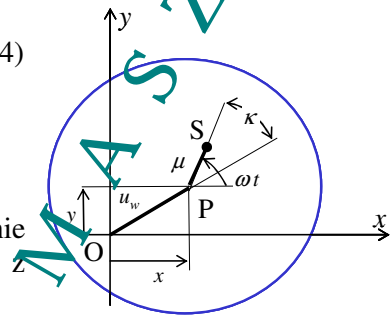
Macierzowe równanie ruchu (13) zapisuje się w postaci zespolonej

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_s \\ \dot{\varphi}_s \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -iB_0\omega \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_s \\ \varphi_s \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & -ik_{12} \\ ik_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_w \\ \varphi_w \end{Bmatrix} = 0 \quad (14)$$

gdzie: $u = x + iy$; $\varphi = \varphi_x + i\varphi_y$

Wskutek istnienia niewyważenia μ środek masy tarczy nie pokrywa się ze środkiem obrotu (Rys.2) i wiruje względem niego z prędkością obrotu wału ω , stąd

$$u_s = u_w + \mu e^{i(\omega t + \kappa)} \quad (15)$$



Rys. 2

Oś tarczy jest skoszona względem osi obrotu o kąt γ , stąd

$$\varphi_s = \varphi_w + \gamma e^{i(\omega t + \delta)} \quad (16)$$

Uwzględniając (15) i (16) w równaniu ruchu (14) otrzymuje się

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_w \\ \dot{\varphi}_w \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -iB_0\omega \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_w \\ \varphi_w \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & -ik_{12} \\ ik_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_w \\ \varphi_w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & B - B_0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mu e^{i\kappa} \\ \gamma e^{i\delta} \end{Bmatrix} \omega^2 e^{i\omega t} \quad (17)$$

Drgania swobodne opisuje rozwiązanie ogólne równania jednorodnego (17). Drgania główne opisują rozwiązania harmoniczne w postaci

$$\begin{Bmatrix} u_w \\ \varphi_w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U_w \\ \Phi_w \end{Bmatrix} e^{i(\alpha t - \beta)} \quad (18).$$

Po wstawieniu (18) do lewej strony (17) z warunku istnienia niezerowych rozwiązań dotyczących amplitud drgań wynika

$$\Delta(\alpha) = \begin{vmatrix} k_{11} - \alpha^2 m & -ik_{12} \\ ik_{21} & B_0\omega\alpha - B\alpha^2 + k_{22} \end{vmatrix} = 0 \quad (19)$$

Równanie (19) jest **równaniem częstości własnych** wirnika. Gdy prędkość kątowna ω osiąga wartość częstości własnych, amplitudy drgań rosną nieograniczenie. Równanie **prędkości krytycznych** można zapisać na podstawie (19) podstawiając $\omega = \alpha$

$$\Delta(\omega) = \begin{vmatrix} k_{11} - \omega^2 m & -ik_{12} \\ ik_{21} & (B_0 - B)\omega^2 + k_{22} \end{vmatrix} = 0 \quad (20)$$

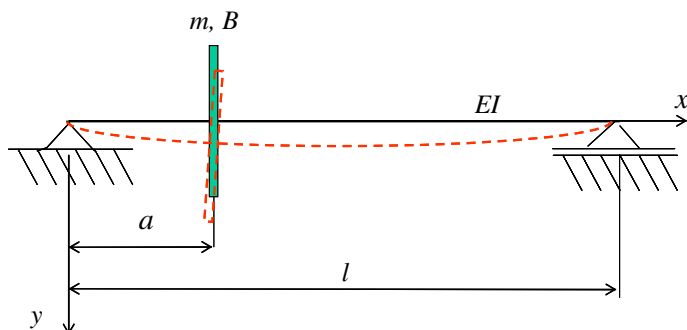
W postaci rozwiniętej równanie prędkości krytycznych :

$$m(B_0 - B)\omega^4 - [(B_0 - B)k_{11} - m k_{22}]\omega^2 - (k_{11}k_{22} - k_{12}^2) = 0 \quad (21)$$

Pierwiastki równania (21):

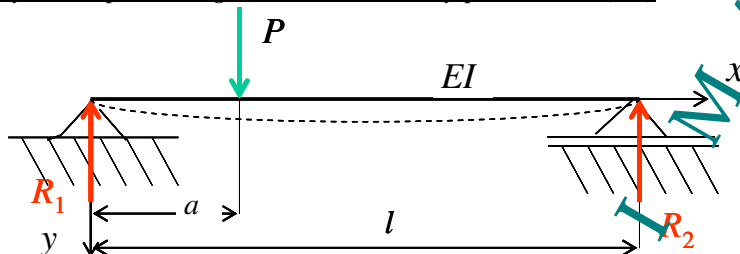
$$\omega_k = \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{k_{11}}{m} - \frac{k_{22}}{B_0 - B} \right) \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{k_{11}}{m} - \frac{k_{22}}{B_0 - B} \right)^2 + 4 \frac{k_{11}k_{22} - k_{12}^2}{m(B_0 - B)}}} \quad (22)$$

4. Obliczanie elementów macierzy sztywności wału z tarczą (Rys.3)



Rys. 3

Wyznaczenie wyrazów pierwszego wiersza macierzy podatności (11)



Rys. 4

Reakcje na podporach (Rys.4):

$$\begin{aligned} R_1 + R_2 &= P \\ Pa &= R_2 l \end{aligned} \Rightarrow R_1 = P \frac{l-a}{l}; \quad R_2 = P \frac{a}{l} \quad (a)$$

Równanie różniczkowe osi ugiętej belki:

- dla $x \leq a$:

$$\begin{aligned} EI y_1'' &= -R_2(l-x) + P(a-x) = -P \frac{a}{l}(l-x) + P(a-x) \\ EI y_1' &= P \frac{a}{l} \frac{x^2}{2} - P \frac{x^2}{2} + C_1 \\ EI y_1 &= P \frac{a}{l} \frac{x^3}{6} - P \frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2 \end{aligned} \quad (b)$$

- dla $x > a$:

$$\begin{aligned} EI y_2'' &= -R_2(l-x) = -P \frac{a}{l}(l-x) \\ EI y_2' &= P \frac{a}{l} \frac{x^2}{2} - Pa x + C_3 \\ EI y_2 &= P \frac{a}{l} \frac{x^3}{6} - Pa \frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4 \end{aligned} \quad (c)$$

Warunki brzegowe i warunki ciągłości:

$$\begin{aligned} - \text{dla } x = 0, \quad y_1 &= 0 & \Rightarrow C_2 = 0 \\ - \text{dla } x = l, \quad y_2 &= 0 & \Rightarrow C_3 l + C_4 = P a l^2 / 3 \\ - \text{dla } x = a, \quad y_1' &= y_2' & \Rightarrow C_3 - C_1 = P a^2 / 2 \\ - \text{dla } x = a, \quad y_1 &= y_2 & \Rightarrow C_1 a - C_3 a - C_4 = -P a^3 / 3 \end{aligned} \quad (d)$$

Stałe całkowania wyznaczone z układu równań (d):

$$C_1 = P \frac{al}{3} + P \frac{a^3}{6l} - P \frac{a^2}{2}; \quad C_3 = P \frac{al}{3} + P \frac{a^3}{6l}; \quad C_4 = -P \frac{a^3}{6} \quad (e)$$

Końcowa postać równań kąta ugięcia i linii ugięcia:

- dla $x \leq a$:

$$EIy_1' = P \frac{a x^2}{l} - P \frac{x^2}{2} + P \frac{al}{3} + P \frac{a^3}{6l} - P \frac{a^2}{2}$$

$$EIy_1 = P \frac{a x^3}{l} - P \frac{x^3}{6} + P \frac{al}{3} x + P \frac{a^3}{6l} x - P \frac{a^2}{2} x \quad (f)$$

- dla $x \geq a$:

$$EIy_2' = P \frac{a x^2}{l} - Pa x + P \frac{al}{3} + P \frac{a^3}{6l}$$

$$EIy_2 = P \frac{a x^3}{l} - Pa \frac{x^2}{2} + P \frac{al}{3} x + P \frac{a^3}{6l} x - P \frac{a^3}{6} \quad (g)$$

Ugięcie wału dla $x = a$:

$$EIy = P \frac{a^4}{3l} - P \frac{2a^3}{3} + P \frac{a^2 l}{3} \Rightarrow y = \frac{a^4 - 2a^3 l + a^2 l^2}{3l} \frac{P}{EI} \quad (h)$$

Kąt ugięcia wału dla $x = a$:

$$EIy' = P \frac{2a^3}{3l} - Pa^2 + P \frac{al}{3} \Rightarrow y' = \frac{2a^3 - 3a^2 l + al^2}{3l} \frac{P}{EI} \quad (i)$$

Przykładowo na podstawie (h) i (i) wyznaczono ugięcie wału i kąt ugięcia dla $a = l/4$.

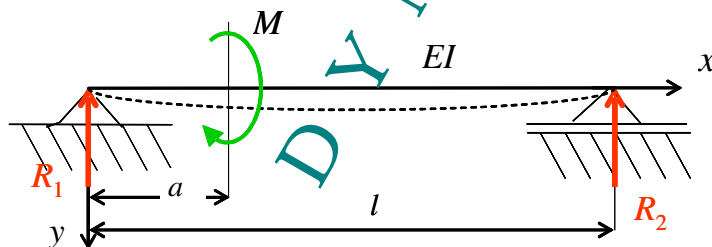
Ugięcie wału dla $a = l/4$:

$$y = \frac{3}{256} \frac{Pl^3}{EI} \quad (j)$$

Kąt ugięcia wału dla $a = l/4$:

$$y' = \frac{1}{32} \frac{Pl^2}{EI} \quad (k)$$

Wyznaczenie wyrazów drugiego wiersza macierzy podatności (11)



Rys. 5

Reakcje na podporach (Rys.5):

$$\begin{aligned} R_1 l + M &= 0 \\ R_2 l - M &= 0 \end{aligned} \Rightarrow R_1 = -\frac{M}{l}; \quad R_2 = \frac{M}{l} \quad (l)$$

Równanie różniczkowe ugiętej belki (Rys.5):

- dla $x \leq a$:

$$EIy_1'' = -R_1 x = -\frac{M}{l} x$$

$$EIy_1' = \frac{M x^2}{l} + C_1 \quad (m)$$

$$EIy_1 = \frac{M x^3}{6} + C_1 x + D_1$$

- dla $x > a$:

$$EIy_2'' = -R_1 x - M = \frac{M}{l} x - M$$

$$EIy_2' = \frac{M}{l} \frac{x^2}{2} - Mx + C_2$$

$$EIy_2 = \frac{M}{l} \frac{x^3}{6} - M \frac{x^2}{2} + C_2 x + D_2$$

Warunki brzegowe i warunki ciągłości:

$$\text{- dla } x = 0, y_1 = 0 \quad \Rightarrow D_1 = 0$$

$$\text{- dla } x = l, y_2 = 0 \quad \Rightarrow C_2 l + D_2 = Ml^2/3 \quad (o)$$

$$\text{- dla } x = a, y_1' = y_2' \quad \Rightarrow C_1 = -Ma + C_2$$

$$\text{- dla } x = a, y_1 = y_2 \quad \Rightarrow C_1 a = -Ma^2/2 + C_2 a + D_2$$

Stałe całkowania wyznaczone z układu równań (o):

$$C_1 = \frac{Ml}{3} + \frac{Ma^2}{2l} - Ma; \quad C_2 = \frac{Ml}{3} + \frac{Ma^2}{2l}; \quad D_2 = -\frac{Ma^2}{2} \quad (p)$$

Końcowa postać równań kąta ugięcia i linii ugięcia:

- dla $x \leq a$:

$$EIy_1' = \frac{M}{l} \frac{x^2}{2} + \frac{Ml}{3} + \frac{Ma^2}{2l} - Ma \quad (r)$$

$$EIy_1 = \frac{M}{l} \frac{x^3}{6} + \left(\frac{Ml}{3} + \frac{Ma^2}{2l} - Ma \right) x$$

- dla $x \geq a$:

$$EIy_2' = \frac{M}{l} \frac{x^2}{2} - Mx + \frac{Ml}{3} + \frac{Ma^2}{2l} \quad (s)$$

$$EIy_2 = \frac{M}{l} \frac{x^3}{6} - M \frac{x^2}{2} + \left(\frac{Ml}{3} + \frac{Ma^2}{2l} \right) x - \frac{Ma^2}{2}$$

Ugięcie wału dla $x = a$:

$$y = \frac{2a^3 + a^2 l - 3a^2 l}{3l} \frac{M}{EI} \quad (t)$$

Kąt ugięcia wału dla $x = a$:

$$y' = \frac{3a^2 + l^2 - 3al}{3l} \frac{M}{EI} \quad (v)$$

Przykładowo na podstawie (t) i (v) wyznaczono ugięcie wału i kąt ugięcia dla $a = l/4$.

Ugięcie wału dla $a = l/4$:

$$y = \frac{1}{32} \frac{Ml^2}{EI} \quad (w)$$

Kąt ugięcia wału dla $a = l/4$:

$$y_1' = \frac{7}{48} \frac{Ml}{EI} \quad (x)$$

Przykładowa macierz współczynników wpływowych (macierz podatności) dla $a = l/4$ ma postać:

$$\begin{bmatrix} y \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{256} \frac{l^3}{EI} & \frac{1}{32} \frac{l^2}{EI} \\ \frac{1}{32} \frac{l^2}{EI} & \frac{7}{48} \frac{l}{EI} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ M \end{bmatrix} \Rightarrow [\delta] = \begin{bmatrix} \frac{3}{256} \frac{l^3}{EI} & \frac{1}{32} \frac{l^2}{EI} \\ \frac{1}{32} \frac{l^2}{EI} & \frac{7}{48} \frac{l}{EI} \end{bmatrix} \quad (y)$$

Odpowiadająca macierz sztywności:

$$[k] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} \delta_{22} & -\delta_{12} \\ -\delta_{12} & \delta_{11} \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} \frac{7}{48} \frac{l}{EI} & -\frac{1}{32} \frac{l^2}{EI} \\ -\frac{1}{32} \frac{l^2}{EI} & \frac{3}{256} \frac{l^3}{EI} \end{bmatrix} \quad (z)$$

gdzie: $\Delta = \delta_{11} \delta_{22} - \delta_{12}^2 = \frac{5}{4096} \frac{l^4}{E^2 I^2}$

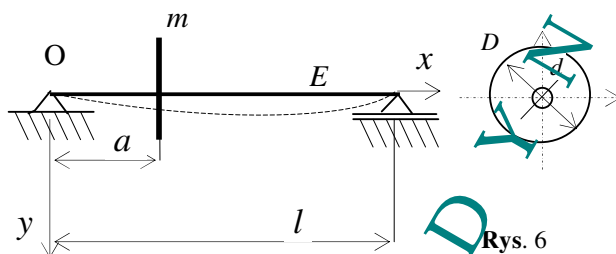
$$[k] = \frac{4096 E^2 I^2}{5 l^4} \begin{bmatrix} \frac{7}{48} \frac{l}{EI} & -\frac{1}{32} \frac{l^2}{EI} \\ -\frac{1}{32} \frac{l^2}{EI} & \frac{3}{256} \frac{l^3}{EI} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1792}{15 l^2} & -\frac{123}{5 l} \\ -\frac{123}{5 l} & \frac{48}{5} \end{bmatrix} \frac{EI}{l} \quad (z)$$

5. Przebieg ćwiczenia

- 1) Stosując metodę Rayleigh'a wyznaczyć ogólną formułę opisującą i -tą częstość drgań własnych giętych obustronnie podpartego wału z tarczą, przedstawionego na Rys. 6, dla dowolnego położenia tarczy względem podpór (odległość a).

Przyjąć następujące dane liczbowe:

- $m = 1,260$ kg – masa tarczy;
- $m_w = 0,139$ kg – masa wału;
- $l = 0,63$ m – długość wału;
- $d = 0,006$ m – średnica wału;
- $E = 2,1 \times 10^{11}$ Nm⁻² – moduł Younga.



Równanie linii ugięcia wału:

$$y(x) = A \sin \frac{i\pi x}{l}$$

Rys. 6

- 2) Porównać otrzymane wyniki obliczeń częstości własnych z obliczeniami wykonanymi przy pomocy szablonu arkusza kalkulacyjnego Excel z zastosowaniem współczynników wpływu oraz przeprowadzić analizę wpływu efektu żyroskopowego na prędkości krytyczne wirnika dla różnych miejsc osadzenia tarczy na wale.
- 3) Dokonać obserwacyjnego pomiaru 1-szej częstości krytycznej na stanowisku eksperymentalnym dla wybranych miejsc osadzenia tarczy na wale.
- 4) Przeanalizować doświadczalnie wpływ efektu żyroskopowego na prędkości krytyczne dla różnych miejsc osadzenia tarczy na wale i porównać z wynikami obliczeń.
- 5) Sformułować wnioski.

6. Literatura

1. Parszewski Z., *Drgania i dynamika maszyn*, WNT Warszawa 1982;
2. Kapitaniak T.: *Wstęp do teorii drgań*. Wydawnictwo Politechniki Łódzkiej, Łódź 1992.
3. Tse F.S., Morse I.E., Hinkle R.T.: *Mechanical Vibrations - Theory and Applications*, Allyn and Bacon Inc., Boston, London, Sydney, Toronto, 1978.