

Dynamika nieliniowa

1. Cel ćwiczenia

Ćwiczenie ma na celu pokazanie zachowań nieliniowych w układach dynamicznych na przykładzie wahadła, oscylatora Duffinga oraz oscylatora elektrycznego Chua. Porównanie wyników otrzymanych na podstawie badań numerycznych z układem rzeczywistym (dla oscylatora Chua).

2. Podstawy teoretyczne

Obwód Chua

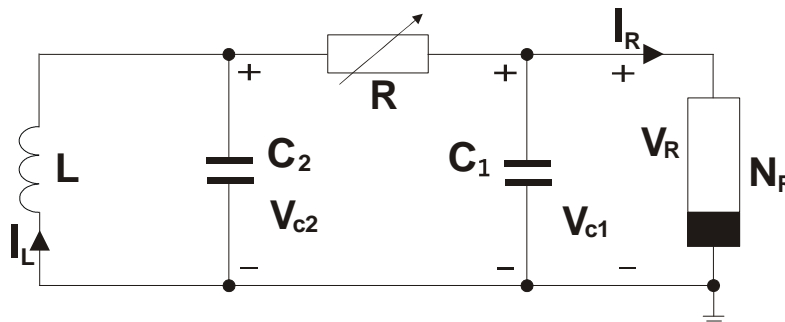
Jako przedmiot badań eksperymentalnych i numerycznych wybrano szeroko opisany w literaturze oscylator Chua, którego schemat jest pokazany na rysunku 6.1. Jest to przykład prostego układu elektrycznego, w którym można zaobserwować zachowania chaotyczne. Układ ten zbudowany jest z następujących elementów liniowych: cewki indukcyjnej L , dwóch kondensatorów C_1 i C_2 oraz opornika R (gałąź dodatnia oscylatora). W układzie znajduje się również opornik nieliniowy N_R (gałąź ujemna oscylatora), którego charakterystyka przedstawiona jest na rysunku 6.2. Jak widać na rysunku charakterystyka ta jest przedziałami liniowa. Widzimy, że w punktach $\pm E_1$ oraz $\pm E_2$ następuje zmiana tangensa kąta nachylenia G [Ω^{-1}] charakterystyki. Stąd, można ją zdefiniować przy pomocy następującej funkcji:

$$f(V_{C_1}) = G_2 V_{C_1} + 0,5(G_1 - G_2) \left(|V_{C_1} + E_2| - |V_{C_1} - E_2| \right) + 0,5(G_0 - G_1) \left(|V_{C_1} + E_1| - |V_{C_1} - E_1| \right) \quad (6.1)$$

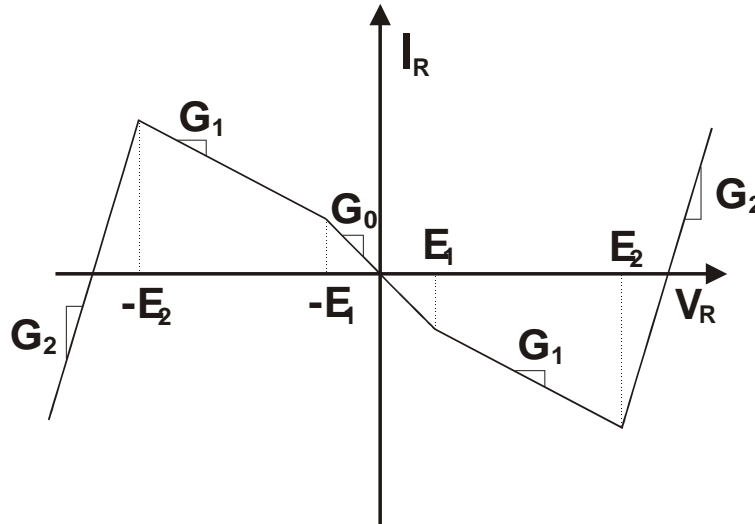
Dynamikę układu Chua opisuje następujący układ trzech równań różniczkowych pierwszego rzędu:

$$\begin{cases} C_1 \frac{dV_{C_1}}{dt} = \frac{1}{R} (V_{C_2} - V_{C_1} - f(V_{C_1})) \\ C_2 \frac{dV_{C_2}}{dt} = \frac{1}{R} (V_{C_1} - V_{C_2}) + I_L \\ L \frac{dI_L}{dt} = -V_{C_2} \end{cases} \quad (6.2)$$

Obwód typu Chua zbudowany jest, zatem z dwóch równoważących się gałęzi; pierwsza gałąź dodatniego sprzężenia zwrotnego posiadająca elementy liniowe: L ; C_1 ; C_2 ; R , druga gałąź posiadająca jeden element nieliniowy oznaczony symbolem N_R , tworzący w obwodzie ujemne sprzężenie.



Rys 6.1. Obwód oscylatora elektrycznego typu Chua. I_L - prąd płynący przez cewkę, I_R - prąd płynący przez opornik V_{C1} - napięcie na kondensatorze C_1 , V_{C2} - napięcie na kondensatorze C_2 .



Rys.6.2. Charakterystyka opornika nieliniowego N_R .

Parametry układu rzeczywistego

- $C_1 = 10 \text{ nF}$,
- $C_2 = 99.34 \text{ nF}$,
- $L_1 = 18.46 \text{ mH}$,
- $R_1 = 1.5 \div 2.1 \text{ k}\Omega$.
- $G_0 = 77 \text{ m}\Omega^{-1}$, $G_1 = -0.41 \text{ m}\Omega^{-1}$, $G_2 = 3.59 \text{ m}\Omega^{-1}$,
- $E_1 = 1.01 \text{ V}$, $E_2 = 6.77 \text{ V}$,

Bezwymiarowy układ Chua

Analiza matematyczna a w szczególności obliczanie wykładników Lapunowa rozpatrywanego układu dynamicznego wymaga matematycznego opisu w postaci bezwymiarowych równań różniczkowych. Układ (6.2) można zapisać w takiej postaci po zastosowaniu następujących podstawień:

$$v = \frac{1}{E_1} V, \quad u = \frac{1}{E_1} U, \quad i = \frac{R}{E_1} I, \quad \tau = \frac{1}{C_2 R} t, \quad (6.3)$$

Stąd, pochodne wielkości bezwymiarowych v, u, i po bezwymiarowym czasie τ wyrażają się wzorami:

$$\frac{dv}{d\tau} = \frac{C_2 R}{E_1} \frac{dV}{dt}, \quad \frac{du}{d\tau} = \frac{C_2 R}{E_1} \frac{dU}{dt}, \quad \frac{di}{d\tau} = \frac{C_2 R^2}{E_1} \frac{dI}{dt}. \quad (6.4)$$

Podstawiając wzory (6.3) oraz (6.4) do równań (6.2) otrzymujemy

$$\begin{cases} \frac{dv}{d\tau} = \frac{C_2}{C_1} (u - v - f(v)), \\ \frac{du}{d\tau} = v - u + i, \\ \frac{di}{d\tau} = -\frac{C_2 R^2}{L} u, \end{cases} \quad (6.5a)$$

$$f(v) = RG_2 v + 0,5R(G_1 - G_2) \left(\left| v + \frac{E_2}{E_1} \right| - \left| v - \frac{E_2}{E_1} \right| \right) + 0,5R(G_0 - G_1) (|v+1| - |v-1|). \quad (6.5b)$$

Wprowadzając bezwymiarowe parametry znane z literatury przedmiotu:

$$\alpha = \frac{C_2}{C_1}, \quad \beta = \frac{C_2 R^2}{L}, \quad m_0 = RG_0, \quad m_1 = RG_1, \quad m_2 = RG_2,$$

układ (6.2) można ostatecznie zapisać w postaci:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{d\tau} &= \alpha \left\{ u - v - \left[m_2 v + 0,5(m_1 - m_2) \left(\left| v + \frac{E_2}{E_1} \right| - \left| v - \frac{E_2}{E_1} \right| \right) + 0,5(m_0 - m_1) (|v+1| - |v-1|) \right] \right\}, \\ \frac{du}{d\tau} &= v - u + i, \\ \frac{di}{d\tau} &= -\beta u. \end{aligned} \quad (6.6)$$

3. Przebieg ćwiczenia

- a) Omówienie najważniejszych pojęć w dynamice nieliniowej
- b) Obliczenie punktów stałych oscylatorów Chua i Duffinga
- c) Oscylator Duffing jako przykład nieliniowego układu dynamicznego
 1. Dziwny atraktor chaotyczny
 2. Wykres bifurkacyjny
- d) Oscylator Chua
 1. Numeryczna symulacja
 2. Pokaz układu rzeczywistego

4. Sprawozdanie

Sprawozdanie powinno zawierać równania obu układów dynamicznych wraz z parametrami symulacji, parametry oscylatora Chua (układ rzeczywisty), obliczenia punktów stałych, przykładowe rysunki płaszczyzny fazowej.

5. Literatura

Kapitaniak T. Wstęp do teorii drgań, Wyd. PŁ, Łódź 2005

Kiełbasiński W.: Praca doktorska pt: „Metoda doświadczalnej oceny charakteru ruchu układów dynamicznych z wykorzystaniem zjawiska synchronizacji”, Łódź 2005