

Ćwiczenie 7

Identyfikacja oporu wiskotycznego z uwzględnieniem wpływu tarcia suchego

Cel ćwiczenia:

Estymacja współczynnika tłumienia wiskotycznego z uwzględnieniem wpływu tarcia suchego (Coulomba) na podstawie przebiegów czasowych drgań swobodnych tłumionych z wykorzystaniem zmodyfikowanej koncepcji dekrementu tłumienia.

1. Wprowadzenie

Tłumienie drgań jest jednym z przejawów rozproszenia energii mechanicznej nieodłącznie związanym z ruchem układów mechanicznych. Od dawna interesowano się procesami tłumienia. Rozwój badania drgań wpływa także i na badanie procesów ich tłumienia. Badanie tłumienia jest jednak opóźnione w stosunku do innych aspektów badania ruchu drgającego. Tak się składa, że siły tłumiące są małe w stosunku do innych sił, a jednocześnie ich matematyczny opis jest bardziej złożony, dlatego w pierwszym przybliżeniu z reguły tłumienie pomijano. Następnym krokiem jest wprowadzenie tłumienia liniowego wiskotycznego, co ułatwia analizę. W rzeczywistości procesy powodujące tłumienie drgań są bardzo złożone i wiedza o nich jest niepełna. Z drugiej strony, rola tłumienia jest duża, choć nie zawsze doceniana. Stosowanie specjalnych tłumików powoduje zwiększenie kosztu wytwarzania i eksploatacji maszyny, a tłumiki stają się dodatkowym źródłem kłopotów. Należałoby dążyć do uwzględnienia w maksymalnym stopniu naturalnych sposobów tłumienia, a eliminowania specjalnych tłumików tam, gdzie nie jest to konieczne. Wymaga to dobrej znajomości tłumienia drgań i podstawowych mechanizmów rozpraszania energii wpływających na drgania.

Generalnie w układach mechanicznych można wyróżnić trzy podstawowe rodzaje tłumienia:

- 1) tłumienie wiskotyczne,
- 2) tarcie suche,
- 3) tarcie wewnętrzne.

Z punktu widzenia dynamiki ruchu drgającego kluczowe znaczenie mają dwie pierwsze z wymienionych sił oporu, które są szczegółowo opisane poniżej.

2. Tłumienie drgań liniowym oporem wiskotycznym

Weźmy pod uwagę układ o jednym stopniu swobody, o liniowej charakterystyce sprężystej i liniowym tłumieniu. Charakterystyka tłumienia jest liniową funkcją prędkości

$$R(\dot{x}) = c\dot{x}. \quad (2.1)$$

Tłumienie tego rodzaju występuje przy ruchu ciał w płynie lepkiem przy niedużych prędkościach. Ten opis tłumienia może być z większym lub mniejszym przybliżeniem

stosowany do opisu tłumienia wielu układów. Ze względu na łatwość analizy jest szeroko stosowany, jako sposób zastępczy dla przybliżonego opisu tłumienia przy bardziej złożonych zjawiskach tłumienia. Równanie ruchu tłumionego wiskotycznie układu o jednym stopniu swobody) ma postać:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0, \quad (2.2)$$

gdzie: m – jest masą, c – współczynnikiem oporu lepkiego, k –współczynnikiem siły sprężystości (sztywność). Równanie to sprowadza się do postaci

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega^2 x = 0, \quad (2.3)$$

gdzie $2h = \frac{c}{m}$, $\omega^2 = \frac{k}{m}$.

Rozwiązania szczególne równania (2.3) można poszukiwać w postaci funkcji wykładniczej:

$$x = e^{rt}, \quad \dot{x} = re^{rt}, \quad \ddot{x} = r^2 e^{rt}. \quad (2.4)$$

Po podstawieniu równań (2.4) do równania ruchu (2.3) otrzymujemy:

$$r^2 + 2h + \alpha^2 = 0. \quad (2.5)$$

Równanie (2.5) jest rozwiązaniem charakterystycznym i posiada dwa pierwiastki:

$$r_{1,2} = -h \pm \sqrt{h^2 - \alpha^2}. \quad (2.6)$$

Całka ogólna równania (2.3) jest kombinacją liniową rozwiązań szczególnych

$$x = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}, \quad (2.7)$$

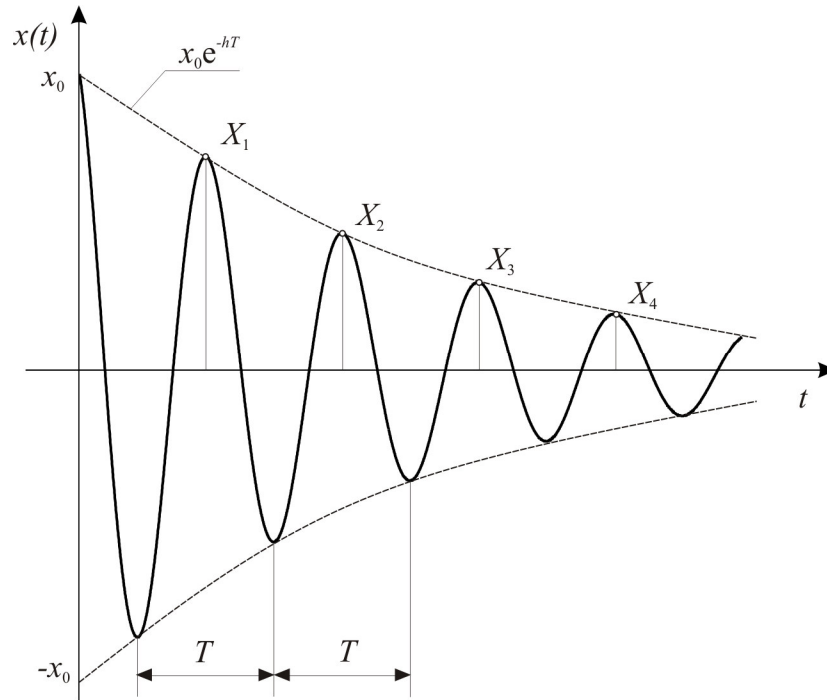
gdzie C_1 i C_2 to dowolne stałe całkowania.

Przebieg ruchu przedstawiony jest na Rys. 1.1. Widać, że ruch ma cechy gasnącego ruchu drgającego. Charakter rozwiązania równania zależy od stosunku parametrów h oraz ω

- 1) jeżeli $h > \omega$ to $x(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$, jest to przypadek tłumienia nadkrytycznego (dwa pierwiastki rzeczywiste i ujemne r_1 i r_2);
- 2) jeżeli $h = \omega$ to $x(t) = c_1 e^{-ht} + c_2 e^{-ht}$, jest to przypadek tłumienia krytycznego (jeden podwójny pierwiastek $r_1 = r_2 = -h$);
- 3) jeżeli $h < \omega$ to jest to przypadek tłumienia niezbyt intensywnego, za to ma on zasadnicze znaczenie w drganiach (istnieją wówczas pierwiastki zespolone równania (2.5) $r_1, r_2 = -h \pm i\omega_d$), gdzie:

$$\sqrt{\alpha^2 - h^2} = \omega_d. \quad (2.8)$$

Symbol ω_t oznacza częstość kołową drgań swobodnych tłumionych.



Rys. 1.1. Ruch układu tłumionego wiskotycznie

W przypadku trzecim ($h < \omega$) istotne znaczenie odgrywa wielkość zwana logarytmicznym dekrementem tłumienia. Ma ona praktyczne zastosowanie w wyznaczaniu współczynnika tłumienia h . Logarytmiczny dekrement tłumienia wyznaczany jest ze wzoru

$$D = \ln \frac{x(t)}{x(t+T)} = \ln e^{hT} = hT. \quad (2.9)$$

Jest to stosunek dwóch kolejnych amplitud w czasie gdy układ wykona pełen cykl. Logarytmiczny dekrement tłumienia określa szybkość zanikania drgań.

Z powyższych rozważań wynika, że pojęcie okresu drgań swobodnych tłumionych wyraża się wzorem

$$T = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - h^2}}. \quad (2.10)$$

3. Tłumienie drgań tarciem suchym

Przy analizie drgań układów mechanicznych, tłumionych tarciem suchym, przyjmuje się zwykle, że siła tarcia ma wartość stałą. Jest to słuszne w przypadku, gdy nacisk między powierzchniami ciernymi jest w czasie ruchu stały.

Siła tarcia F_t jest opisana wzorem

$$F_t = F \operatorname{sgn}(\dot{x}), \quad (3.1)$$

gdzie $F = N\mu = \text{const}$, μ – współczynnik tarcia, N – siła nacisku.

Takie najprostsze zdefiniowanie siły tarcie jako stałej funkcji prędkości względnej jest zgodne z klasycznym modelem Coulomba.

Jeżeli układ taki, wychylony z położenia równowagi, wykonuje ruch pod działaniem siły sprężystej $f(x)$, to siłę P , przeciwną do czynnych sił działających na masę m określić można wzorem

$$P = -m\ddot{x} = f(x) + F \operatorname{sgn}(\dot{x}). \quad (3.2)$$

Biorąc pod uwagę swobodny ruch układu z tarciem suchym i ograniczając się do liniowej siły sprężystej oraz pomijając tarcie wiskotyczne otrzymamy różniczkowe równanie ruchu w postaci

$$m\ddot{x} + kx + F \operatorname{sgn}(\dot{x}) = 0. \quad (3.3)$$

Przyjmijmy warunki początkowe

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0. \quad (3.4)$$

Aby ruch mógł się rozpocząć, siła sprężysta musi być większa od oporu tarcia. Musi być wtedy spełniony warunek

$$kx_0 > \mu N, \quad (3.5)$$

czyli

$$x_0 > \frac{\mu N}{k} = x_k \quad (3.6)$$

Jeżeli warunek (3.6) nie jest spełniony, ciało pozostanie w spoczynku. Załóżmy, że warunek ten został spełniony. Ciało rozpoczyna wtedy ruch w lewo. Ponieważ przy tym ruchu prędkość jest ujemna, równanie ruchu ma postać

$$m\ddot{x} = -kx + \mu N = -k\left(x - \frac{\mu N}{k}\right) = -k(x - x_k). \quad (3.7)$$

Dzieląc stronami przez m i oznaczając

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (3.8)$$

sprowadza się równanie do postaci

$$\ddot{x} + \omega^2(x - x_k) = 0. \quad (3.9)$$

Przebieg drgań tłumionych tarcie suchym przedstawiony jest na Rys. 2.1. Jeżeli ruch rozpoczął się od położenia x_0 , następne wychylenie w połowie 1-go cyklu (wartość A_1 na Rys. 2.1) równe jest $x_0 - 2x_k$, a kolejne po 1-szym cyklu (wartość A_2 na Rys. 2.1) wynosi $x_0 - 4x_k$. Jak widać przy ruchu tłumionym za pomocą tarcia suchego amplituda maleje z każdym wahaniami (połową cyklu) o tę samą odległość $2x_k$. Wynika z tego, że po pewnej skończonej liczbie wahaniec kolejna amplituda stanie się mniejsza od x_k i ruch ustanie, gdyż przy małym wychyleniu siła sprężyny jest mniejsza od siły tarcia.

4. Estymacja współczynnika tłumienia wiskotycznego z uwzględnieniem tarcia suchego

Zaprezentowaną metodę separacji tarcia coulombowskiego od wiskotycznego można traktować jako udoskonaloną wersję metody klasycznego logarytmicznego dekrementu tłumienia drgań [2,3,4]. Również bazuje ona na zapisie drgań swobodnych, tłumionych układu o jednym stopniu swobody. Obliczanie dekrementu amplitudy drgań w kolejnych cyklach daje możliwość ocenienia efektu tarcia suchego. Metoda ta z założenia jest przeznaczona do stosowania w układach, w których dominuje tarcie wiskotyczne i coulombowskie, a przypadek tego eksperymentu tej sytuacji odpowiada.

Rozważamy układ modelowany jako liniowy układ o jednym stopniu swobody, opisany równaniem:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx + f(\dot{x}) = 0, \quad (4.1)$$

gdzie x jest współrzędną opisującą przemieszczenie, m , c i k są odpowiednio masą, współczynnikiem tłumienia wiskotycznego i sztywnością sprężyny, a $f(\dot{x})$ jest przyjętym modelem tarcia Coulomba. Równowaga układu jest osiągnięta w chwili, kiedy $\ddot{x} = \dot{x} = 0$. Położenia równowagi są określone zależnością:

$$-x_{st} \leq x \leq x_{st}, \quad x_{st} = f_{st} / k.$$

Równanie (4.1) jest możliwe do rozwiązania przedziałami i ma formę:

$$\ddot{x} + 2\xi\omega\dot{x} + \omega^2 x = -\omega^2 x_k, \quad \dot{x} > 0, \quad (4.2)$$

oraz

$$\ddot{x} + 2\xi\omega\dot{x} + \omega^2 x = +\omega^2 x_k, \quad \dot{x} < 0, \quad (4.3)$$

gdzie $\omega^2 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, $2\xi\omega = \frac{c}{m}$, oraz $x_k = \frac{f_k}{m}$.

Przy warunku początkowym $x(t_0) = X_0 > x_{st}$ oraz $\dot{x}(t_0) = 0$ ruch rozpoczyna się z prędkością ujemną. Rozwiązaniem równania (3) jest

$$x(t) = (X_0 - x_k) e^{-\xi\omega(t-t_0)} (\cos \omega_d (t-t_0) + \beta \sin \omega_d (t-t_0)) + x_k. \quad (4.4)$$

Tutaj $\omega_d = \omega\sqrt{1-\xi^2}$ jest częstotliwością własną drgań tłumionych, a wartość β określa wzór:

$$\beta = \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}. \quad (4.5)$$

Rozwiązanie (4.4) jest ważne do chwili, kiedy prędkość wróci do wartości zerowej, następuje to w czasie określonym przez $t=t_1=t_0+\pi/\omega_d$, przy wartości przemieszczenia:

$$X_1 = x(t_1) = -e^{-\beta\pi} X_0 + (e^{-\beta\pi} + 1)x_k. \quad (4.6)$$

Przy $X_1 < -x_{st}$ następuje odwrócenie kierunku ruchu i poślizg trwa z dodatnią wartością prędkości – równanie (4.3). Rozwiązanie ma wtedy formę:

$$x(t) = (X_1 + x_k) e^{-\xi\omega(t-t_1)} (\cos \omega_d(t-t_1) + \beta \sin \omega_d(t-t_1)) - x_k. \quad (4.7)$$

Jego ważność trwa do momentu, kiedy prędkość spadnie znowu do zera, co nastąpi w czasie $t=t_2=t_1+\pi/\omega_d$, a wartość przemieszczenia będzie wynosić:

$$X_2 = x(t_2) = -e^{-\beta\pi} X_1 - (e^{-\beta\pi} + 1)x_k. \quad (4.8)$$

Jeśli $X_2 > x_{st}$, to ruch będzie trwał dalej.

Taki opis można kontynuować do $-x_{st} \leq X_n \leq x_{st}$, kiedy ruch zatrzymuje się. Iteracje takie prowadzą do równania odwzorowującego kolejne wartości maksimów i minimów w rozwiązaniu:

$$X_i = -e^{-\beta\pi} X_{i-1} + (-1)^{i-1} (e^{-\beta\pi} + 1)x_k, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.9)$$

Na podstawie analizy takich sekwencji minimów i maksimów można dokonać izolacji efektu tłumienia wiskotycznego oraz tarcia Coulombowskiego. Suma kolejnych wartości ekstremów kasuje efekt tarcia suchego, biorąc pod uwagę relację dwu kolejnych sum dostaje się:

$$\frac{X_i + X_{i+1}}{X_{i-1} + X_i} = e^{-\beta\pi}. \quad (4.10)$$

Dekrement logarytmiczny daje wartość tłumienia wiskotycznego:

$$\log \frac{X_i + X_{i+1}}{X_{i-1} + X_i} = -\beta\pi. \quad (4.11)$$

Po wyznaczeniu wartości β można określić współczynnik tłumienia wiskotycznego ξ oraz parametr tarcia suchego x_k z równania (4.9). Problemem w eksperymencie w układzie rzeczywistym może być trudność określenia położenia, w którym sprężyna nie jest napięta. Pomiaru mogą posiadać wtedy przesunięcie ze względu na sformułowanie

zagadnienia. Można takie przesunięcie usunąć, analizując nie wartości ekstremów, ale różnice pomiędzy nimi: Y_i :

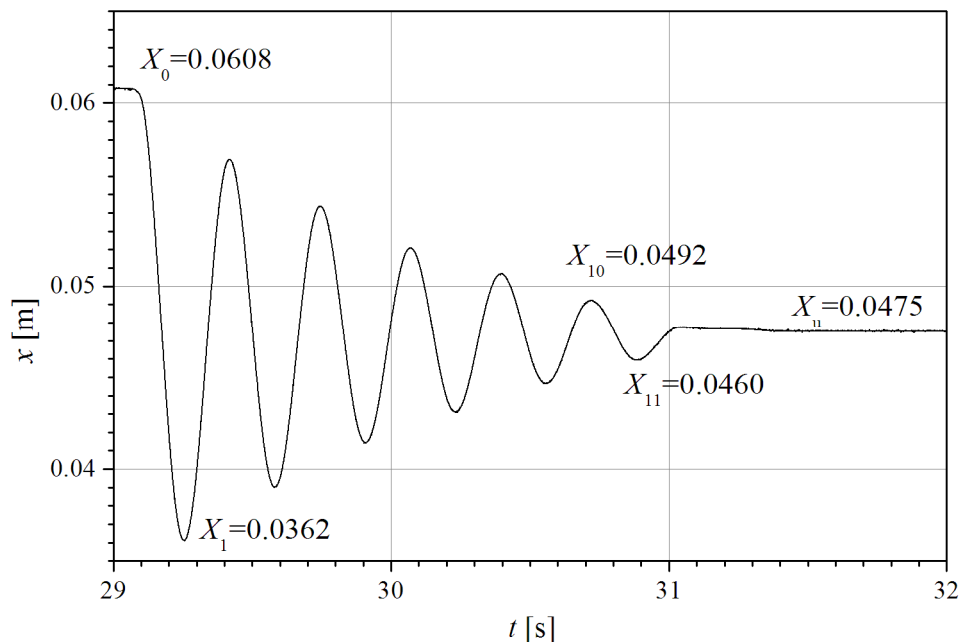
$$Y_{i+1} - Y_i = -e^{-\beta\pi} (Y_i - Y_{i-1}) + 2(-1)^i (e^{-\beta\pi} + 1)x_k, \quad i = 1, 2, \dots, n-1. \quad (4.12)$$

Drogą sumowania można wyeliminować udział tarcia suchego. Alternatywne równanie dekrementu jest wtedy:

$$\frac{Y_{i+1} - Y_{i-1}}{Y_i - Y_{i-2}} = e^{-\beta\pi}. \quad (4.13)$$

lub:

$$\log \frac{Y_{i+1} - X_{i-1}}{Y_i + Y_{i-2}} = -\beta\pi. \quad (4.14)$$



Rys. 4.1. Przykładowy przebieg drgań swobodnych tłumionego oscylatora

Na rysunku pokazano przykładowy przebieg zarejestrowanych drgań swobodnych tłumionego oscylatora. Poddano go następnie analizie w sposób opisany powyżej. Sygnałem mierzonym było przemieszczenie. Jak widać, układ wykonał sześć pełnych cykli drgań tłumionych do momentu zatrzymania w położeniu $X_u = 0.0475$ m. Stosując wzór (4.13) dla następujących po sobie amplitud maksymalnych przemieszczeń, wyrażenie opisujące dekrement logarytmiczny redukuje się do postaci:

$$\frac{Y_{10} + Y_{11}}{Y_0 + Y_1} = e^{-10\beta\pi}, \quad (4.15)$$

gdzie Y_i ($i=0,1,\dots,10,11$) są rzeczywistymi przemieszczeniami oscylatora względem położenia ustalonego X_u , czyli $Y_i = X_i - X_u$. Zatem w tym przebiegu można odczytać, że

$Y_0=0.0133$, $Y_I=-0.0113$, $Y_{I0}=0.0017$, i $Y_{II}=-0.0015$, stąd wartości parametrów charakteryzujących tłumienie wiskotyczne wynoszą $\beta=0.0733$ (wzór (4.15)), $\xi=0.0730$ (wzór (4.5)). Oszacowany rzeczywisty współczynnik tłumienia $c=2m\omega\xi=18.97$ kg/s. Po uśrednieniu danych z kilkunastu zebranych przebiegów takich drgań otrzymano ostatecznie wartość współczynnika tłumienia wiskotycznego wynoszącą $c=16.85$ kg/s.

5. Przebieg ćwiczenia

Obiektem identyfikacji jest doświadczalny oscylator jednym stopniem. Przebieg ćwiczenia polegającego na identyfikacji rzeczywistego współczynnika tłumienia wiskotycznego na tym stanowisku wygląda jak następuje.

1. Rejestracja przy pomocy analizatora drgań DAP (Data Acquisition Processor) firmy MICROSTAR kilku, co najmniej trzech przebiegów czasowych zarejestrowanych podczas prób drgań swobodnych.
2. Przygotowanie w arkuszu kalkulacyjnym EXCEL szablonu do analizy wyników na podstawie zamieszczonego w instrukcji przykładu oraz zgodnie z instrukcjami prowadzącego ćwiczenie.
3. Wprowadzenie danych odczytanych z zarejestrowanych przebiegów do przygotowanego szablonu.
4. Obliczenie bezwymiarowych wartości współczynnika tłumienia wiskotycznego β , ξ oraz rzeczywistej wartości c , a następnie uśrednienie tych wartości dla wszystkich zarejestrowanych prób.

Literatura

- [1] Zbigniew Osiński: *Tłumienie drgań mechanicznych*, PWN, Warszawa 1979.
- [2] Liang JW, Feeny BF: Identifying Coulomb and viscous friction from free vibration decrements, *Nonlinear Dynamics*, **16**, 337-347, 1998.
- [3] Feeny BF, Liang JW: A decrement method for the simultaneous estimation of Coulomb and viscous friction, *Journal of Sound & Vibration*, **195**(1), 149-154, 1996.
- [4] Jerzy Wojewoda: *Efekty histerezy w tarciu suchym*, Zeszyty Naukowe PŁ Nr 1015, Wydawnictwo PŁ, Łódź 2008.