

## Ćwiczenie 5

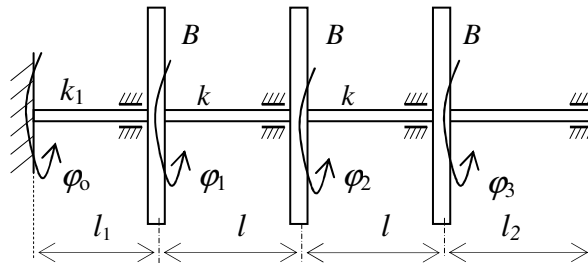
### WYZNACZANIE CZĘSTOŚCI REZONANSOWYCH DRGAŃ SKRĘTNYCH WAŁU

#### 1. Cel ćwiczenia

Pomiar częstości rezonansowych drgań skrętnych wału z trzema tarczami i obserwacja odpowiadających im postaci skręcenia wału oraz porównanie wartości częstości rezonansowych uzyskanych z pomiarów z częstościami drgań własnych obliczonymi analitycznie.

#### 2. Wprowadzenie teoretyczne

Model rozpatrywanego układu drgającego przedstawia Rys.5.1. Jest to układ o trzech stopniach swobody. Rozpatruje się drgania własne skrętne (drgania swobodne) układu, gdy wał jest utwierdzony na końcu. Na wale o sztywnościach  $k_1$  i  $k$  osadzone są trzy jednakowe tarcze o momencie bezwładności  $B$ .



Rys.5.1. Model układu drgającego.

Równania różniczkowe ruchu mają następującą postać:

$$\begin{aligned} B\ddot{\varphi}_1 + k(\varphi_1 - \varphi_2) + k_1(\varphi_1 - \varphi_0) &= 0 \\ B\ddot{\varphi}_2 + k(\varphi_2 - \varphi_3) - k(\varphi_1 - \varphi_2) &= 0 \\ B\ddot{\varphi}_3 - k(\varphi_2 - \varphi_3) &= 0 \end{aligned} \quad (5.1)$$

W celu wyznaczenia częstości drgań własnych skrętnych układu zastosowano metodę Holzera. Rozwiązania szczególne układu równań (5.1) przewiduje się w postaci funkcji harmoniczych

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= \Phi_1 \sin \alpha t; \\
\varphi_2 &= \Phi_2 \sin \alpha t; \\
\varphi_3 &= \Phi_3 \sin \alpha t,
\end{aligned} \tag{5.2}$$

gdzie:  $\alpha$  - poszukiwana częstość własna drgań swobodnych,  
 $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$  – amplitudy drgań skrętnych poszczególnych tarcz.

Po podstawieniu rozwiązań (5.2) do układu równań różniczkowych (5.1) otrzymuje się układ równań algebraicznych:

$$B \Phi_1 \alpha^2 - k(\Phi_1 - \Phi_2) - k_1(\Phi_1 - \Phi_0) = 0; \tag{5.3}$$

$$B \Phi_2 \alpha^2 - k(\Phi_2 - \Phi_3) + k(\Phi_1 - \Phi_2) = 0; \tag{5.4}$$

$$B \Phi_3 \alpha^2 + k(\Phi_2 - \Phi_3) = 0. \tag{5.5}$$

Układ równań (5.3) ÷ (5.5) jest podstawą programu obliczeń częstości drgań własnych skrętnych badanego układu. Zakłada się dowolną wartość amplitudy drgań tarczy trzeciej  $\Phi_3$ , n.p.  $\Phi_3 = 1$  rad, i wstawiając następnie wartość  $\alpha$  ze spodziewanego zakresu częstości, na podstawie (5.5) wyznacza się wartość amplitudy  $\Phi_2$

$$\Phi_2 = \Phi_3 - \frac{B \Phi_3 \alpha^2}{k}. \tag{5.6}$$

Wyznaczoną wartość  $\Phi_2$  uwzględnia się w równaniu (5.4) i oblicza wartość amplitudy  $\Phi_1$

$$\Phi_1 = \Phi_2 - \frac{B \Phi_2 \alpha^2 + B \Phi_3 \alpha^2}{k}. \tag{5.7}$$

Wyznaczoną wartość  $\Phi_1$  uwzględnia się w równaniu (5.3) i oblicza się wartość amplitudy  $\Phi_0$

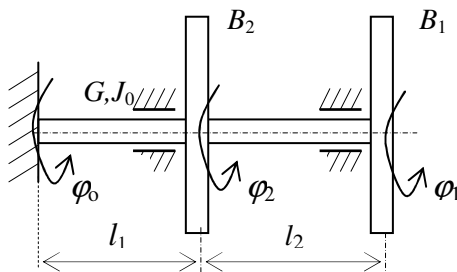
$$\Phi_0 = \Phi_1 - \frac{B \Phi_1 \alpha^2 + B \Phi_2 \alpha^2 + B \Phi_3 \alpha^2}{k_1}. \tag{5.8}$$

Jeśli  $\alpha$  jest częstością własną rozpatrywanego układu, musi być spełniony warunek brzegowy  $\Phi_0 = 0$ .

Powyższy opis wskazuje, że metoda Holzera zastosowana do rozpatrywanego układu polega na poszukiwaniu miejsc zerowych funkcji (5.8). Dzieje się to poprzez wyznaczanie wartości tej funkcji dla kolejno przyjmowanych wartości  $\alpha$ . Jeśli założona wartość  $\alpha$  nie jest częstością własną układu również nie będzie spełniony warunek brzegowy zerowania się amplitudy  $\Phi_0$ . Przyjmowane wartości  $\alpha$  zagęszcza się w okolicy miejsca zerowego (zmiany znaku wartości  $\Phi_0$ ), aż do osiągnięcia zerującej wartości  $\alpha$  (częstości własnej) z żądaną dokładnością.

**Przykład obliczeniowy**

Przy użyciu metody Holzera wyznaczyć częstości drgań własnych skrętnych oraz główne postacie drgań sprężystego bezmasowego wału z osadzonymi na nim dwoma krążkami o masowych momentach bezwładności  $B_1$  i  $B_2$  (Rys. 5.2).



Dane liczbowe:

$$B_1 = B_2 = B = 10^{-5} \text{ kgm}^2;$$

$$J_0 = 10^{-6} \text{ m}^4;$$

$$l_1 = l_2 = 0,1 \text{ m};$$

$$G = 8 \times 10^{10} \text{ Nm}^{-2};$$

Rys.5.2. Model wału

**Rozwiązanie**

Sztywność skrętną odcinków wału obliczamy ze wzoru:

$$k = \frac{G J_0}{l} = \frac{8 \times 10^{10} \times 10^{-6}}{0,1} = 8 \times 10^5 \text{ Nm rd}^{-1} \quad (\text{a})$$

Równania drgań skrętnych rozpatrywanego układu, którego schemat przedstawia Rys. 5.2 mają następującą postać:

$$B \ddot{\varphi}_1 = -k_1 \varphi_1 + k \varphi_2 \Rightarrow B \ddot{\varphi}_1 + k(\varphi_1 - \varphi_2) = 0 \quad (\text{b})$$

$$B \ddot{\varphi}_2 = -k \varphi_2 - k \varphi_2 + k \varphi_1 + k \varphi_0 \Rightarrow \quad (\text{c})$$

$$\Rightarrow B \ddot{\varphi}_2 - k(\varphi_1 - \varphi_2) + k(\varphi_2 - \varphi_0) = 0$$

Rozwiązania równań (b) i (c) przewidziano w postaci funkcji harmonicznym

$$\varphi_1 = \Phi_1 \sin \alpha t; \quad \varphi_2 = \Phi_2 \sin \alpha t \quad (\text{d})$$

Po podstawieniu rozwiązań (d) do równań (b) i (c) otrzymuje się układ równań algebraicznych:

$$-B \Phi_1 \alpha^2 + k(\Phi_1 - \Phi_2) = 0 \quad (\text{e})$$

$$-B \Phi_2 \alpha^2 - k(\Phi_1 - \Phi_2) + k(\Phi_2 - \Phi_0) = 0 \quad (\text{f})$$

Zakładamy wartość amplitudy  $\Phi_1 = 1$  rad i wstawiamy wartość  $\alpha = 1,5 \times 10^5$  rd/s ze spodziewanego zakresu częstości. Na podstawie (e) wyznaczamy wartość amplitudy  $\Phi_2$

$$\Phi_2 = \Phi_1 - \frac{B \Phi_1 \alpha^2}{k} = 1 - \frac{10^{-5} \times 1 \times 2,25 \times 10^{10}}{8 \times 10^5} = 1 - 0,28125 = 0,71875 \text{ rd} \quad (\text{g})$$

Wyznaczoną wartość  $\Phi_2$  uwzględniamy w równaniu (f) i obliczamy  $\Phi_0$

$$\Phi_0 = \Phi_2 - \frac{B\Phi_1\alpha^2 + B\Phi_2\alpha^2}{k} =$$

$$= 0,71875 - \frac{10^{-5} \times 2,25 \times 10^{10} (1 + 0,71875)}{8 \times 10^5} = 0,235 \text{ rd} \quad (\text{h})$$

Widać, że wstawiona wartość  $\alpha = 1,5 \times 10^5$  rd/s nie jest częstotliwością własną rozpatrywanego układu, ponieważ nie jest spełniony warunek brzegowy  $\Phi_0 = 0$ . Resztkowa wartość amplitudy dla tej częstotliwości wynosi  $\Delta\Phi = 0,235$  rd. *Tabela obliczeniowa 1* przedstawia przebieg przeprowadzonych obliczeń.

*Tabela obliczeniowa 1*  $\alpha_1 = 1,5 \times 10^5$  rad/s  $\Delta\Phi = 0,235$  rad

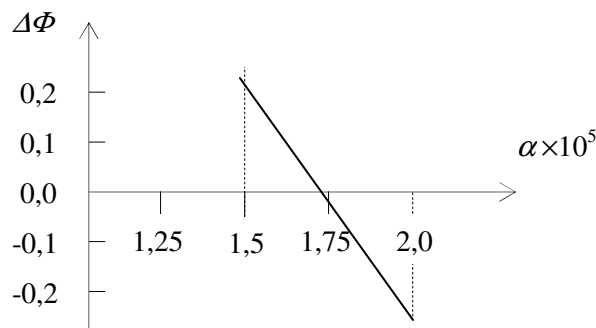
| P-t<br>obl | B<br>kgm <sup>2</sup> | B $\alpha^2$<br>Nm   | $\Phi$<br>rad | B $\alpha^2\Phi$<br>Nm | $\sum B\alpha^2\Phi$<br>Nm | k<br>Nm/rad       | $\sum B\alpha^2\Phi/k$<br>rad |
|------------|-----------------------|----------------------|---------------|------------------------|----------------------------|-------------------|-------------------------------|
| 1          | 10 <sup>-5</sup>      | 2,25×10 <sup>5</sup> | 1,0           | 2,25×10 <sup>5</sup>   | 2,25×10 <sup>5</sup>       | 8×10 <sup>5</sup> | 0,28125                       |
| 2          | 10 <sup>-5</sup>      | 2,25×10 <sup>5</sup> | 0,7187        | 1,62×10 <sup>5</sup>   | 3,87×10 <sup>5</sup>       | 8×10 <sup>5</sup> | 0,48375                       |

Przyjmujemy teraz następną wartość częstotliwości  $\alpha = 2 \times 10^5$  rd/s i ponawiamy obliczenia. Wyniki przedstawia *Tabela obliczeniowa 2*.

*Tabela obliczeniowa 2*  $\alpha_1 = 2 \times 10^5$  rad/s  $\Delta\Phi = -0,25$  rad

| P-t<br>obl | B<br>kgm <sup>2</sup> | B $\alpha^2$<br>Nm | $\Phi$<br>rad | B $\alpha^2\Phi$<br>Nm | $\sum B\alpha^2\Phi$<br>Nm | k<br>Nm/rad       | $\sum B\alpha^2\Phi/k$<br>rad |
|------------|-----------------------|--------------------|---------------|------------------------|----------------------------|-------------------|-------------------------------|
| 1          | 10 <sup>-5</sup>      | 4×10 <sup>5</sup>  | 1,0           | 4×10 <sup>5</sup>      | 4×10 <sup>5</sup>          | 8×10 <sup>5</sup> | 0,5                           |
| 2          | 10 <sup>-5</sup>      | 4×10 <sup>5</sup>  | 0,5           | 2×10 <sup>5</sup>      | 6×10 <sup>5</sup>          | 8×10 <sup>5</sup> | 0,75                          |

Na podstawie uzyskanych wyników warto określić zależność resztkowej wartości amplitudy od częstotliwości w postaci graficznej, która ułatwi znalezienie poszukiwanej częstotliwości własnej. Wykres na Rys.5.3 wskazuje, że pierwszej częstotliwości własnej należy poszukiwać tuż poniżej wartości  $1,75 \times 10^5$  rd/s.



Rys.5.3. Zależność resztkowej wartości amplitudy od częstotliwości

*Tabela obliczeniowa 3*  $\alpha_1 = 1,746 \times 10^5$  rad/s  $\Delta\Phi = 0,002$  rad

| P-t<br>obl | $B$<br>kgm <sup>2</sup> | $B\alpha^2$<br>Nm  | $\Phi$<br>rad | $B\alpha^2\Phi$<br>Nm | $\Sigma B\alpha^2\Phi$<br>Nm | $k$<br>Nm/rad   | $\Sigma B\alpha^2\Phi/k$<br>rad |
|------------|-------------------------|--------------------|---------------|-----------------------|------------------------------|-----------------|---------------------------------|
| 1          | $10^{-5}$               | $3,05 \times 10^5$ | 1,0           | $3,05 \times 10^5$    | $3,05 \times 10^5$           | $8 \times 10^5$ | 0,381                           |
| 2          | $10^{-5}$               | $2,05 \times 10^5$ | 0,619         | $1,89 \times 10^5$    | $4,93 \times 10^5$           | $8 \times 10^5$ | 0,617                           |

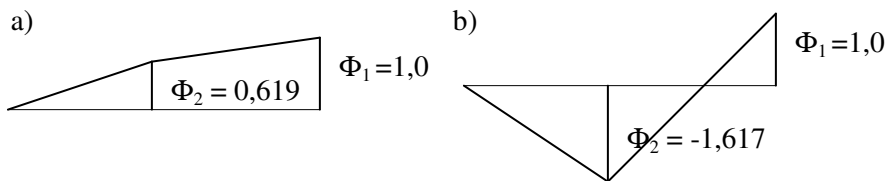
Wyniki obliczeń przedstawione w *Tabeli obliczeniowej 3* wskazują, że pierwsza częstość drgań własnych skrętnych wynosi  $\alpha_1 = 1,746 \times 10^5$  rd/s.

Przeprowadzając analogiczny cykl obliczeń możemy wyznaczyć wartość drugiej częstości drgań własnych, która wynosi  $\alpha_2 = 4,576 \times 10^5$  rd/s. *Tabela obliczeniowa 4* przedstawia wyniki obliczeń dla tej wartości  $\alpha$

*Tabela obliczeniowa 4*  $\alpha_2 = 4,576 \times 10^5$  rad/s  $\Delta\Phi = -0,002$  rad

| P-t<br>obl | $B$<br>kgm <sup>2</sup> | $B\alpha^2$<br>Nm   | $\Phi$<br>rad | $B\alpha^2\Phi$<br>Nm | $\Sigma B\alpha^2\Phi$<br>Nm | $k$<br>Nm/rad   | $\Sigma B\alpha^2\Phi/k$<br>rad |
|------------|-------------------------|---------------------|---------------|-----------------------|------------------------------|-----------------|---------------------------------|
| 1          | $10^{-5}$               | $20,94 \times 10^5$ | 1,0           | $20,94 \times 10^5$   | $20,94 \times 10^5$          | $8 \times 10^5$ | 2,617                           |
| 2          | $10^{-5}$               | $20,94 \times 10^5$ | -1,617        | $-33,86 \times 10^5$  | $-12,92 \times 10^5$         | $8 \times 10^5$ | -1,615                          |

**Główne postacie drgań** własnych skrętnych rozpatrywanego układu określają stosunki amplitud drgań odpowiadające wyznaczonym częstościom drgań własnych. Stosunki te można odczytać odpowiednio z czwartej kolumny *Tabeli obliczeniowej 3* dla pierwszej częstości drgań własnych oraz z czwartej kolumny *Tabeli obliczeniowej 4* dla drugiej częstości drgań własnych. Główne postacie drgań w postaci graficznej przedstawia Rys. 5.4



Rys.5.4. Główne postacie drgań odpowiadające: a) pierwszej częstości drgań własnych, b) drugiej częstości drgań własnych

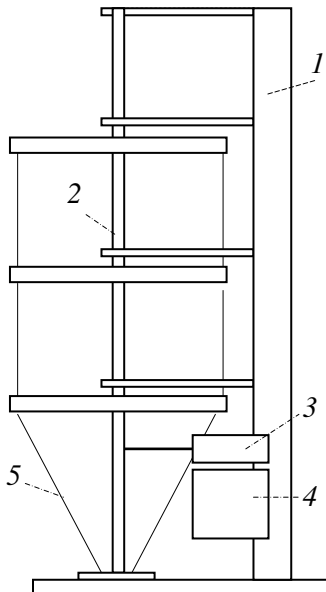
### 3. Stanowisko pomiarowe

Schemat stanowiska pomiarowego przedstawia Rys.5.5. Składa się ono z pionowej kolumny 1 z podstawą oraz wału 2 o długości 0,8 m i średnicy 0,004 m z osadzonymi nań trzema tarczami. Dolny koniec wału jest utwierdzony, a górny

koniec łożyskowany w sposób umożliwiający jego swobodny obrót. Drgania skrętne układu wymuszane są kinematycznie za pośrednictwem mechanizmu dźwigniowego 3. Wartość regulowanej częstości wymuszenia odczytuje się na mierniku 4. Nitki 5 połączone z tarczami pokazują odpowiednie postacie kąta skręcenia wału.

## 2. Przebieg ćwiczenia

1. Metodą Holzera obliczyć wartości częstości drgań własnych skrętnych układu wykorzystując w tym celu zamieszczoną poniżej tabelę obliczeniową. Na początku obliczeń należy przyjąć kolejno wartości krańcowe  $\alpha$  ze spodziewanego zakresu częstości, w którym należy prowadzić poszukiwania. Uzyskane w ten sposób wyniki dotyczące resztkowych wartości amplitudy  $\Delta\Phi$  ułatwiają określenie dokładnej wartości  $\alpha$  po zawężeniu obszaru poszukiwań do tych wartości częstości, przy których występuje zmiana znaku  $\Delta\Phi$ .



*Dane liczbowe:*

$$B = 0,0085 \text{ kgm}^2;$$

$$k = 13,14 \text{ Nm/rad};$$

$$k_1 = 6,57 \text{ Nm/rad};$$

$\Delta\alpha_1 = (2 \text{ Hz} \div 2,5 \text{ Hz})$  - spodziewany zakres częstości, w którym należy poszukiwać pierwszej częstości własnej;

$\Delta\alpha_2 = (6,8 \text{ Hz} \div 7,2 \text{ Hz})$  - spodziewany zakres częstości, w którym należy poszukiwać drugiej częstości własnej;

$\Delta\alpha_3 = (8,5 \text{ Hz} \div 9,0 \text{ Hz})$  - spodziewany zakres częstości, w którym należy poszukiwać trzeciej częstości własnej.

Rys.5.2. Schemat stanowiska pomiarowego

2. Uruchomić układ wzbudzający drgania skrętne tarcz i dokonać pomiaru trzech kolejnych częstości rezonansowych, przy których obserwuje się występowanie lokalnych maksimów amplitudy drgań skrętnych tarcz. Kąty skręcenia tarcz obserwuje się za pomocą nitki, które przy zmianie położenia tarcz przy częstościach rezonansowych tworzą kształty odpowiadające głównym postaciom drgań.
3. Odczytane z miernika wartości częstości rezonansowych zamieścić w tabeli pomiarowej.
4. Narysować zaobserwowane postacie drgań.
5. Dokonać porównania wyników obliczeń z rezultatami badań doświadczalnych i sformułować własne wnioski.

#### 4. Literatura

1. Kapitaniak T.: Wstęp do teorii drgań, Wydawnictwo PŁ, Łódź 1992.
2. Parszewski Z.: Dynamika i drgania maszyn. WNT, Warszawa 1982.
3. Osiński Z: Teoria drgan, PWN, Warszawa 1978

#### 5. Sprawozdanie z wykonania ćwiczenia winno zawierać:

- 1) Cel ćwiczenia,
- 2) Tabele obliczeniowe zawierające wyniki obliczeń poszczególnych częstości drgań własnych,

**Tabela obliczeniowa**  $\alpha = \dots\dots\dots$  [rad/s];  $\Delta\Phi = \dots\dots\dots$  [rad]

| P-t ob. | $B$<br>kgm <sup>2</sup> | $B\alpha^2$<br>Nm | $\Phi$<br>rad | $B\alpha^2\Phi$<br>Nm | $\sum B\alpha^2\Phi$<br>Nm | $k$<br>Nm/rad | $\sum B\alpha^2\Phi/k$<br>rad |
|---------|-------------------------|-------------------|---------------|-----------------------|----------------------------|---------------|-------------------------------|
| 3       | 0,0085                  |                   | 1,0           |                       |                            | 13,4          |                               |
| 2       | 0,0085                  |                   |               |                       |                            | 13,4          |                               |
| 1       | 0,0085                  |                   |               |                       |                            | 6,57          |                               |

- 3) Tabelę zawierającą wyniki obliczeń częstości drgań własnych oraz wyniki pomiarów poszczególnych częstości rezonansowych drgań skrętnych tarcz,

**Tabela częstości**

| Częstości drgań skrętnych | Wyniki pomiarów |      |      | Wyniki obliczeń             |                          | $\frac{\alpha_p}{\alpha}$ |     |
|---------------------------|-----------------|------|------|-----------------------------|--------------------------|---------------------------|-----|
|                           | pomiar          |      |      | Częstość średnia $\alpha_p$ | Częstość własna $\alpha$ |                           |     |
|                           | 1               | 2    | 3    |                             | [rd/s]                   | Hz                        | [%] |
|                           | [Hz]            | [Hz] | [Hz] | [Hz]                        |                          |                           |     |
| I                         |                 |      |      |                             |                          |                           |     |
| II                        |                 |      |      |                             |                          |                           |     |
| III                       |                 |      |      |                             |                          |                           |     |

- 4) Rysunki zaobserwowanych postaci drgań,
- 5) Wnioski.