

Ćwiczenie 7

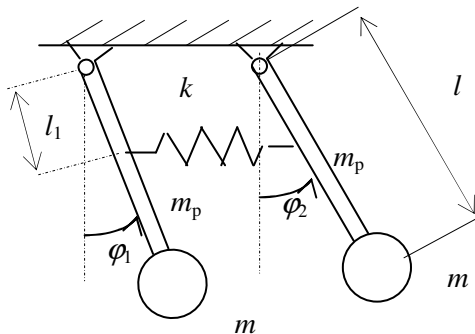
DRGANIA SWOBODNE UKŁADU O DWÓCH STOPNIACH SWOBODY

1. Cel ćwiczenia

Doświadczalne wyznaczenie częstości drgań własnych układu o dwóch stopniach swobody, pokazanie postaci drgań odpowiadających tym częstościom, a także obserwacja i analiza zjawiska dudnienia.

2. Wprowadzenie teoretyczne

Przedmiotem rozważań jest układ przedstawiony na Rys. 7.1. Składa się on z dwóch jednakowych wahał fizycznych połączonych sprężyną o sztywności k . Wahała charakteryzują się tym, że masa ciała m zamocowanego na końcu pręta o długości l jest w przybliżeniu równa masie pręta m_p . Dla uproszczenia pominięto wymiary zawieszonych ciężarków, traktując je jako ciała o masach skupionych w punktach, w odległości l od osi obrotu. Sprężyna jest zamocowana w odległości od osi obrotu, przy czym $l_1 = 0,5 l$.



Rys. 7.1. Model układu

Do wyznaczenia dynamicznych równań ruchu wokół położenia równowagi wahał przedstawionych na Rys.7.1 w postaci zlinearyzowanej zastosowano drugą zasadę Newtona dla ruchu obrotowego

$$B \ddot{\varphi} = \sum M, \quad (7.1)$$

gdzie: B – masowy moment bezwładności wahała;

φ - kąt obrotu wahała mierzony od położenia równowagi (Rys. 7.1);

M – moment sił zewnętrznych (sił ciężkości oraz sił ugięcia sprężyny) działających na wahadło.

Masowy moment bezwładności wahadła względem osi obrotu określa zależność:

$$B = \frac{ml^2}{3} + ml^2 = \frac{4}{3}ml^2. \quad (7.2)$$

Dla pierwszego wahadła wykonującego małe drgania wokół położenia równowagi, dynamiczne równanie ruchu (7.1) ma następującą postać:

$$\frac{4}{3}ml^2\ddot{\varphi}_1 = -\left(mg\frac{l}{2} + mgl\right)\varphi_1 - k\left(\frac{l}{2}\right)^2\varphi_1 + k\left(\frac{l}{2}\right)^2\varphi_2. \quad (7.3)$$

Analogiczne równanie ruchu drugiego wahadła jest postaci:

$$\frac{4}{3}ml^2\ddot{\varphi}_2 = -\left(mg\frac{l}{2} + mgl\right)\varphi_2 - k\left(\frac{l}{2}\right)^2\varphi_2 + k\left(\frac{l}{2}\right)^2\varphi_1. \quad (7.4)$$

Układ sprzężonych równań różniczkowych (7.3) i (7.4) stanowi zlinearyzowany model matematyczny badanego układu. Po przekształceniach model ten można przedstawić w następującej postaci:

$$\begin{aligned} \frac{4}{3}ml^2\ddot{\varphi}_1 + \left(\frac{3}{2}mgl + \frac{kl^2}{4}\right)\varphi_1 - \frac{kl^2}{4}\varphi_2 &= 0; \\ \frac{4}{3}ml^2\ddot{\varphi}_2 + \left(\frac{3}{2}mgl + \frac{kl^2}{4}\right)\varphi_2 - \frac{kl^2}{4}\varphi_1 &= 0. \end{aligned} \quad (7.5)$$

Wprowadzając warunki początkowe dostarcza się porcję energii do układu w celu wywołania jego drgań swobodnych. Rozwiązań szczególnych jednorodnego układu równań różniczkowych (7.5) poszukuje się wtedy w postaci:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= A_1 \sin(\alpha t + \delta); \\ \varphi_2 &= A_2 \sin(\alpha t + \delta). \end{aligned} \quad (7.6)$$

Po podstawieniu rozwiązań (7.6) do (7.5) i sformułowaniu warunku spełniania rozwiązań w każdej chwili czasu, otrzymuje się jednorodny układ równań algebraicznych z niewiadomymi amplitudami A_1 i A_2 oraz częstością α jako parametrem w postaci

$$\begin{aligned} (-b_{11}\alpha^2 + k_{11})A_1 + k_{12}A_2 &= 0; \\ k_{21}A_1 + (-b_{22}\alpha^2 + k_{22})A_2 &= 0, \end{aligned} \quad (7.7)$$

gdzie: $b_{11} = b_{22} = \frac{4}{3}ml^2$; $k_{12} = k_{21} = \frac{kl^2}{4}$; $k_{11} = k_{22} = \frac{3}{2}mgl + \frac{kl^2}{4}$.

Warunkiem istnienia niezerowych rozwiązań układu równań (7.7) jest zerowanie się jego wyznacznika głównego

$$\begin{vmatrix} -b_{11}\alpha^2 + k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & -b_{22}\alpha^2 + k_{22} \end{vmatrix} = 0. \quad (7.8)$$

Na podstawie warunku (7.8) otrzymuje się **równanie częstości** w postaci:

$$\alpha^4 - \frac{b_{11}k_{22} + b_{22}k_{11}}{b_{11}b_{22}}\alpha^2 + \frac{k_{11}k_{22} - k_{12}k_{21}}{b_{11}b_{22}} = 0. \quad (7.9)$$

Rozwiązując równanie dwukwadratowe (7.9) wyznacza się częstości własne badanego układu

$$\begin{aligned} \alpha_1^2 &= \frac{9}{8} \frac{g}{l}; \\ \alpha_2^2 &= \frac{9}{8} \frac{g}{l} + \frac{3}{8} \frac{k}{m}. \end{aligned} \quad (7.10)$$

Istnieją więc zawsze dwie częstości kołowe α_1 oraz α_2 , przy których możliwe są drgania harmoniczne rozpatrywanego układu. Postać drgań układu, przy której wykonuje on drgania harmoniczne, nazywa się **postacią główną drgań**. Podstawiając do układu równań algebraicznych (7.7) α_1 w miejsce α , otrzymuje się układ równań dla amplitud drgań swobodnych pierwszej postaci

$$\begin{aligned} (-b_{11}\alpha_1^2 + k_{11})A_{11} + k_{12}A_{21} &= 0; \\ k_{21}A_{11} + (-b_{22}\alpha_1^2 + k_{22})A_{21} &= 0, \end{aligned} \quad (7.11)$$

gdzie: A_{11} - amplituda drgań wahadła pierwszego odpowiadająca pierwszej postaci drgań,

A_{21} - amplituda drgań wahadła drugiego odpowiadająca pierwszej postaci drgań.

Równania (7.11) są liniowo zależne, co wynika z zerowania się ich wyznacznika głównego. Z dowolnego z równań (7.11) można wyznaczyć wartość stosunku amplitud $\nu_1 = A_{21}/A_{11} = 1$, określający postać układu w czasie drgań harmonicznym o częstości α_1 .

Postępując analogicznie z częstością α_2 , otrzymuje się wartość stosunku $\nu_2 = A_{22}/A_{12} = -1$. Otrzymane w ten sposób stosunki nazywamy **współczynnikami głównych postaci drgań**.

Rozwiązanie ogólne rozpatrywanego układu równań (7.5) można przedstawić w postaci

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= A_{11} \sin(\alpha_1 t + \delta_1) + A_{12} \sin(\alpha_2 t + \delta_2); \\ \varphi_2(t) &= A_{11}\nu_1 \sin(\alpha_1 t + \delta_1) + A_{12}\nu_2 \sin(\alpha_2 t + \delta_2). \end{aligned} \quad (7.12)$$

Po uwzględnieniu wartości liczbowych ν_1 oraz ν_2 rozwiązania (7.12) można zapisać w postaci

$$\begin{aligned}\varphi_1(t) &= A_{11} \sin(\alpha_1 t + \delta_1) + A_{12} \sin(\alpha_2 t + \delta_2); \\ \varphi_2(t) &= A_{11} \sin(\alpha_1 t + \delta_1) - A_{12} \sin(\alpha_2 t + \delta_2),\end{aligned}\quad (7.13)$$

gdzie: A_{11} , A_{12} , δ_1 , δ_2 – stałe zależne od warunków początkowych.

Można postawić pytanie: Jakie warunki początkowe należy zadać, aby obserwować poszczególne główne postacie drgań?

Przyjmijmy następujące oznaczenia:

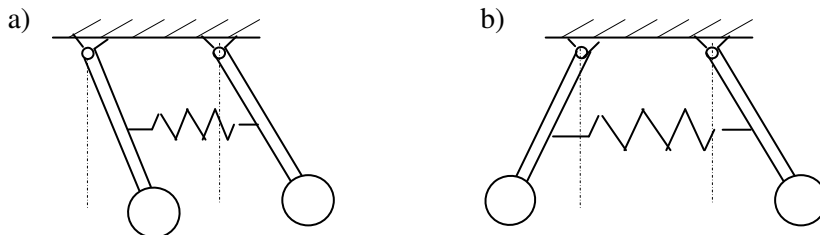
$$\begin{aligned}\varphi_{10} &= \varphi_1(t=0); & \varphi_{20} &= \varphi_2(t=0); \\ \omega_{10} &= \left. \frac{d\varphi_1}{dt} \right|_{t=0}; & \omega_{20} &= \left. \frac{d\varphi_2}{dt} \right|_{t=0}.\end{aligned}\quad (7.14)$$

Uwzględniając (7.14) w (7.13) otrzymuje się

$$\begin{aligned}\varphi_{10} &= A_{11} \sin \delta_1 + A_{12} \sin \delta_2; \\ \varphi_{20} &= A_{11} \sin \delta_1 - A_{12} \sin \delta_2; \\ \omega_{10} &= A_{11} \alpha_1 \cos \delta_1 + A_{12} \alpha_2 \cos \delta_2; \\ \omega_{20} &= A_{11} \alpha_1 \cos \delta_1 - A_{12} \alpha_2 \cos \delta_2.\end{aligned}\quad (7.15)$$

Jeśli chcemy obserwować drgania pierwszej postaci musimy założyć $A_{12} = 0$. Wówczas $\varphi_{10} - \varphi_{20} = 0$, czyli $\varphi_{10} / \varphi_{20} = 1 = \nu_1$, zatem warunki początkowe dotyczące przemieszczeń wahadeł są proporcjonalne do postaci głównej drgań. Analogicznie $\omega_{10} - \omega_{20} = 0$, czyli $\omega_{10} = \omega_{20}$ (w szczególności można przyjąć $\omega_{10} = \omega_{20} = 0$).

Oznacza to, że drgania własne pierwszej postaci można obserwować przy przyjęciu warunku początkowego $\varphi_{10} = \varphi_{20}$, co oznacza wychylenie obu wahadeł o ten sam kąt (w odniesieniu do jego wartości i znaku). Postępując analogicznie, można dojść do wniosku, że drgania własne drugiej postaci występują przy warunku początkowym $\varphi_{10} = -\varphi_{20}$. Obraz graficzny drgań własnych pierwszej i drugiej postaci przedstawia Rys. 7.2.



Rys. 7.2. Postacie drgań własnych a) pierwsza, b) druga.

1.1. Zjawisko dudnienia

Ciekawy przypadek można otrzymać przyjmując w chwili początkowej ruchu wahadeł: $\varphi_{10} = \varphi_0$ oraz $\varphi_{20} = 0$, $\omega_{10} = \omega_{20} = 0$. Na podstawie (7.15) jest wówczas

$$\begin{aligned}\varphi_0 &= A_{11} \sin \delta_1 + A_{12} \sin \delta_2; \\ 0 &= A_{11} \sin \delta_1 - A_{12} \sin \delta_2; \\ 0 &= A_{11} \alpha_1 \cos \delta_1 + A_{12} \alpha_2 \cos \delta_2; \\ 0 &= A_{11} \alpha_1 \cos \delta_1 - A_{12} \alpha_2 \cos \delta_2.\end{aligned}\tag{7.16}$$

Z pierwszego i drugiego równania (7.16) otrzymuje się

$$\varphi_{10} = 2A_{11} \sin \delta_1.\tag{7.17}$$

Z trzeciego i czwartego równania (7.16) oraz z warunku istnienia niezerowych rozwiązań dla A_{11} i A_{12} otrzymuje się $\delta_1 = \delta_2 = \pi/2$. Uwzględniając powyższe zależności otrzymuje się

$$A_{11} = A_{12} = \frac{1}{2} \varphi_0,\tag{7.18}$$

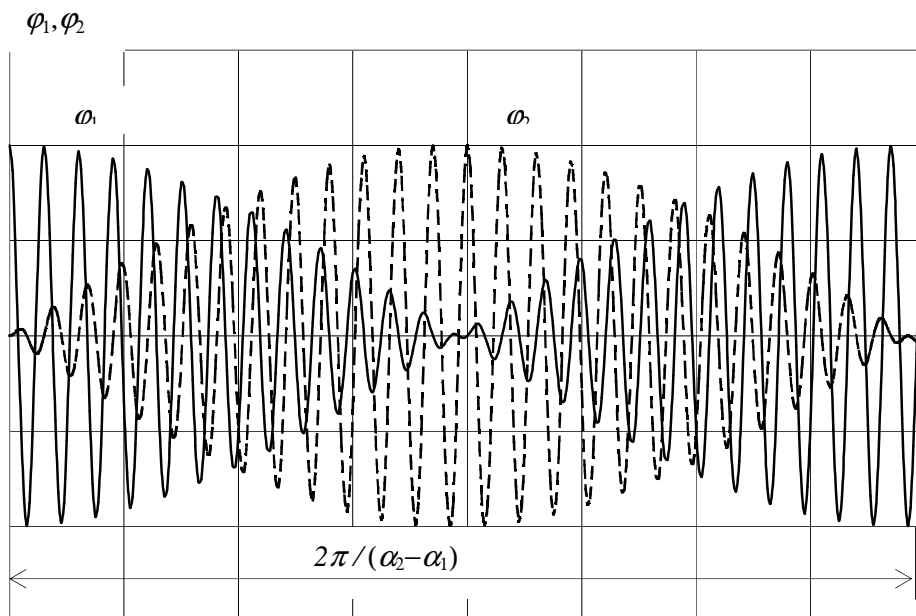
oraz rozwiązanie ogólne w następującej postaci:

$$\begin{aligned}\varphi_1(t) &= \frac{1}{2} \varphi_0 \cos \alpha_1 t + \frac{1}{2} \varphi_0 \cos \alpha_2 t; \\ \varphi_2(t) &= \frac{1}{2} \varphi_0 \cos \alpha_1 t - \frac{1}{2} \varphi_0 \cos \alpha_2 t.\end{aligned}\tag{7.19}$$

Korzystając ze wzorów trygonometrycznych wyrażenia (7.19) można przedstawić następująco:

$$\begin{aligned}\varphi_1(t) &= \varphi_0 \cos\left(\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2} t\right) \cos\left(\frac{\alpha_2 + \alpha_1}{2} t\right); \\ \varphi_2(t) &= \varphi_0 \sin\left(\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2} t\right) \sin\left(\frac{\alpha_2 + \alpha_1}{2} t\right).\end{aligned}\tag{7.20}$$

Przebieg rozwiązań (7.20) przedstawia Rys. 7.3. Widać, że w przypadku sprzężenia dwóch identycznych układów drgających o jednym stopniu swobody drgania w układzie sprzężonym mają charakter **dudnień**. Energia określona przez warunki początkowe jest przekazywana okresowo z jednego układu do drugiego. Zjawisko to przedstawia Rys. 7.4.

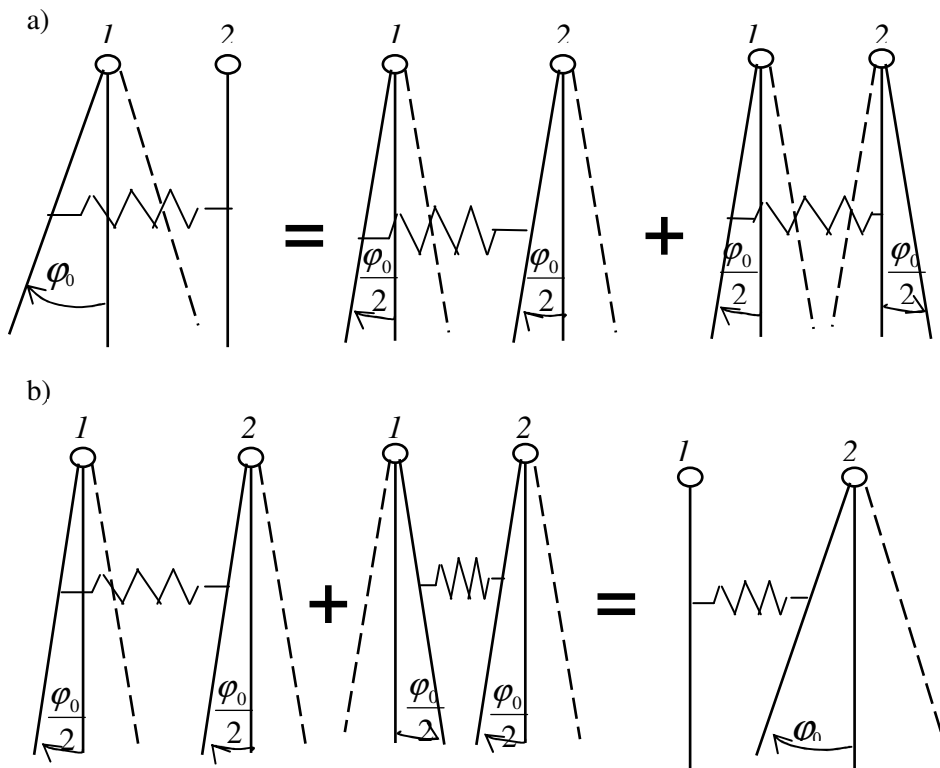


Rys. 7.3. Rozwiązania (7.20) ilustrujące zjawisko dudnienia.

W pierwszej chwili wahadło 1 wykonuje drgania, wahadło 2 jest nieruchome (Rys. 7.4a). Ruch ten można zinterpretować jako sumę dwóch drgań własnych pierwszej i drugiej postaci o częstościach α_1 i α_2 . Przy dostatecznie bliskich wartościach tych częstości potrzeba pewnego czasu (odpowiadającego kilku okresom), aby nastąpiło przesunięcie faz. W pewnej chwili przesunięcie faz obu postaci wynosi 180° , co ilustruje Rys. 7.4b. Dodając oba przedstawione ruchy, można zauważyć, że wahadło 1 jest teraz nieruchome, podczas gdy wahadło 2 wykonuje drgania o amplitudzie φ_0 . Zjawisko to powtarza się i drgania przenoszą się z jednego wahadła na drugie.

3. Stanowisko pomiarowe

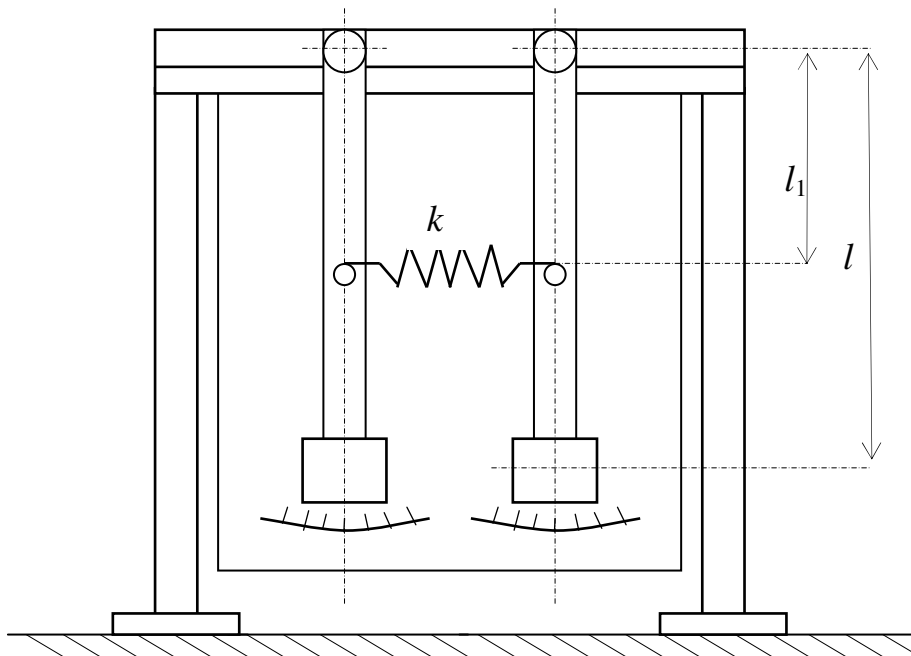
Stanowisko pomiarowe jest przedstawione na Rys. 7.5. Odpowiada ono modelowi teoretycznemu przedstawionemu na Rys. 7.1. Wahadła są podparte w dwóch pryzmach i mogą wykonywać drgania tylko w płaszczyźnie pionowej.



Rys. 7.4. Nakładanie się drgań pierwszej i drugiej postaci podczas dudnienia.

4. Przebieg ćwiczenia

1. W celu wyznaczenia pierwszej częstości drgań własnych układu należy:
 - a) wychylić oba wahadła o taki sam kąt co do wartości i zwrotu,
 - b) przy użyciu stopera zmierzyć czas 20 okresów drgań swobodnych,
 - c) pomiar czasu 20 okresów drgań powtórzyć dwukrotnie,
 - d) obliczyć wartość średnią okresu drgań swobodnych,
 - e) na podstawie obliczonej wartości okresu wyznaczyć wartość pierwszej częstości drgań własnych badanego układu.



Rys. 7.5. Schemat stanowiska pomiarowego

2. W celu wyznaczenia drugiej częstości drgań własnych układu należy:
 - a) wychylić oba wahadła o takie same kąty co do wartości, lecz o przeciwnych zwrotach,
 - b) przy użyciu stopera zmierzyć czas 20 okresów drgań swobodnych,
 - c) pomiar czasu 20 okresów drgań powtórzyć dwukrotnie,
 - d) obliczyć wartość średnią okresu drgań swobodnych,
 - e) na podstawie obliczonej wartości okresu wyznaczyć wartość drugiej częstości drgań własnych badanego układu.

3. W celu wyznaczenia częstości dudnienia należy:
 - a) wychylić jedno wahadło o mały kąt ($\varphi_0 \leq 5^\circ$),
 - b) przy użyciu stopera zmierzyć czas 5 okresów dudnienia,
 - c) pomiar czasu 5 okresów dudnienia powtórzyć dwukrotnie,
 - d) obliczyć wartość średnią okresu dudnienia,
 - e) na podstawie obliczonej wartości okresu wyznaczyć wartość częstości dudnienia.

4. W celu porównania wyznaczonych częstości z ich wartościami teoretycznymi należy:
- obliczyć częstości drgań swobodnych α_1 i α_2 na podstawie wzorów (4.6),
 - obliczyć wartość częstości dudnienia $\alpha_d = \alpha_2 - \alpha_1$,
 - przeprowadzić analizę wyników teoretycznych i doświadczalnych.

5. Literatura

- Kaliski S.: Drgania i fale. PWN, Warszawa 1966.
- Kapitaniak T.: Wstęp do teorii drgań, Wydawnictwo PŁ, Łódź 1992.
- Praca zbiorowa: Drgania mechaniczne - Laboratorium, Oficyna Wydawnicza PW, Warszawa 1999

6. Sprawozdanie z wykonania ćwiczenia winno zawierać:

- Cel ćwiczenia,
- Tabelę zawierającą wyniki pomiarów w następującej postaci:

Wyznaczenie I-szej częstości kołowej drgań własnych układu	
Czas 20 okresów drgań swobodnych:	
$T_{11} = \dots\dots\dots$ [s];	$T_{12} = \dots\dots\dots$ [s]; $T_{13} = \dots\dots\dots$ [s]
Wartość średnia okresu drgań swobodnych: $T_1 = \frac{T_{11} + T_{12} + T_{13}}{3 \times 20} =$	
Wartość I-szej częstości kołowej drgań własnych: $\alpha_1 = \frac{2\pi}{T_1} =$	
Wyznaczenie II-giej częstości kołowej drgań własnych układu	
Czas 20 okresów drgań swobodnych:	
$T_{21} = \dots\dots\dots$ [s];	$T_{22} = \dots\dots\dots$ [s]; $T_{23} = \dots\dots\dots$ [s]
Wartość średnia okresu drgań swobodnych: $T_2 = \frac{T_{21} + T_{22} + T_{23}}{3 \times 20} =$	
Wartość II-giej częstości kołowej drgań własnych: $\alpha_2 = \frac{2\pi}{T_2} =$	
Wyznaczenie częstości dudnienia	
Czas 5 okresów dudnienia:	
$T_{d1} = \dots\dots\dots$ [s];	$T_{d2} = \dots\dots\dots$ [s]; $T_{d3} = \dots\dots\dots$ [s]
Wartość średnia okresu dudnienia: $T_d = \frac{T_{d1} + T_{d2} + T_{d3}}{3 \times 5} =$	
Wartość częstości dudnienia: $\alpha_d = \frac{2\pi}{T_d} =$	

3. Wyniki obliczeń teoretycznych:

Dane liczbowe:

sztwność sprężyny: $k =$;

masa na końcu pręta: $m =$.

długość pręta: $l =$

Obliczenie I-szej częstości kołowej drgań własnych:

$$\alpha_1 = \sqrt{\frac{9g}{8l}} =$$

Obliczenie II-giej częstości kołowej drgań własnych:

$$\alpha_2 = \sqrt{\frac{9g}{8l} + \frac{3k}{8m}} =$$

Obliczenie częstości dudnienia:

$$\alpha_d = \alpha_2 - \alpha_1 =$$

4. Porównanie wyników doświadczalnych i teoretycznych

5. Wnioski