

TMM-1**Wyznaczanie współrzędnych tensorów bezwładności
członów manipulatorów**

Celem ćwiczenia jest doświadczalne wyznaczanie współrzędnych tensorów bezwładności członów manipulatora NM7M w układach współrzędnych zaczepionych w środkach mas członów metodami zawieszenia jedno i trójnitkowego.

1. Definicja tensora bezwładności ciała sztywnego

Doświadczalne wyznaczanie momentów bezwładności jest metodą stosowaną w przypadkach ciał o nieregularnych kształtach, których momenty bezwładności nie jest łatwo wyznaczyć metodami analitycznymi czyli metodami opartymi na wymiarach geometrycznych ciał.

W przypadku ruchu obrotowego ciała sztywnego wokół określonej osi znane jest pojęcie masowego momentu bezwładności. Analizując dynamikę ciała stałego mogącego obracać się wokół dowolnej osi w przestrzeni potrzebna jest znajomość pełnego rozkładu masy, który to rozkład wyrażamy poprzez tensor bezwładności ciała sztywnego. Tensor bezwładności określany jest w układzie współrzędnych związanym z ciałem. Tensor bezwładności jest więc zbiorem wielkości definiujących rozkład masy ciała sztywnego względem osi konkretnego układu współrzędnych, najczęściej układu związanego z ciałem. Ogólnie tensor bezwładności wyrażamy w postaci macierzy

$$I = \begin{bmatrix} B_{xx} & -B_{xy} & -B_{xz} \\ -B_{xy} & B_{yy} & -B_{yz} \\ -B_{xz} & -B_{yz} & B_{zz} \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

gdzie: B_{xx} , B_{yy} , B_{zz} – momenty bezwładności ciała względem poszczególnych osi układu współrzędnych, B_{xy} , B_{yz} , B_{xz} – momenty odśrodkowe bezwładności, wyznaczane względem poszczególnych płaszczyzn układu współrzędnych. Momenty bezwładności w równaniu (1.1) możemy zapisać jako

$$\begin{aligned} B_{xx} &= \int_m (y^2 + z^2) dm = \rho \iiint_V (y^2 + z^2) dV \\ B_{yy} &= \int_m (x^2 + z^2) dm = \rho \iiint_V (x^2 + z^2) dV \\ B_{zz} &= \int_m (x^2 + y^2) dm = \rho \iiint_V (x^2 + y^2) dV \\ B_{xy} &= \int_m xy dm = \rho \iiint_V xy dV \\ B_{xz} &= \int_m xz dm = \rho \iiint_V xz dV \\ B_{yz} &= \int_m yz dm = \rho \iiint_V yz dV \end{aligned} \quad (1.2)$$

gdzie: ρ - gęstość materiału ciała, V – objętość ciała, dV – różniczkowe elementy objętości na które podzielone jest ciało, $dV=dx dy dz$, natomiast x , y , z oznaczają współrzędne położenia elementu ciała $dm=\rho dV$ względem osi przyjętego układu współrzędnych (element o masie dm jest traktowany jako punkt materialny).

Jak widać z równania (1.2) współrzędne tensora bezwładności zależą od położenia i orientacji układu współrzędnych względem zapisujemy tensor bezwładności ciała. Dobierając orientację układu współrzędnych tak by jego osie pokrywały się z głównymi osiami bezwładności ciała uzyskujemy wyzerowanie odśrodkowych momentów bezwładności.

Tensor bezwładności (1.1) ma wówczas postać

$$I = \begin{bmatrix} B_{xx}^g & 0 & 0 \\ 0 & B_{yy}^g & 0 \\ 0 & 0 & B_{zz}^g \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

Należy pamiętać, że każda oś symetrii ciała jest jego główną centralną osią bezwładności oraz jeżeli ciało posiada płaszczyznę symetrii, to każda prosta prostopadła do tej płaszczyzny i przechodząca przez środek masy jest główną centralną osią bezwładności.

Z praktycznego punktu widzenia możemy stwierdzić, że jeżeli dwie osie układu współrzędnych tworzą płaszczyznę symetrii dla rozkładu masy ciała, to momenty odśrodkowe mające indeks współrzędnej prostopadłej do płaszczyzny symetrii będą równe zero.

Dodatkowo należy pamiętać, że suma trzech momentów bezwładności względem osi układu współrzędnych nie zależy od orientacji układu współrzędnych.

Różne metody przypisywania członom manipulatora ich układów współrzędnych wymagają czasem konieczności wyznaczania współrzędnych tensorów bezwładności względem układów współrzędnych przesuniętych względem siebie. W takich przypadkach korzystamy z *twierdzenia o osiach równoległych*. Twierdzenie to wiąże tensory bezwładności ciała, wyznaczone w dwóch przesuniętych względem siebie układach, z których jeden zaczepiony jest w środku masy ciała. W takim przypadku masowe momenty bezwładności względem osi np. x i momenty odśrodkowe względem płaszczyzny np. xy powiązane są zależnościami:

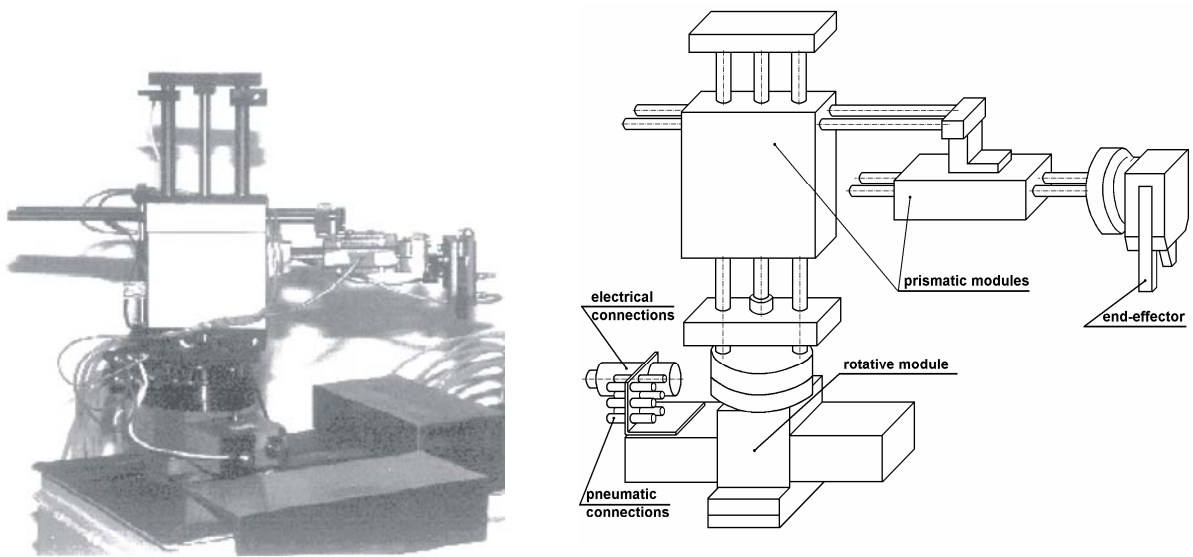
$$\begin{aligned} B_{xx}^A &= B_{xx}^C + m(y_c^2 + z_c^2) \\ B_{xy}^A &= B_{xy}^C - mx_c y_c \end{aligned} \quad (1.4)$$

gdzie górny indeks C oznacza momenty bezwładności w układzie współrzędnych zaczepionym w środku masy ciała natomiast wektor $[x_c, y_c, z_c]^T$ określa położenie środka masy w układzie A . Pozostałe momenty bezwładności i momenty odśrodkowe możemy wyznaczyć analogicznie do (1.4) zmieniając jedynie indeksy dolne.

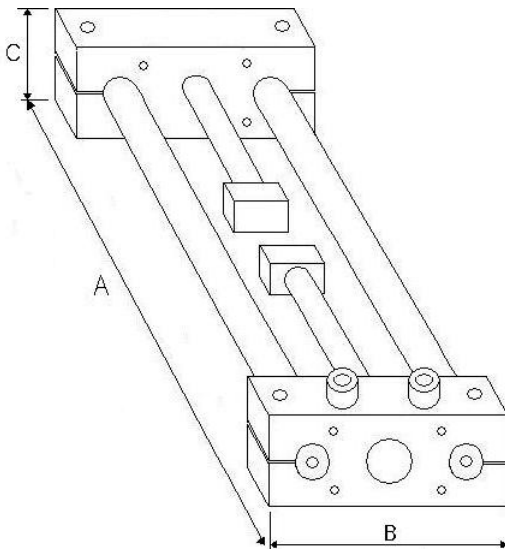
Większość członów manipulatorów ma złożone geometrycznie kształty, co często uniemożliwia zastosowanie wzorów (1.2). Alternatywą są metody doświadczalnego wyznaczania współrzędnych tensorów bezwładności członów manipulatorów. Założeniem podstawowym prezentowanych metod doświadczalnych jest założenie, iż środek masy tarczy znajduje się w jej geometrycznym środku.

1.1 Manipulator NM7M

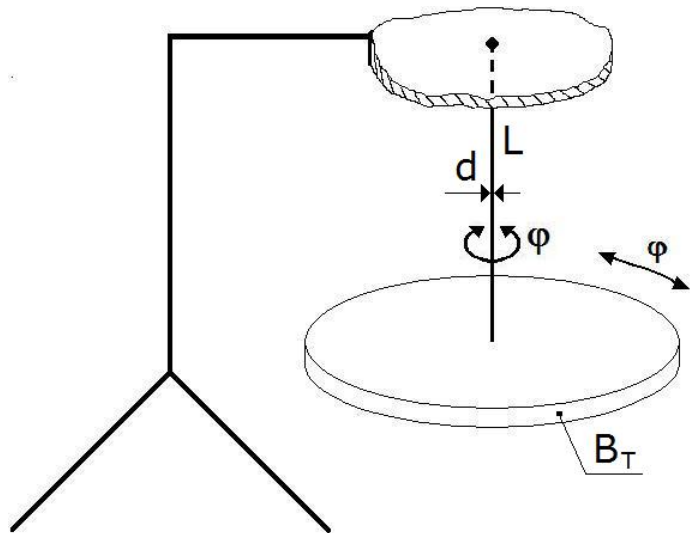
Schemat manipulatora *NM7M* przedstawiono na Rys. 1.1. Manipulator *NM7M*, [1], przeznaczony jest do ciągłego powtarzalnego przemieszczania drobnych przedmiotów na stanowiskach obróbczych, montażowych, kontrolnych lub do realizowania czynności transportu bliskiego. Manipulator posiada konstrukcję modułową i składa się z modułu obrotnicy, modułu przemieszczeń liniowych pionowych, modułu przemieszczeń liniowych poziomych i chwytaka. Zasilanie manipulatora - pneumatyczne. Przedmiotem badań laboratoryjnych są moduły przemieszczeń liniowych *MLL40*, *MLL63*, *MLL100*, Rys. 1.2. W tabeli 1.1 przedstawiono podstawowe parametry techniczne modułów liniowych.



Rys. 1.1. Zdjęcie oraz schemat manipulatora NM7M.



Rys. 1.2. Schemat modułów serii MLL [1].



Rys. 2.1. Model zawieszenia jednostrunowego.

Parametry techniczne	Moduł przemieszczeń liniowych		
	MLL 40	MLL 63	MLL 100
zakres przemieszczenia [mm]	40	63	100
wymiary A x B x C [mm]	176x76x36	224x76x36	311x93x42
zasilanie pneumatyczne [MPa]	0.4 – 0.6		
powtarzalność pozycjonowania [mm]	+- 0.05		
sterowanie	elektropneumatyczne		

[1] źródło - Ośrodek Badawczo-Rozwojowy Podstaw Technologii i Konstrukcji Maszyn TEKOMA w Warszawie.

2. Metoda zawieszenia jednonitkowego

Stanowisko pomiarowe składa się ze stojaka, na którym zawieszona jest na strunie stalowej tarcza, Rys. 2.1. Na tarczy można umieszczać badane ciało. Załóżmy niewielkie, do 10 stopni, wychylenia skrętne tarczy z położenia równowagi opisane zmienną φ . Zgodnie z drugą zasadą Newtona równanie różniczkowe ruchu tarczy ma wówczas postać

$$B_T \frac{d^2\varphi}{dt^2} + M = 0 \quad (2.1)$$

gdzie: B_T – moment bezwładności tarczy względem osi struny, M – moment reakcyjny związany ze skręceniem struny. Moment ten jest liniowo zależny od kąta skręcenia struny φ i ma postać

$$M = \frac{GI}{L} \varphi \quad (2.2)$$

gdzie: G – moduł sprężystości postaciowej struny (własność materiału z którego wykonana jest struna), I – biegunowy moment bezwładności kołowego przekroju poprzecznego struny, L – długość struny.

Wstawiając równanie (2.2) do równania (2.1) otrzymujemy

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{GI}{B_T L} \varphi = 0 \quad (2.3)$$

Ogólnie równanie (2.3) drgań tarczy możemy wyrazić jako

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \alpha^2 \varphi = 0 \quad (2.4)$$

Częstość kołowa drgań własnych tarczy wynosi więc

$$\alpha = \sqrt{\frac{GI}{B_T L}} \quad (2.5)$$

natomiast okres drgań

$$T_T = \frac{2\pi}{\alpha} = 2\pi \sqrt{\frac{B_T L}{GI}} \quad (2.6)$$

Przekształcając równanie (2.6) możemy wyznaczyć moment bezwładności tarczy względem pionowej osi obrotu (czyli struny)

$$B_T = \frac{GI}{4\pi^2 L} T_T^2 \quad [\text{kgm}^2] \quad (2.7)$$

Jak widzimy we wzorze (2.7) wyrażenie $GI/4\pi^2 L$ jest wartością stałą. Umieszczając na tarczy człon manipulatora w taki sposób by środek masy członu leżał na linii osi obrotu tarczy z członem uzyskujemy

$$B_C + B_T = \frac{GI}{4\pi^2 L} T_C^2 \quad (2.8)$$

gdzie: B_C – moment bezwładności członu względem osi obrotu tarczy, T_C - okres drgań skrętnych tarczy z umieszczonym na niej członem manipulatora.

Podstawiając (2.7) do (2.8) mamy

$$B_C = \frac{GI}{4\pi^2 L} (T_C^2 - T_T^2) \quad [\text{kgm}^2] \quad (2.9)$$

Przebieg ćwiczenia

1. Pomiar średnicy struny – d ($I = \pi d^4 / 32$) oraz długości struny - L . Materiał struny to stal 35.
2. Wprowadzenie tarczy (bez członu) w skrętny ruch drgający o kącie obrotu mniejszym od 10 stopni.
3. Pięciokrotny pomiar czasu 20 wahań tarczy bez członu manipulatora, obliczenie średniej arytmetycznej okresów wahań tarczy - T_T .
4. wyznaczenie metodą zawieszenia nitkowego położenia środka masy członu.
5. Przyjęcie układu współrzędnych członu zaczepionego w środku masy członu.
6. Umieszczenie wybranych członów *MLL 40*, *MLL 63*, *MLL 100* manipulatora *NM7M* na tarczy tak aby jego środek masy znajdował się na osi obrotu układu tarcza-człon – wyznaczenie momentów bezwładności względem trzech osi przyjętego układu współrzędnych członu – B_C poprzez zmianę położenia członu na tarczy.
7. Wprowadzenie układu tarcza-człon w skrętny ruch drgający o kącie obrotu mniejszym od 10 stopni.
8. Pięciokrotny pomiar czasu 20 wahań, obliczenie średniej arytmetycznej okresów wahań układu tarcza-człon – T_C . Wykonanie pomiarów względem trzech osi układu współrzędnych.
9. Obliczenie momentów bezwładności członu względem pionowej osi obrotu (oś struny) – wzór (2.9) dla trzech pozycji członu manipulatora na tarczy.

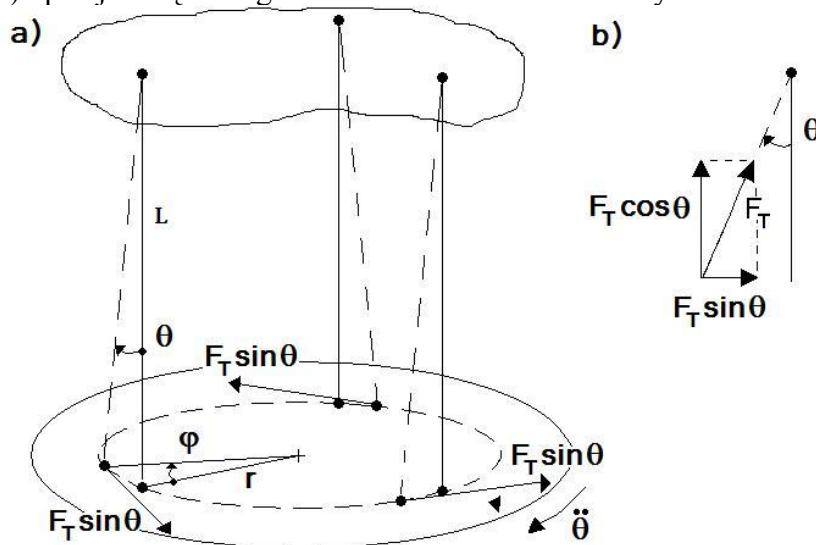
3. Metoda zawieszenia trójnitkowego

Stanowisko pomiarowe składa się ze stojaka, na którym zawieszona jest na trzech nitkach o jednakowej długości tarcza, Rys. 3.1. Na tarczy można umieszczać badane ciało. Załóżmy niewielkie, do 10 stopni, wychylenia skrętne tarczy z położenia równowagi opisane zmienną φ . Zgodnie z drugą zasadą Newtona równanie różniczkowe ruchu tarczy ma wówczas postać

$$B_T \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + M = 0 \quad (3.1)$$

gdzie: B_T – moment bezwładności tarczy względem osi pionowej, M – moment sił działających na tarczę.

Równanie (3.1) opisuje skrętne drgania własne nietłumione tarczy.



Rys. 3.1. Model zawieszenia trójnitkowego. Wychylenia katowe-a), obciążenia siłowe-b).

Wychyleniu kątowemu tarczy φ wokół pionowej osi przechodzącej przez jej środek masy odpowiada obrót nici zawieszenia tarczy o kąt Θ , Rys. 3.1a. Możemy więc zapisać zależność obu kątów jako

$$r\varphi = L\Theta \quad (3.2)$$

gdzie: r – promień mierzony od środka tarczy do punktu zamocowania nici,
 L – długość nici.

Rozważając dowolne skrętne wychylenie tarczy z położenia równowagi możemy naprężenie w nici F_T , Rys. 3.1b, wyrazić poprzez składową pionową $F_T \cos\theta$ oraz poziomą $F_T \sin\theta$. Rzutując wszystkie siły działające na tarczę na kierunek pionowy otrzymujemy

$$3F_T \cos\Theta = m_T g \quad (3.3)$$

gdzie: m_T – masa tarczy.

Pamiętając o założeniu małych kątowych wychyleń tarczy $\theta < 10^\circ$ równanie (3.3) ma postać

$$3F_T = m_T g \quad (3.4)$$

Z kolei składowa pozioma siły naprężenia nici jest siłą styczną do promienia okręgu zamocowania wszystkich trzech nici. Możemy więc moment sił działających na tarczę względem osi pionowej przechodzącej przez środek masy tarczy zapisać jako

$$M = 3F_T r \sin\Theta \quad (3.5)$$

dla $\theta < 10^\circ$ równanie (3.5) przyjmuje postać

$$M = 3F_T r \Theta \quad (3.6)$$

Wstawiając równanie (3.6) do równania (3.1) otrzymujemy

$$B_T \frac{d^2\varphi}{dt^2} + 3F_T r \Theta = 0 \quad (3.7)$$

Z równań (3.2) oraz (3.4) mamy

$$\Theta = \frac{r\varphi}{L} \quad F_T = \frac{m_T g}{3} \quad (3.8)$$

Podstawiając równanie (3.8) do (3.7) otrzymujemy równanie drgań tarczy w postaci

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{m_T g r^2}{B_T L} \varphi = 0 \quad (3.9)$$

Częstość kołowa drgań własnych tarczy wynosi więc

$$\alpha = \sqrt{\frac{m_T g r^2}{B_T L}} \quad (3.10)$$

natomiast okres drgań

$$T_T = \frac{2\pi}{\alpha} = 2\pi \sqrt{\frac{B_T L}{m_T g r^2}} \quad (3.11)$$

Przekształcając równanie (3.11) możemy wyznaczyć moment bezwładności tarczy względem pionowej osi obrotu przechodzącej przez jej środek masy

$$B_T = \frac{m_T g r^2}{4\pi^2 L} T_T^2 \quad [\text{kgm}^2] \quad (3.12)$$

Umieszczając na tarczy człon manipulatora w taki sposób by środek masy członu znajdował się na osi obrotu tarczy z członem uzyskujemy równanie (3.9) w postaci

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{(m_T + m_C) g r^2}{(B_T + B_C) L} \varphi = 0 \quad (3.13)$$

gdzie: m_C – masa członu manipulatora, B_C – moment bezwładności członu względem osi obrotu tarczy.

Przekształcając (3.13) analogicznie jak równanie (3.9) mamy

$$B_C = \frac{(m_T + m_C)gr^2}{4\pi^2 L} T_C - B_T \quad [\text{kgm}^2] \quad (3.14)$$

gdzie: T_C – okres drgań skrętnych układu tarcza - człon manipulatora.

Przebieg ćwiczenia

1. Pomiar masy tarczy - m_T , promienia zaczepienia nici – r oraz długości nici - L .
2. Pomiary mas wybranych członów *MLL 40*, *MLL 63*, *MLL 100* – m_C manipulatora *NM7M*.
3. Obliczenie momentu bezwładności tarczy względem pionowej osi obrotu przechodzącej przez jej środek masy - B_T .
 - a. wprowadzenie tarczy (bez członu) w skrętny ruch drgający o kącie obrotu mniejszym od 10 stopni.
 - b. pięciokrotny pomiar czasu 20 wahań, obliczenie średniej arytmetycznej okresów wahań tarczy - T_T .
 - c. obliczenie momentu bezwładności tarczy względem pionowej osi obrotu przechodzącej przez jej środek masy – wzór (3.12).
4. Umieszczenie członu na tarczy tak aby jego środek masy znajdował się na osi obrotu układu tarcza - człon – wyznaczenie momentów bezwładności względem trzech osi przyjętego układu współrzędnych członu – B_C poprzez zmianę położenia członu na tarczy.
 - a. wprowadzenie układu tarcza - człon w skrętny ruch drgający o kącie obrotu mniejszym od 10 stopni.
 - b. pięciokrotny pomiar czasu 20 wahań, obliczenie średniej arytmetycznej okresów wahań układu tarcza - człon – T_C .
5. obliczenie momentu bezwładności członu względem pionowej osi obrotu przechodzącej przez jej środek masy – wzór (3.14).

SPRAWOZDANIE Z DOŚWIADCZALNEGO WYZNACZANIA TENSORÓW
BEZWŁADNOŚCI METODĄ ZAWIESZENIA JEDNONITKOWEGOWyniki pomiarów doświadczalnychPomiar długości struny L :

Pomiar	Wartość średnia
1.	
2.	
3.	

Pomiar średnicy struny d :

Pomiar	Wartość średnia
1.	
2.	
3.	

Pomiar 20 wahnięć samej tarczy T_T :

Pomiar	Wartość średnia
1.	
2.	
3.	
4.	

Określenie wektora położenia środka masy członu metodą zawieszenia nitkowego:

Pomiar	Wartość średnia
1.	
2.	
3.	

Rysunek członu wraz z naniesionym położeniem środka masy oraz przyjętym układem współrzędnych zaczepionym w środku masy:



Pomiar 20 wahnięć tarczy z członem manipulatora T_C – wyznaczenie momentu bezwładności względem osi X

Pomiar	Wartość średnia
1.	
2.	
3.	
4.	

Pomiar 20 wahnięć tarczy z członem manipulatora T_C – wyznaczenie momentu bezwładności względem osi Y

Pomiar	Wartość średnia
1.	
2.	
3.	
4.	

Pomiar 20 wahnięć tarczy z członem manipulatora T_C – wyznaczenie momentu bezwładności względem osi Z

Pomiar	Wartość średnia
1.	
2.	
3.	
4.	

Wyniki obliczeń, równanie (2.9)

Masowe momenty bezwładności:

B_{xx}

B_{yy}

B_{zz}

Momenty odśrodkowe:

B_{xy}

B_{xz}

B_{yz}

Postać tensora bezwładności analizowanego członu manipulatora:

$$I = \left[\begin{array}{ccc} & & \\ & & \\ & & \end{array} \right]$$

SPRAWOZDANIE Z DOŚWIADCZALNEGO WYZNACZANIA TENSORÓW
BEZWŁADNOŚCI METODĄ ZAWIESZENIA TRÓJNITKOWEGOWyniki pomiarów doświadczalnychPomiar długości struny L :

Pomiar	Wartość średnia
1.	
2.	
3.	

Pomiar masy członu manipulatora m_C :

Pomiar	Wartość średnia
1.	
2.	
3.	

Przyjąć za dane masę tarczy $m_T = \dots\dots$ oraz promień mocowania nici $r = \dots\dots$ m.Pomiar 20 wahań samej tarczy T_T :

Pomiar	Wartość średnia
1.	
2.	
3.	
4.	

Pomiar 20 wahań tarczy z członem manipulatora T_C – wyznaczenie momentu bezwładności względem osi X

Pomiar	Wartość średnia
1.	
2.	
3.	
4.	

Pomiar 20 wahań tarczy z członem manipulatora T_C – wyznaczenie momentu bezwładności względem osi Y

Pomiar	Wartość średnia
1.	
2.	
3.	
4.	

Pomiar 20 wahań tarczy z członem manipulatora T_C – wyznaczenie momentu bezwładności względem osi Z

Pomiar	Wartość średnia
1.	
2.	
3.	
4.	

Wyniki obliczeń

Masowy moment bezwładności tarczy B_T , równanie (3.12):

$$B_T$$

Masowe momenty bezwładności, równanie (3.14):

$$B_{xx}$$

$$B_{yy}$$

$$B_{zz}$$

Momenty odśrodkowe:

$$B_{xy}$$

$$B_{xz}$$

$$B_{yz}$$

Postać tensora bezwładności analizowanego członu manipulatora:

$$I = \left[\begin{array}{ccc} & & \\ & & \\ & & \end{array} \right]$$