

LABORATORIUM TEORII MECHANIZMÓW I MASZYN

Ćwiczenie TMM-3

ANALIZA KINEMATYCZNA MECHANIZMU Z SIŁOWNIKAMI HYDRAULICZNYMI

1. Cel ćwiczenia¹

Wyznaczenie przebiegów czasowych parametrów kinematycznych ogniów mechanizmu z siłownikami hydraulicznymi.

2. Wprowadzenie teoretyczne

Analityczna metoda określania położenia, prędkości i przyspieszeń mechanizmów oparta jest na elementach geometrii analitycznej i analizy matematycznej w zapisie macierzowym. By móc zastosować tę metodę, należy zamknięty łańcuch kinematyczny, jaki tworzą ogniwa mechanizmu, zastąpić wielobokami wektorowymi. Wieloboki wektorowe wykorzystuje się do otrzymania równań opisujących położenie ogniów mechanizmu. Równania te, po zrzutowaniu na osie obranego układu współrzędnych, przybierają postać układu skalarnych równań położenia, zaś następnie po dwukrotnym zróżniczkowaniu ich względem czasu – odpowiednio układu równań prędkości i przyspieszeń. W przypadku analizy kinematycznej mechanizmów złożonych z wielu grup strukturalnych, gdzie mamy do czynienia z układami złożonymi z wielu równań, poszczególne etapy analizy przeprowadza się z wykorzystaniem rachunku macierzowego.

Położenie mechanizmu określone jest przez współrzędne wyznaczające długość ogniów i kąty nachylenia ogniów. Jeżeli stopień ruchliwości mechanizmu jest równy w , to wśród wszystkich współrzędnych można określić w współrzędnych niezależnych oraz n współrzędnych zależnych, które są niewiadomymi. Stąd liczba niezbędnych równań potrzebnych do rozwiązania zadania analizy kinematycznej jest równa n . Wynika stąd warunek, że niezbędna liczba wieloboków wektorowych jest równa $n/2$, gdyż równanie wieloboku zamkniętego

$$\sum_{i=1}^k \bar{l}_i = 0 \quad (1)$$

po zrzutowaniu na osie x i y kartezjańskiego układu współrzędnych daje dwa równania skalarne w postaci:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k l_i \cos \alpha_i &= 0; \\ \sum_{i=1}^k l_i \sin \alpha_i &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

gdzie: l_i – długość wektora o numerze i , α_i – kąt nachylenia wektora o numerze i względem osi x ,
 k – liczba wektorów w wieloboku.

Równania (2) można zapisać ogólnie w następującej postaci:

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, q_1, q_2, \dots, q_w) &= 0; \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n, q_1, q_2, \dots, q_w) &= 0; \\ \dots\dots\dots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, q_1, q_2, \dots, q_w) &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

¹ Instrukcję opracował Krzysztof Marynowski

Różniczkując układ równań (3) względem czasu otrzymuje się

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \dot{x}_2 + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \dot{x}_n + \frac{\partial f_1}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial f_1}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial q_w} \dot{q}_w &= 0; \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \dot{x}_2 + \dots + \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \dot{x}_n + \frac{\partial f_2}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial f_2}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial f_2}{\partial q_w} \dot{q}_w &= 0; \\ \dots\dots\dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial f_n}{\partial x_2} \dot{x}_2 + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \dot{x}_n + \frac{\partial f_n}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial f_n}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial q_w} \dot{q}_w &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Jakobiany A i B , występujące we wzorze (4) mają postać:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial q_1} & \frac{\partial f_1}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial q_w} \\ \frac{\partial f_2}{\partial q_1} & \frac{\partial f_2}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial q_w} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial q_1} & \frac{\partial f_n}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial q_w} \end{bmatrix} \quad (5)$$

Wykorzystując (5) układ równań różniczkowych (4) można zapisać w postaci macierzowej

$$A \dot{x} = -B \dot{q} \quad (6)$$

Równanie (6) służy do wyznaczenia nieznanymi prędkości zmiennych zależnych – składowych wektora \dot{x} .

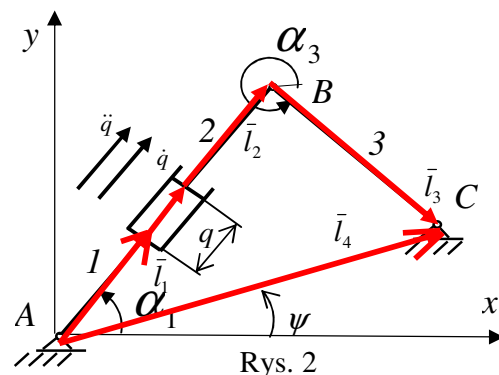
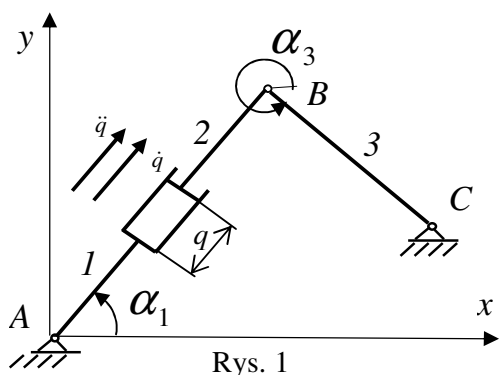
Różniczkując (6) względem czasu otrzymuje się

$$A \ddot{x} = -\dot{A} \dot{x} - B \ddot{q} - \dot{B} \dot{q} \quad (7)$$

Równanie (7) służy do wyznaczenia nieznanymi przyspieszeń zmiennych zależnych – składowych wektora \ddot{x} .

Przykład zastosowania metody analitycznej w zapisie macierzowym do analizy kinematycznej mechanizmu z siłownikiem hydraulicznym

Stosując metodę analityczną w zapisie macierzowym wyznaczyć przebiegi czasowe prędkości kątowych i przyspieszeń kątowych ogniw 1 i 3 w mechanizmie z siłownikiem hydraulicznym (Rys.1). Tłok siłownika porusza się ruchem jednostajnie przyspieszonym.



Mamy tu do czynienia z zamkniętym łańcuchem kinematycznym o stopniu ruchliwości

$$w = 3 \times 3 - 2 \times 4 = 1 \quad (\text{a})$$

Równanie wieloboku wektorowego przedstawionego na Rys.2 ma postać:

$$\bar{l}_1 + \bar{q} + \bar{l}_2 + \bar{l}_3 - \bar{l}_4 = 0 \quad (\text{b})$$

Po zrzutowaniu na osie x i y na podstawie (b) otrzymuje się dwa równania skalarne w postaci

$$\begin{aligned} (l_1 + q + l_2)\cos\alpha_1 + l_3\cos\alpha_3 - l_4\cos\psi &= 0 \\ (l_1 + q + l_2)\sin\alpha_1 + l_3\sin\alpha_3 - l_4\sin\psi &= 0 \end{aligned} \quad (\text{c})$$

Wielobok wektorowy przedstawiony na Rys..2 wykorzystuje się do rozwiązania zagadnienia położenia. Długość wektora l_4 oraz kąt ψ określają zależności:

$$\begin{aligned} l_4 &= \sqrt{x_C^2 + y_C^2}; \\ \psi &= \arctg \frac{y_C}{x_C} \end{aligned} \quad (\text{d})$$

Rozpatrując trójkąt ABC (Rys.2) i wykorzystując twierdzenie cosinusów można uzależnić kąty α_1 oraz α_3 od długości wektora q

$$\alpha_1 = \arccos \left[\frac{l_4^2 + (l_1 + q + l_2)^2 - l_3^2}{2(l_1 + q + l_2)l_4} \right] + \psi \quad (\text{e})$$

$$\alpha_3 = \arccos \left[\frac{l_3^2 + (l_1 + q + l_2)^2 - l_4^2}{2(l_1 + q + l_2)l_3} \right] + \alpha_1 + \pi \quad (\text{f})$$

Zależności (d), (e) i (f) stanowią rozwiązanie zagadnienia położenia w postaci analitycznej.

W równaniach (c) występuje jedna zmienna niezależna q , oraz dwie zmienne zależne: $x_1 = \alpha_1$ oraz $x_2 = \alpha_3$. Wektory zmiennych zależnych i niezależnych przyjmują postaci

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix}; \quad \mathbf{q} = \{q\} \quad (\text{g})$$

Po wprowadzeniu oznaczeń (g) równania (3) można zapisać w postaci:

$$\begin{aligned} f_1 &= (l_1 + q + l_2)\cos(x_1) + l_3\cos(x_2) - l_4\cos\psi = 0 \\ f_2 &= (l_1 + q + l_2)\sin(x_1) + l_3\sin(x_2) - l_4\sin\psi = 0 \end{aligned} \quad (\text{h})$$

Jakobiany A i B mają w tym przypadku postać::

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(l_1 + q + l_2)\sin(\alpha_1) & -l_3\sin(\alpha_3) \\ (l_1 + q + l_2)\cos(\alpha_1) & l_3\cos(\alpha_3) \end{bmatrix} \quad (\text{i})$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial q} \\ \frac{\partial f_2}{\partial q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha_1) \\ \sin(\alpha_1) \end{bmatrix}$$

Podstawiając (i) do (6) otrzymuje się równanie macierzowe, z którego wyznacza się nieznanne prędkości zmiennych zależnych

$$\dot{\mathbf{x}} = -\mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \dot{q} \quad (\text{j})$$

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \omega_1 \\ \omega_3 \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} -(l_1 + q + l_2) \sin(\alpha_1) & -l_3 \sin(\alpha_3) \\ (l_1 + q + l_2) \cos(\alpha_1) & l_3 \cos(\alpha_3) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \cos(\alpha_1) \\ \sin(\alpha_1) \end{bmatrix} \dot{q} \quad (k)$$

Różniczkując jakobiany **A** i **B** względem czasu otrzymuje się

$$\dot{A} = \begin{bmatrix} -\dot{q} \sin(\alpha_1) - (l_1 + q + l_2) \omega_1 \cos(\alpha_1) & -l_3 \omega_3 \cos(\alpha_3) \\ \dot{q} \cos(\alpha_1) - (l_1 + q + l_2) \omega_1 \sin(\alpha_1) & -l_3 \omega_3 \sin(\alpha_3) \end{bmatrix} \quad (l)$$

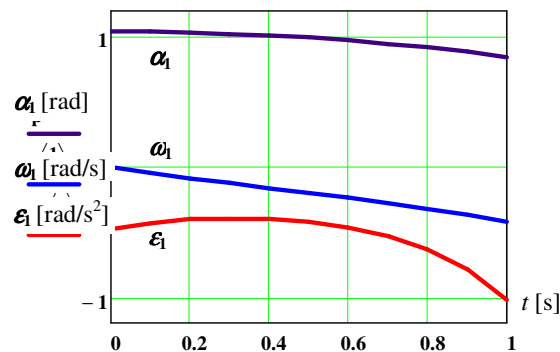
$$\dot{B} = \begin{bmatrix} -\omega_1 \sin(\alpha_1) \\ \omega_1 \cos(\alpha_1) \end{bmatrix}$$

Podstawiając (l) do (7) otrzymuje się równanie macierzowe, z którego wyznacza się nieznanne przyspieszenia zmiennych zależnych.

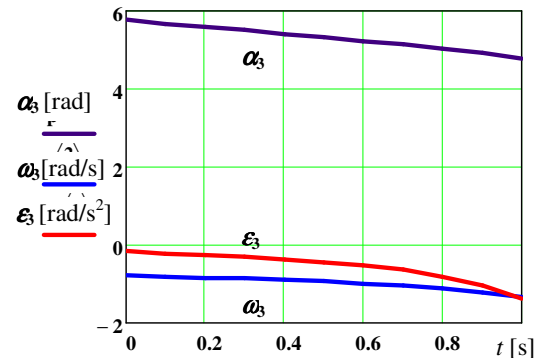
$$\ddot{x} = -A^{-1}(\dot{A}\dot{x} + B\ddot{q} + \dot{B}\dot{q}) \quad (m)$$

$$\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_3 \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} -(l_1 + q + l_2) \sin(\alpha_1) & -l_3 \sin(\alpha_3) \\ (l_1 + q + l_2) \cos(\alpha_1) & l_3 \cos(\alpha_3) \end{bmatrix}^{-1} \times \\ \times \left[\begin{bmatrix} -\dot{q} \sin(\alpha_1) - (l_1 + q + l_2) \omega_1 \cos(\alpha_1) & -l_3 \omega_3 \cos(\alpha_3) \\ \dot{q} \cos(\alpha_1) - (l_1 + q + l_2) \omega_1 \sin(\alpha_1) & -l_3 \omega_3 \sin(\alpha_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos(\alpha_1) \\ \sin(\alpha_1) \end{bmatrix} \ddot{q} + \begin{bmatrix} -\omega_1 \sin(\alpha_1) \\ \omega_1 \cos(\alpha_1) \end{bmatrix} \dot{q} \right]$$

Wykorzystując zależności (d), (e), (f) oraz równania macierzowe (k), (m) przeprowadzono obliczenia numeryczne prędkości kątowych ω_1 , ω_3 i przyspieszeń kątowych ε_1 , ε_3 dla danych liczbowych: $l_1 = 0,16$ m; $l_2 = 0,32$ m; $l_3 = 0,6314$ m; $x_0 = y_0 = 0$; $x_C = 0,96$ m; $y_C = 0,4$ m; $\alpha_{10} = 60^\circ$; $\alpha_{30} = 330^\circ$; $q_0 = 0,3464$ m; $dq/dt|_{t=0} = 0,5$ m/s, $d^2q/dt^2|_{t=0} = 0,1$ m/s². Przebiegi zmian prędkości i przyspieszeń w czasie 1 sekundy ruchu przedstawiają Rys.3 oraz Rys.4.



Rys.3. Przemieszczenie, prędkość i przyspieszenie kątowe ogniwa 1 w czasie 1 s.



Rys.4. Przemieszczenie, prędkość i przyspieszenie kątowe ogniwa 3 w czasie 1 s.

3. Przebieg ćwiczenia

Zadaniem wykonujących ćwiczenie jest przeprowadzenie analizy kinematycznej mechanizmu płaskiego z dwoma siłownikami hydraulicznymi.

W tym celu należy:

- 1) na podstawie schematu mechanizmu, dostarczonego przez prowadzącego, zbudować wieloboki wektorowe opisujące położenia ogniwa mechanizmu;
- 2) wyznaczyć równania wektorowe wyrażające warunki zamykania się wieloboków wektorowych;

- 3) dokonać rzutowania równań wieloboków wektorowych na osie przyjętego układu współrzędnych prostokątnych;
- 4) wyznaczyć rozwiązanie zagadnienia położenia ogniw rozpatrywanego mechanizmu w postaci analitycznej;
- 5) określić współrzędne wektorów zmiennych zależnych i niezależnych;
- 6) zapisać równania rzutów wieloboków wektorowych w postaci układu równań (3);
- 7) wyznaczyć jakobiany \mathbf{A} i \mathbf{B} w postaci macierzy (4);
- 8) wyznaczyć pochodne jakobianów $\dot{\mathbf{A}}$ i $\dot{\mathbf{B}}$;
- 9) na podstawie rozwiązania zagadnienia położenia oraz równań macierzowych (6), (7) zbudować program obliczeń komputerowych do przeprowadzenia analizy kinematycznej rozpatrywanego mechanizmu;
- 10) przeprowadzić analizę kinematyczną mechanizmu zgodnie z poleceniem otrzymanym od prowadzącego.

3. Sprawozdanie z laboratorium

Sprawozdanie z wykonania ćwiczenia powinno zawierać:

- skład podzespołu wykonującego,
- temat i cel ćwiczenia,
- schemat rozpatrywanego mechanizmu, dane liczbowe oraz sformułowanie zadania,
- rysunek oraz równania wieloboków wektorowych,
- równania rzutów wieloboków wektorowych,
- rozwiązanie zagadnienia położenia ogniw rozpatrywanego mechanizmu,
- współrzędne wektorów zmiennych zależnych i niezależnych,
- równania rzutów wieloboków wektorowych w postaci układu równań (3),
- jakobiany \mathbf{A} i \mathbf{B} w postaci macierzy (4),
- pochodne jakobianów $\dot{\mathbf{A}}$ i $\dot{\mathbf{B}}$,
- opis zbudowanego programu obliczeń komputerowych do analizy kinematycznej rozpatrywanego mechanizmu,
- wyniki przeprowadzonej analizy kinematycznej mechanizmu,
- wnioski.

4. Literatura

1. K. Czołczyński, Laboratorium Teorii Mechanizmów i Maszyn, Wydawnictwo Politechniki Łódzkiej, Łódź 2001
2. A. Morecki, J. Knapczyk, K. Kędzior, Teoria mechanizmów i manipulatorów, PWN, Warszawa 2001.
3. M. Kolovsky, A. Evgrafov, Y. Semenov, A. Slousch, Advanced Theory of Mechanisms and Machines, Springer Verlag 2000.