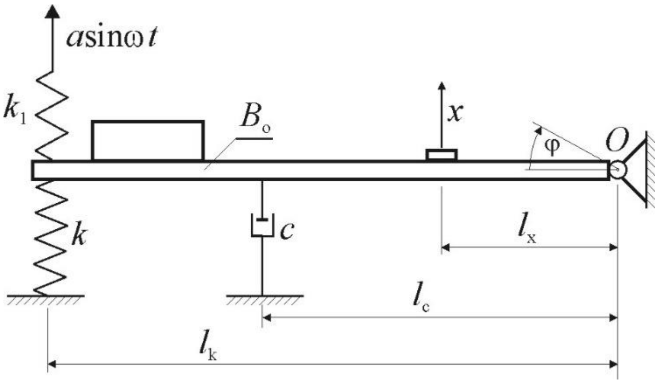
Ćwiczenie 3
Identyfikacja parametrów układu drgającego o jednym stopniu swobody

Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest określenie wartości współczynnika tłumienia, współczynnika sztywności oraz amplitudy wymuszenia układu drgającego o jednym stopniu swobody.



Rysunek 1.

Na rysunku 1 przedstawiono układ drgający złożony z następujących elementów:
- sztywna belka połączona z ostoją węzłem obrotowym *O*
- zespół sprężyn o współczynniku sztywności *k*,
- tłumik olejowy o współczynniku tłumienia *c*,
- zespół sprężyn o współczynniku sztywności k_1.

Zespół sprężyn o współczynniku sztywności k_1 połączony jest z mimośrodem na wale silnika napędowego; obracanie się wału silnika stanowi kinematyczne wymuszenie ruchu górnych końców tych sprężyn, opisane jako $a \sin\omega t$. Wskutek wymuszenia, belka wychyla się z położenia równowagi o kąt φ. Wychylenie belki mierzone jest czujnikiem przemieszczenia liniowego, określającego przemieszczenie *x* punktu belki oddalonego o l_x od osi obrotu.
Równanie ruchu liniowego modelu fizycznego badanego układu jest następujące:

$$B_o\ddot{\phi} + cl_c^2\dot{\phi} + (k + k_1)\phi = k_1 l_k a \sin\omega t \qquad (1)$$

gdzie: B_o – moment bezwładności belki względem osi obrotu,

Dzieląc równanie (1) przez B_o i mnożąc przez l_x otrzymuje się

$$l_x\ddot{\phi} + \frac{cl_c^2}{B_o} l_x\dot{\phi} + \frac{k+k_1}{B_o} l_x\phi = \frac{k_1 l_k a l_x}{B_0} \sin\omega t \qquad (2)$$

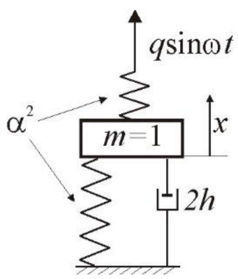
Oznaczając:

$$l_x\ddot{\phi} = \ddot{x},\ \ \frac{cl_c^2}{B_o} = 2h,\ \ l_x\dot{\phi} = \dot{x},\ \ \frac{k+k_1}{B_o} = \alpha^2,\ \ l_x\phi = x,\ \ \frac{k_1 l_k a l_x}{B_0} = q, \qquad (3)$$

można zapisać równanie (1) w postaci

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \alpha^2 x = q \sin\omega t \qquad (4)$$

gdzie:
$2h$ - tłumienie
α^2 - częstość kołowa swobodnych drgań układu
q - wymuszenie kinematyczne,



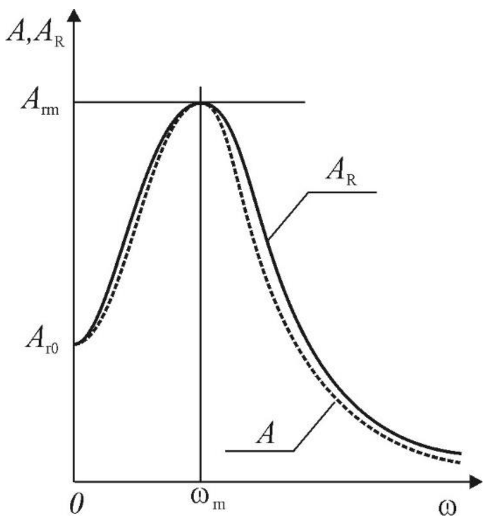
Rysunek 2

Rozwiązaniem szczególnym równania (4), opisującym drgania wymuszone modelu fizycznego badanego układu, pokazanego na rysunku 2, jest funkcja

$$x = A\,sin(\,\omega t + \beta), \qquad (5)$$

gdzie *A* jest amplitudą drgań wymuszonych a β - kątem fazowym pomiędzy przebiegiem wymuszenia kinematycznego a przebiegiem drgań modelu fizycznego.
Amplituda *A* wyrażona jest wzorem:

$$A = \frac{q}{\sqrt{(\alpha^2-\omega^2)^2+4h^2\omega^2}}. \qquad (6)$$



Rysunek 3

Wyznaczenie wartości parametrów α, *h*, *q*, to właśnie jest zadanie, które można rozwiązać następująco:
Dokonując pomiaru amplitudy drgań układu rzeczywistego przy różnych wartościach częstości kołowej wymuszenia, otrzymuje się rzeczywisty wykres rezonansowy $A_r(\omega)$, przedstawiony na rysunku 3 linią ciągłą.
Wartość amplitudy drgań układu rzeczywistego dla małej (praktycznie równej zeru) wartości częstości kołowej ω, oznaczono jako A_{R0}. Amplituda osiąga wartość maksymalną A_{Rm} przy częstości rezonansowej ω_m.
Teoretyczny wykres rezonansowy, przedstawiony na rysunku 3 linią przerywaną wynika z obliczeń wartości amplitudy drgań *A* za pomocą wzoru (6).

Zakłada się, że oba wykresy rezonansowe muszą spełniać trzy warunki:

1. Dla częstości kołowej ω bliskiej zeru, amplitudy A i A_R są takie same:

$$A(0) = \frac{q}{\sqrt{(\alpha^2-0^2)^2+4h^2 0^2}} = \frac{q}{\alpha^2} = A_{R0}. \tag{7}$$

2. Dla częstości kołowej rezonansowej ω_m, amplitudy A i A_R są także takie same:

$$A(\omega_m) = \frac{q}{\sqrt{\left(\alpha^2-\omega_m^2\right)^2+4h^2\omega_m^2}} = A_{Rm}. \tag{8}$$

3. Dla częstości ω_m, amplituda A osiąga wartość maksymalną (podobnie jak A_R):

$$\frac{\partial A}{\partial \omega}\,(\omega=\omega_m) = \frac{q[-4\omega(\alpha^2-\omega^2\,)+8h^2\omega]}{2\sqrt{\left(\left(\alpha^2-\omega_m^2\right)^2+4h^2\omega^2\,\right)^3}} = 0 \tag{9}$$

Układ równań (7), (8), (9) można łatwo przekształcić do postaci

$$q = \frac{\omega_m^2 A_{R0}}{\xi},\ \ \alpha^2 = \frac{\omega_m^2}{\xi},\ \ 2h = \omega_m\sqrt{\frac{1}{2\xi} - 1}$$

gdzie $\xi = \sqrt{1-\frac{A_{R0}^2}{A_{Rm}^2}}$ (10)

co pozwala na obliczenie nieznanych wartości parametrów α, h, q.
Znajomość tych wartości pozwala na identyfikację parametrów układu rzeczywistego na podstawie wzorów:

$$c = \frac{2hB_0}{l_c^2},\ \ k_1 a = \frac{qB_0}{l_k l_x},\ k = B_0\alpha^2 - k_1. \tag{11}$$

Pomiary dokonane wcześniej dostarczają wartości parametrów:

$$B_0 = 1.38\ \mathrm{kgm}^2,\ l_c = 0.54\ \mathrm{m},\ l_k = 0.54\ \mathrm{m},\ l_x = 0.24\ \mathrm{m}. \tag{12}$$

Przebieg ćwiczenia:

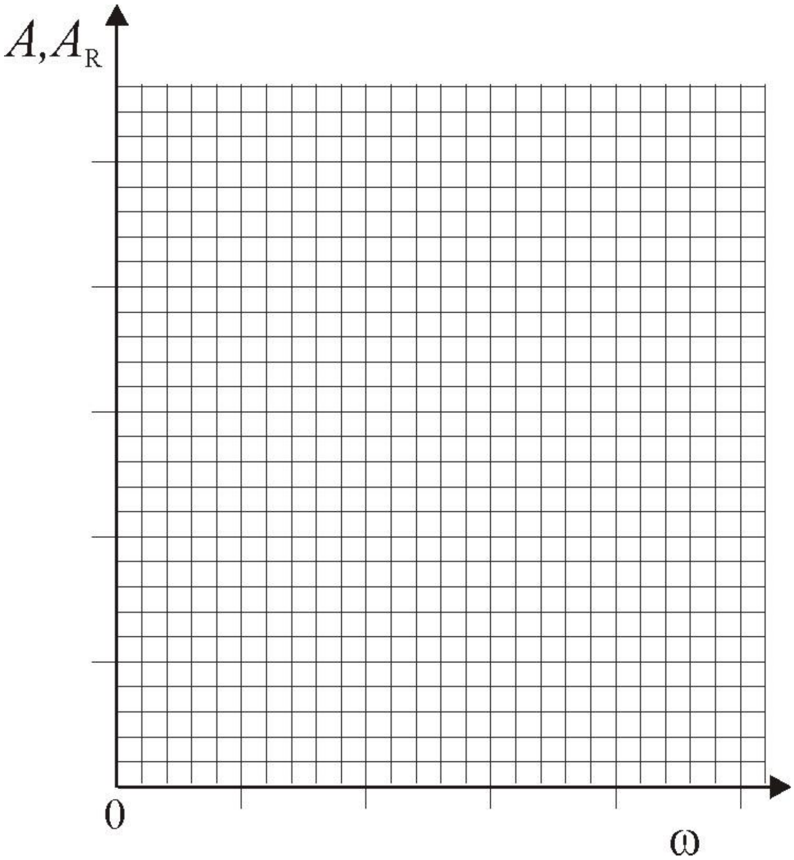
1. Zmierzyć amplitudę drgań A_R dla różnych wartości prędkości kątowej ω; liczba pomiarów – około 15. Ustalić wartość ω_m, dla której amplituda drgań osiąga wartość maksymalną A_{Rm}. Ustalić wartość amplitudy A_{R0} przy bliskiej zeru prędkości kąrowej. Wyniki wpisać do tabeli.
2. Obliczyć wartości parametrów α, h, q, korzystając ze wzorów (10).
3. Obliczyć wartości amplitudy A teoretycznego wykresu rezonansowego, korzystając ze wzoru (6), dla tych wartości ω, dla których dokonano pomiaru A_R.
4. Narysować rzeczywisty i teoretyczny wykres rezonansowy.
5. Obliczyć wartości parametrów układu rzeczywistego k, c, $k_1 a$, korzystając ze wzorów (11) i wartości parametrów podanych w (12).

Imię i Nazwisko:…………………….…….. Grupa:……………… Ocena:………..

Sprawozdanie z ćwiczenia 3
Identyfikacja parametrów układu drgającego o jednym stopniu swobody

Wyniki pomiarów:

ω	A_R	A



$\omega_m=$ $A_{Rm}=$ $A_{R0}=$

Obliczenia parametrów modelu fizycznego:

$$\xi = \sqrt{1 - \frac{A_{R0}^2}{A_{Rm}^2}} = \qquad q = \frac{\omega_m^2 A_{R0}}{\xi} = \qquad \alpha^2 = \frac{\omega_m^2}{\xi} = \qquad 2h = \omega_m \sqrt{\frac{1}{2\xi} - 1} =$$

Wzór do obliczania amplitudy drgań modelu fizycznego

$$A = \frac{q}{\sqrt{(\alpha^2 - \omega^2)^2 + 4h^2\omega^2}} =$$

Obliczenia wartości parametrów układu rzeczywistego:

$$c = \frac{2hB_0}{l_c^2} = \qquad k_1 = \frac{qB_0}{al_k l_x} = \qquad k = B_0\alpha^2 - k_1 =$$