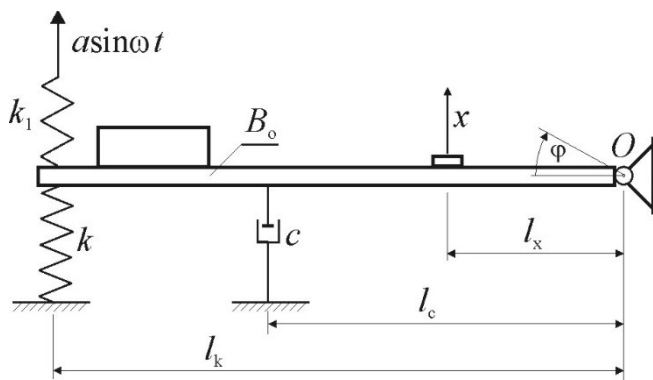


Ćwiczenie 3

Identyfikacja parametrów układu drgającego o jednym stopniu swobody

Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest określenie wartości współczynnika tłumienia, współczynnika sztywności oraz amplitudy wymuszenia układu drgającego o jednym stopniu swobody.



Rysunek 1

Na rysunku 1 przedstawiono układ drgający złożony z następujących elementów:

- sztywna belka połączona z ostoją węzłem obrotowym O ,
- zespół sprężyn podpierających o zastępczym współczynniku sztywności k [N/m],
- tłumik olejowy o współczynniku tłumienia c [kg/s],
- sprężyna wymuszająca o współczynniku sztywności k_1 [N/m],

Sprężyna o współczynniku sztywności k_1 połączona jest z mimośrodem na wale silnika napędowego; obracanie się wału silnika stanowi kinematyczne wymuszenie ruchu górnych końców tych sprężyn, opisane jako $a \sin(\omega t)$. Wskutek wymuszenia, belka wychyla się z położenia równowagi o kąt φ . Wychylenie belki mierzone jest czujnikiem przemieszczenia liniowego, określającego przemieszczenie x punktu belki oddalonego o l_x od osi obrotu.

Równanie ruchu liniowego modelu fizycznego badanego układu jest następujące:

$$B_o \ddot{\phi} + c l_c^2 \dot{\phi} + (k + k_1) \phi = k_1 l_k a \sin \omega t \quad (1)$$

gdzie:

B_o – moment bezwładności belki względem osi obrotu,

Dzieląc równanie (1) przez B_o i mnożąc przez l_x otrzymuje się

$$l_x \ddot{\phi} + \frac{c l_c^2}{B_o} l_x \dot{\phi} + \frac{k + k_1}{B_o} l_x \phi = \frac{k_1 l_k a l_x}{B_o} \sin \omega t \quad (2)$$

Oznaczając:

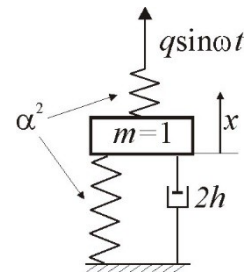
$$l_x \ddot{\phi} = \ddot{x}, \quad \frac{c l_c^2}{B_o} = 2h, \quad l_x \dot{\phi} = \dot{x}, \quad \frac{k + k_1}{B_o} = \alpha^2, \quad l_x \phi = x, \quad \frac{k_1 l_k a l_x}{B_o} = q, \quad (3)$$

można zapisać równanie (1) w postaci

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \alpha^2 x = q \sin \omega t \quad (4)$$

gdzie:

- $2h$ - tłumienie
- α^2 - częstość kołowa swobodnych drgań układu
- q - wymuszenie kinematyczne,



Rysunek 2

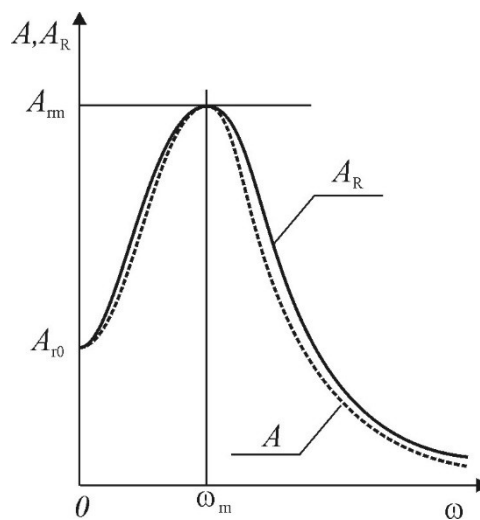
Rozwiązaniem szczególnym równania (4), opisującym drgania wymuszone modelu fizycznego badanego układu, pokazanego na rysunku 2, jest funkcja

$$x(t) = A \sin(\omega t + \beta), \quad (5)$$

gdzie A jest amplitudą drgań wymuszonych a β – kątem fazowym pomiędzy przebiegiem wymuszenia kinematycznego a przebiegiem drgań modelu fizycznego.

Amplituda A wyrażona jest wzorem reprezentującym zależność od częstości wymuszenia ω :

$$A(\omega) = \frac{q}{\sqrt{(\alpha^2 - \omega^2)^2 + 4h^2\omega^2}}. \quad (6)$$



Rysunek 3

Wyznaczenie wartości parametrów α , h , q , jest zadaniem, które można rozwiązać następująco:

- Dokonując pomiaru amplitudy drgań układu rzeczywistego przy różnych wartościach częstości kołowej wymuszenia, otrzymuje się rzeczywisty wykres rezonansowy $A_r(\omega)$, przedstawiony na rysunku 3 linią ciągłą.
- Wartość amplitudy drgań układu rzeczywistego dla małej (praktycznie równej zero) wartości częstości kołowej ω , oznaczono jako A_{R0} . Amplituda osiąga wartość maksymalną A_{Rm} przy częstości rezonansowej ω_m .

Teoretyczny wykres rezonansowy, przedstawiony na rysunku 3 linią przerywaną wynika z obliczeń wartości amplitudy drgań A za pomocą wzoru (6).

Zakłada się, że oba wykresy rezonansowe muszą spełniać trzy warunki:

1. Dla częstości kołowej ω bliskiej zeru, amplitudy A i A_{R0} są takie same:

$$A(0) = \frac{q}{\sqrt{(\alpha^2 - 0^2)^2 + 4h^2 0^2}} = \frac{q}{\alpha^2} = A_{R0}. \quad (7)$$

2. Dla częstości kołowej rezonansowej ω_m , amplitudy A i A_R są także takie same:

$$A(\omega_m) = \frac{q}{\sqrt{(\alpha^2 - \omega_m^2)^2 + 4h^2 \omega_m^2}} = A_{Rm}. \quad (8)$$

3. Dla częstości ω_m , amplituda A osiąga wartość maksymalną (podobnie jak A_R):

$$\frac{\partial A}{\partial \omega} = \frac{q[-4\omega_m(\alpha^2 - \omega_m^2) + 8h^2 \omega_m]}{2\sqrt{((\alpha^2 - \omega_m^2)^2 + 4h^2 \omega_m^2)^3}} = 0, \quad \text{dla } \omega = \omega_m \quad (9)$$

Rozwiązując układ trzech równań (7), (8), (9) można łatwo przekształcić go do postaci

$$q = \frac{\omega_m^2 A_{R0}}{\xi}, \quad \alpha^2 = \frac{\omega_m^2}{\xi}, \quad 2h = \omega_m \sqrt{\frac{1}{2\xi} - 1}, \quad \text{gdzie } \xi = \sqrt{1 - \frac{A_{R0}^2}{A_{Rm}^2}} \quad (10)$$

co pozwala na obliczenie nieznanymi wartości parametrów α , h , q .

Znajomość tych wartości pozwala na identyfikację parametrów układu rzeczywistego na podstawie wzorów:

$$c = \frac{2hB_0}{l_c^2}, \quad k_1 = \frac{qB_0}{al_k l_x}, \quad k = B_0 \alpha^2 - k_1. \quad (11)$$

Pomiary dokonane wcześniej dostarczają wartości parametrów:

$$B_0 = 1.38 \text{ kg m}^2, \quad l_c = 0.54 \text{ m}, \quad l_k = 0.54 \text{ m}, \quad l_x = 0.24 \text{ m}, \quad a = 0.003 \text{ m}. \quad (12)$$

Przebieg ćwiczenia:

1. Zmierzyć amplitudę drgań A_R dla różnych wartości prędkości kątowej ω ; liczba pomiarów – około 15, szczególnie gęsto w okolicy rezonansu, gdyż jest to najbardziej interesująca nas wartość. Ustalić wartość ω_m , dla której amplituda drgań osiąga wartość maksymalną A_{Rm} . Ustalić wartość amplitudy A_{R0} przy bliskiej zeru prędkości kątowej. Wyniki wpisać do tabeli.
2. Obliczyć wartości parametrów α , h , q , korzystając ze wzorów (10).
3. Obliczyć wartości amplitudy A teoretycznego wykresu rezonansowego, korzystając ze wzoru (6), dla tych wartości ω , dla których dokonano pomiaru A_R .
4. Narysować rzeczywisty i teoretyczny wykres rezonansowy.
5. Obliczyć wartości parametrów układu rzeczywistego k , c , k_1 korzystając ze wzorów (11) i wartości parametrów podanych w (12).

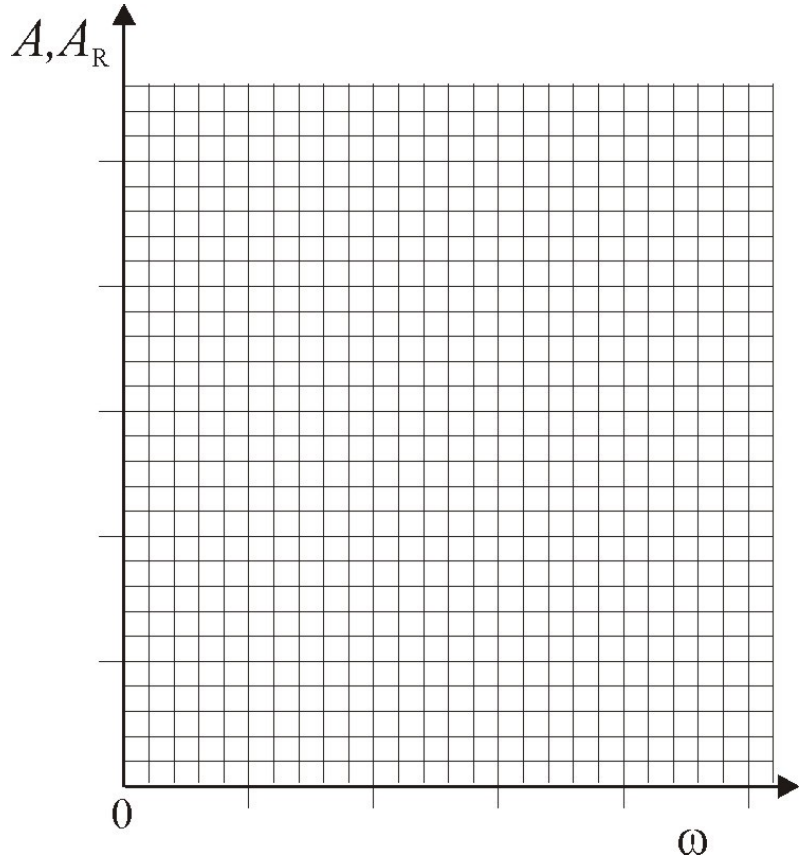
Imię i Nazwisko:.....

Grupa:..... Ocena:.....

Sprawozdanie z ćwiczenia 3 Identyfikacja parametrów układu drgającego o jednym stopniu swobody

Wyniki pomiarów:

ω	A_R	A



$\omega_m = \dots\dots$ $A_{Rm} = \dots\dots$ $A_{R0} = \dots\dots$

Obliczenia parametrów modelu fizycznego:

$\xi = \sqrt{1 - \frac{A_{R0}^2}{A_{Rm}^2}} = \dots\dots [\quad]$ $q = \frac{\omega_m^2 A_{R0}}{\xi} = \dots\dots [\quad]$ $\alpha^2 = \frac{\omega_m^2}{\xi} = \dots\dots [\quad]$ $2h = \omega_m \sqrt{\frac{2-2\xi}{\xi}} = \dots\dots [\quad]$

Wzór do obliczania amplitudy drgań modelu fizycznego

$$A = \frac{q}{\sqrt{(\alpha^2 - \omega^2)^2 + 4h^2 \omega^2}} = \dots\dots [\quad]$$

$B_0 = 1.38 \text{ kg m}^2$, $l_c = 0.54 \text{ m}$, $l_k = 0.54 \text{ m}$, $l_x = 0.24 \text{ m}$, $a = 0.003 \text{ m}$.

Obliczenia wartości parametrów układu rzeczywistego:

$c = \frac{2hB_0}{l_c^2} = \dots\dots [\quad]$ $k_1 = \frac{qB_0}{al_k l_x} = \dots\dots [\quad]$ $k = \frac{B_0 a^2}{l_k^2} - k_1 = \dots\dots [\quad]$