

WYZNACZANIE OKRESU MAŁYCH I DUŻYCH WAHAŃ WAHADŁA FIZYCZNEGO

Cwiczenie 5

1 Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest pomiar okresu wahań wahadła fizycznego i porównanie wyników uzyskanych z doświadczenia z rezultatami obliczeń teoretycznych. Obliczenia przeprowadzane są analitycznie – na podstawie rozwiązywania równania opisującego dowolnie duże ruchy wahadła (za pomocą całek eliptycznych), całkowania numerycznego jak również przy wykorzystaniu przybliżonego równania ruchu opisującego małe wahania. Wyniki te porównywane są z pomiarami na stanowisku eksperymentalnym.

2 Wprowadzenie

Wahadłem fizycznym nazywa się ciało sztywne obracające się wokół nieruchomej poziomej osi w jednorodnym polu sił ciężkości¹. Oś obrotu nie może przechodzić przez środek ciężkości wahadła. Analiza ruchu wahadła fizycznego jest klasycznym zadaniem z mechaniki. Wahadło może być przykładem z zakresu dynamiki ciała poruszającego się ruchem obrotowym. Dobrze ilustruje ono zastosowanie twierdzenia o ruchu środka masy do wyznaczania reakcji łożyska ciała poruszających się ruchem obrotowym. Wykorzystywane jest także jako przykład ruchu harmonicznego, drgań harmonicznym.

Mając na uwadze dynamiczne równania ruchu ciała można – na przykładzie wahadła – w krótkim czasie pokazać jak wyprowadza się równania ruchu układu przy wykorzystaniu równań Lagrange’a, a także, na czym polega linearyzacja modelu matematycznego². Uwzględnienie oporów ruchu (tarcie w łożyskach, opór powietrza) komplikuje równania ruchu, ale pozwala zilustrować szereg innych zjawisk (wygasanie wahań, ruch quasi-okresowy).

Pomiar okresu wahań ciała wokół określonej osi pozwala na doświadczalne wyznaczenie momentu bezwładności ciała względem tej osi (jest to prosta i dokładna metoda wyznaczania momentu bezwładności. W analizie dynamiki maszyn wahadło fizyczne jest używane do modelowania ruchu zawieszonego ładunku (np. w obliczeniach suwnic).

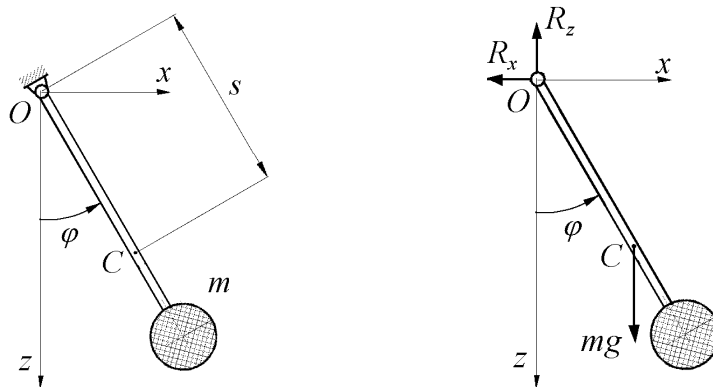
¹Bryła sztywna, na którą nałożone są więzy geometryczne pozwalające na obrót ciała wokół jednego punktu nosi nazwę wahadła fizycznego. Interesujące są też różne inne rodzaje układów nazywanych wahadłami – jak na przykład wahadło Foucaulta (w równaniach ruchu wahadła jest uwzględnione przyspieszenie Coriolisa wynikające z ruchu obrotowego Ziemi), wahadło eliptyczne (to jest takie, którego punkt zawieszenia porusza się ruchem harmonicznym), czy też wahadła sympatyczne (dwa jednakowe wahadła matematyczne połączone sprężyną).

²Chodzi tu o zastąpienie nieliniowych równań ruchu równaniami liniowymi.

3 Podstawowe zależności teoretyczne

Rozpatrywany jest model wahadła (rys. 1) obracającego się wokół osi y . Jego położenie jest opisane za pomocą kąta φ . Do oznaczenia parametrów ciała użyte zostały następujące symbole:

- J_y – masowy moment bezwładności względem osi wahań (y),
- m – całkowita masa wahadła,
- s – odległość środka ciężkości (punktu C) wahadła od osi wahań.



Rysunek 1: Wahadło fizyczne

3.1 Równania ruchu wahadła fizycznego

Równanie ruchu wahadła fizycznego (rys. 5.1) ma postać

$$J_y \ddot{\varphi} = -mgs \sin \varphi. \quad (1)$$

lub

$$\ddot{\varphi} + \frac{mgs}{J_y} \sin \varphi = 0. \quad (2)$$

Równanie o postaci (2) jest *nieliniowym równaniem różniczkowym*. Analityczne rozwiązanie takiego równania można wyznaczyć używając całek eliptycznych. Taki sposób rozwiązywania jest omawiany w sekcji 3.3. Równanie to może być też rozwiązywane na drodze całkowania numerycznego.

Przyjmując, że dla małych kątów φ funkcję $\sin \varphi$ można zastąpić kątem φ wyrażonym w mierze łukowej ($\sin \varphi \approx \varphi$), równanie ruchu wahadła (2) można przedstawić w formie

$$\ddot{\varphi} + \frac{mgs}{J_y} \varphi = 0. \quad (3)$$

Ta forma jest *liniowym równaniem różniczkowym*, które opisuje ruch wahadła przy małych wychyleniach (to znaczy nieprzekraczających kilku stopni) od położenia równowagi. Rozwiązaniem ogólnym tego równania jest funkcja harmoniczna o postaci

$$\varphi = a \sin(\omega_0 t + \alpha_0). \quad (4)$$

3.2 Okres małych wahań wahadła fizycznego

Funkcja (4) jest funkcją okresową, o okresie $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$, przy czym

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgs}{J_y}}. \quad (5)$$

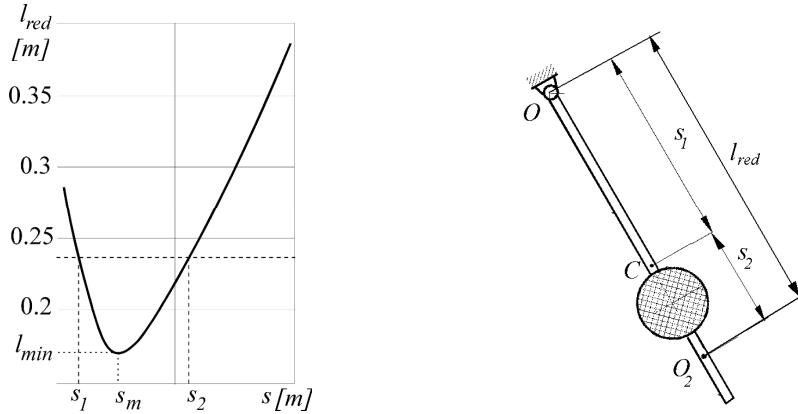
Okres wahań wahadła fizycznego dla małych kątów wychylenia jest zatem

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J_y}{mgs}} = 2\pi\sqrt{\frac{l_{\text{red}}}{g}}, \quad (6)$$

gdzie: l_{red} – jest nazywane długością zredukowaną wahadła ($l_{\text{red}} = \frac{J_y}{mgs}$). Długość zredukowana dla wahadła fizycznego może być przedstawiona w postaci

$$l_{\text{red}} = \frac{J_y}{ms} = \frac{J_{yC} + ms^2}{ms} = \frac{J_{yC}}{ms} + s, \quad (7)$$

gdzie J_{yC} oznacza moment bezwładności ciała względem osi centralnej (przechodzącej przez środek ciężkości C). Przykładowy przebieg funkcji $l_{\text{red}}(s)$ jest przedstawiony na rys. 2 (dla danych wartości J_{yC} i m). Funkcja ta ma minimum lokalne, a więc dla każdego wahadła fizycznego można wyznaczyć takie wzajemne położenie osi obrotu i środka ciężkości, dla którego okres drgań T osiąga minimum.



Rysunek 2: Przebieg zmian długości zredukowanej wahadła (l_{red}) w funkcji odległości środka ciężkości wahadła od osi obrotu (s)

Z analizy przebiegu funkcji $l_{\text{red}} = f(s)$ wynikają następujące wnioski:

- Minimalny okres wahań wahadła fizycznego jest określony zależnością

$$T_{\text{min}} = 2\pi\sqrt{\frac{2J_{yC}}{mg}}.$$

- Minimalnemu okresowi wahań odpowiada minimalna długość zredukowana wahadła

$$l_{\text{red min}} = 2\sqrt{\frac{J_{yC}}{m}}.$$

- Minimalny okres wahań wahadła ma miejsce wtedy, gdy odległość środka ciężkości ciała od osi obrotu wynosi

$$s_m = \frac{1}{2} l_{\text{red min}} = \sqrt{\frac{J_y C}{m}}.$$

Jeśli odległość s jest różna od s_m ($s \neq s_m$), to każdej długości zredukowanej ($l_{\text{red}} > l_{\text{red min}}$) odpowiadają dwie wartości odległości s ($s = s_1$ i $s = s_2$, przy czym $s_1 + s_2 = l_{\text{red}}$), dla których okres wahań jest jednakowy.

Zatem ciało zawieszone na osi przechodzącej przez punkt O_2 ma ten sam okres wahań jak w przypadku osi przechodzącej przez punkt O i nosi nazwę wahadła odwróconego albo rewersyjnego.

3.3 Okres dużych wahań wahadła fizycznego – rozwiązanie analityczne

Równanie ruchu wahadła przy dowolnie dużych wychyleniach ma postać podaną równaniem (1), to znaczy z nieliniową funkcją sinus ma postać

$$J_y \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -mgs \sin \varphi. \quad (8)$$

Wprowadzając długość zredukowaną wahadła fizycznego $l_{\text{red}} = \frac{J_y}{mgs}$ równanie ruchu można przedstawić w formie

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} = \frac{g}{l_{\text{red}}} \sin \varphi. \quad (9)$$

Wykorzystując poniższą zależność

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} = \frac{d\varphi}{dt} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d}{d\varphi} (\omega^2), \quad (10)$$

równanie (9) można przedstawić jako

$$\frac{d}{d\varphi} (\omega^2) = \frac{2g}{l_{\text{red}}} \sin \varphi. \quad (11)$$

Rozdzielając zmienne

$$d(\omega^2) = \frac{2g}{l_{\text{red}}} \sin \varphi d\varphi \quad (12)$$

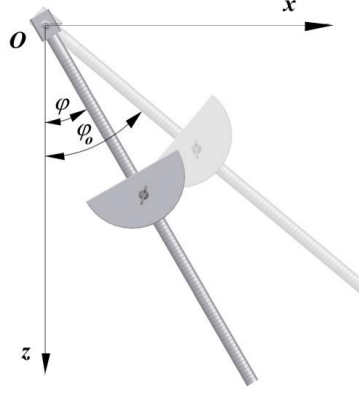
i całkując obie strony równania otrzymuje się

$$\omega^2 = -\frac{2g}{l_{\text{red}}} \cos \varphi + 2h, \quad (13)$$

gdzie stała całkowania została oznaczona jako $2h$ ($2h = \text{const}$).

Zakładając warunki początkowe (dla $t = 0$) o postaci: $(\omega)_{t=0} = 0$, $(\varphi)_{t=0} = \varphi_0$ (rys. 3) i wyznaczając dla tych warunków stałe całkowania otrzymuje się

$$2h = \frac{2g}{l_{\text{red}}} \cos \varphi_0. \quad (14)$$



Rysunek 3: Położenie początkowe (φ_0) i dowolne położenie (φ) wahadła

Równanie określające kwadrat prędkości kątowej wahadła ma zatem postać

$$\omega^2 = \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = \frac{2g}{l_{\text{red}}} (\cos \varphi - \cos \varphi_0). \quad (15)$$

Dla wyznaczenia okresu dużych wahań wahadła konieczne jest rozwiązanie równania

$$\frac{d\varphi}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2g}{l_{\text{red}}} (\cos \varphi - \cos \varphi_0)}. \quad (16)$$

Równanie to jest również rozwiązywane metodą rozdzielania zmiennych – stąd

$$dt = \pm \frac{d\varphi}{\sqrt{\frac{2g}{l_{\text{red}}} (\cos \varphi - \cos \varphi_0)}}. \quad (17)$$

Całkując lewą stronę w granicach $(0, t)$, a prawą w granicach (φ_0, φ) otrzymuje się

$$t = \pm \sqrt{\frac{l_{\text{red}}}{2g}} \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \varphi_0}}. \quad (18)$$

Ponieważ dla wahadła kąt φ zmienia się w granicach $(-\varphi_0, +\varphi_0)$, to wyrażenie $(\cos \varphi - \cos \varphi_0)$ przyjmuje dodatnie wartości $((\cos \varphi - \cos \varphi_0) > 0)$, a kąt w pierwszej fazie ruchu będzie malał (rys. 5.3). Należy zatem przyjąć znak minus przed pierwiastkiem

$$t = -\sqrt{\frac{l_{\text{red}}}{2g}} \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \varphi_0}}. \quad (19)$$

We wzorze (5.19) można wykorzystać następujące tożsamości:

$$\cos \varphi = 1 - 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}, \quad \cos \varphi_0 = 1 - 2 \sin^2 \frac{\varphi_0}{2} \quad (20)$$

i wprowadzić nową zmienną ψ

$$\sin \psi = \frac{\sin \frac{\varphi}{2}}{\sin \frac{\varphi_0}{2}}. \quad (21)$$

Wyznaczając różniczkę zupełną wyrażenia (21) otrzymuje się

$$\cos \psi d\psi = \frac{1}{2} \frac{\cos \frac{\varphi}{2}}{\sin \frac{\varphi_0}{2}} d\varphi, \quad (22)$$

stąd

$$d\varphi = 2 \frac{\sin \frac{\varphi_0}{2} \cos \psi}{\cos \frac{\varphi}{2}} d\psi. \quad (23)$$

Stosując zamianę zmiennych należy ustalić (na podstawie zależności (21)) nowe granice całkowania: - dolną (po wstawieniu $\varphi = \varphi_0$)

$$(\sin \psi)_{\varphi=\varphi_0} = 1, \quad \psi_{\varphi=\varphi_0} = \frac{\pi}{2}, \quad (24)$$

- górną (po podstawieniu $\varphi = 0$)

$$(\sin \psi)_{\varphi=0} = 0, \quad \psi_{\varphi=0} = 0. \quad (25)$$

Uwzględniając powyższe w zależności (19), po przekształceniach otrzymuje się

$$t = \sqrt{\frac{l_{\text{red}}}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}}, \quad (26)$$

gdzie wprowadzono oznaczenie

$$k = \sin \frac{\varphi_0}{2}. \quad (27)$$

Całka o postaci

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}} \quad (28)$$

nosi nazwę całki eliptycznej pierwszego rodzaju w postaci Legendre'a. W przypadku, gdy górna granica całkowania wynosi $\pi/2$, to omawiana całka jest nazywana całką eliptyczną zupełną pierwszego rodzaju

$$K(k) \equiv F\left(\frac{\pi}{2} \middle| k\right) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}}. \quad (29)$$

Nie ma ona rozwiązania na drodze elementarnej. Jej wartości liczbowe podawane są w tablicach całek eliptycznych jako funkcje parametru k .

Poszukiwane rozwiązanie równania (26), które jest rozwiązaniem równania ruchu wahadła (5.9) ze względu na zmienną t można zatem przedstawić jako

$$t = \sqrt{\frac{l_{\text{red}}}{g}} K(k). \quad (30)$$

Wyznaczony w ten sposób czas t dla kąta φ , zmieniającego się w granicach $(\varphi_0, 0)$ odpowiada 1/4 okresu wahań.

Zatem **okres dużych wahań wahadła** τ ($\tau = 4t$) jest wyrażony zależnością

$$\tau = 4K(k) \sqrt{\frac{l_{\text{red}}}{g}} = 4K(k) \sqrt{\frac{J_y}{mgs}}. \quad (31)$$

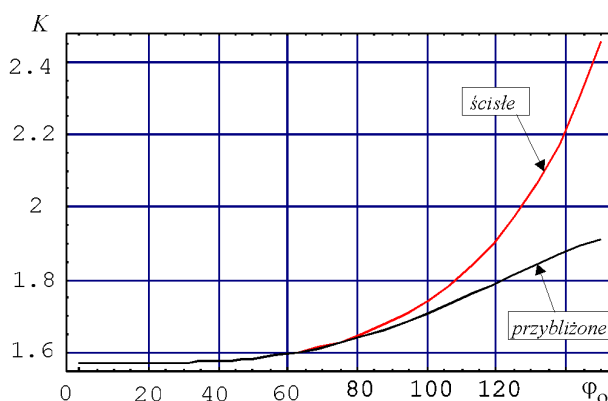
W obliczeniach można posłużyć się rozwinięciem funkcji $K = f(k)$ w szereg względem parametru k

$$K = \frac{\pi}{2} \left[1 + \left(\frac{1}{2} \right)^2 k^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \right)^2 k^4 + \dots + \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right)^2 k^{2n} + \dots \right]. \quad (32)$$

Ograniczając się do kilku pierwszych wyrazów rozwinięcia ($n = 3$) i wykorzystując (5.29) otrzymuje się poniższy wzór możliwy do szybkiego wykorzystania praktycznego

$$K \approx \frac{\pi}{2} \left[1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\varphi_0}{2} + \frac{9}{64} \sin^4 \frac{\varphi_0}{2} + \frac{25}{256} \sin^6 \frac{\varphi_0}{2} \right]. \quad (33)$$

Na rysunku 4 porównane zostały wartości K otrzymane z zależności przybliżonej (33) i ścisłej.

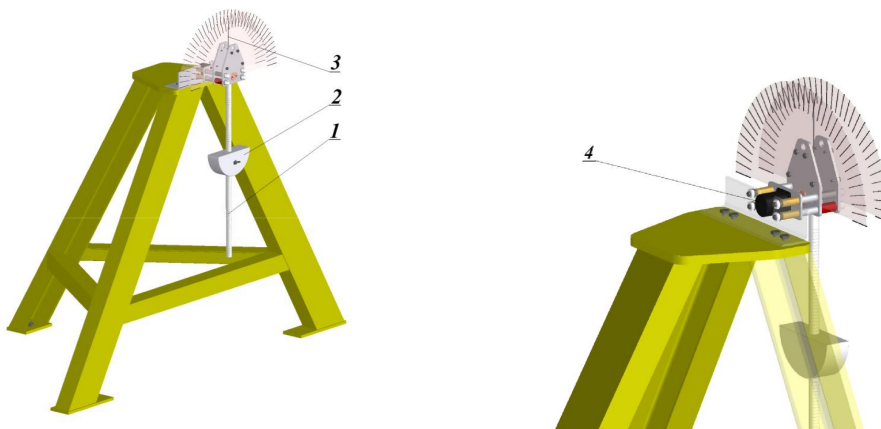


Rysunek 4: Dokładna i przybliżona wartość całki eliptycznej K

Widać, że dla kąta wychylenia mniejszego od 80° różnice obu wartości są niezauważalne.

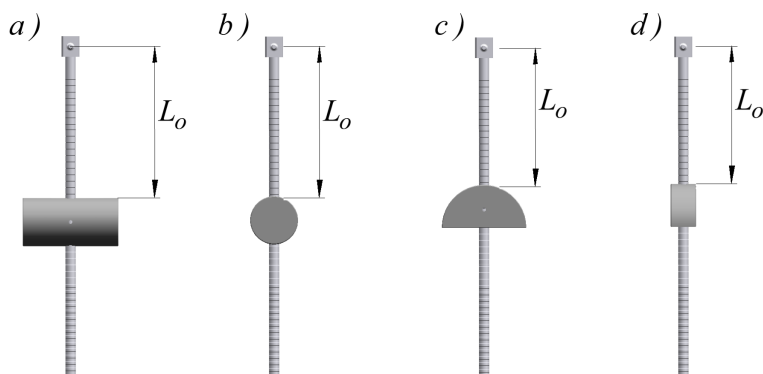
4 Opis stanowiska pomiarowego

Widok stanowiska, na którym są przeprowadzane pomiary okresu wahań wahadła przedstawia rys. 5.



Rysunek 5: Widok stanowiska pomiarowego

Zasadniczą częścią stanowiska jest pręt (1) umieszczony na poziomej osi. Na pręcie można mocować dodatkowe bryły – półwalec (2) lub walec (rys. 6). Wskazówka (3) służy do odczytu kąta wychyleń wahadła od pionu. Do osi wahadła zamocowany jest czujnik optyczny (4) współpracujący z miernikiem uniwersalnym, który umożliwia pomiar okresu wahań.



Rysunek 6: Wahadła o różnych momentach bezwładności zależnych od położenia dodatkowych ciał; badane warianty wahadła

4.1 Momenty bezwładności wahadła

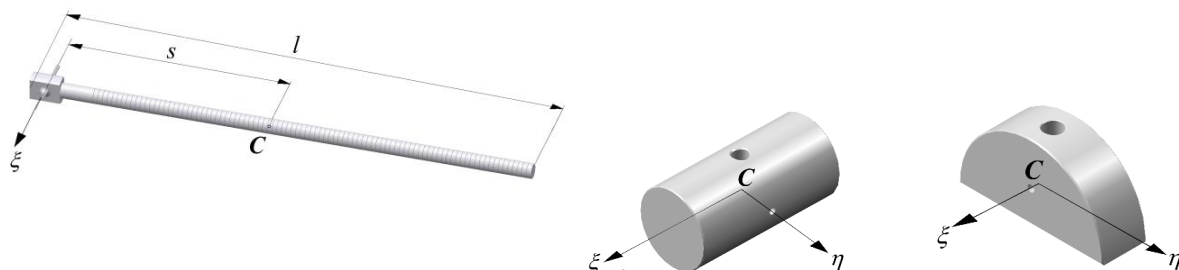
Okres wahań wahadła fizycznego zależy od sposobu rozmieszczenia masy wahadła i położenia osi wahań względem środka masy. Pomiary okresu wahań są przeprowadzane dla kilku wariantów wahadła – różniących się masą i momentem bezwładności (rys. 6). Zmianę momentu bezwładności wahadła przy zachowaniu niezmiennego położenia środka ciężkości względem osi wahań osiąga się przez obrót o 90° bryły mocowanej na pręcie wahadła.

4.1.1 Wymiary i masy elementów wahadła

Pręt: $l = 0.540$ m, $s = 0.25$ m, $m = 0.922$ kg.

Walec: $H = 0.15$ m, $R = 0.0375$ m, $r' = 0.008$ m, $h = 2R = 0.075$ m, $m = 5.08$ kg.

Półwalec: $H = 0.04$ m, $R = 0.066$ m, $r = 0.008$ m, $h = R = 0.066$ m, $m = 2.04$ kg.



Rysunek 7: Elementy wahadła o różnych momentach bezwładności zależnych od położenia dodatkowych ciał; badane warianty wahadła

4.1.2 Obliczanie momentów bezwładności

Dla każdego z badanych wariantów wahadła (pokazanych na rys. 6) należy wyznaczyć jego moment bezwładności względem osi wahań y . Obliczenie momentu bezwładności względem osi wahań y dla wahadła z zamocowaną bryłą (walcem lub półwalcem) przeprowadza się dla aktualnego położenia bryły (odległość L_0 na rys. 6). Przy wyznaczaniu momentów bezwładności należy wykorzystać twierdzenie Steinera. Momenty bezwładności pręta, walca i półwalca zostały podane w Tabeli 1 (w obliczeniach tych wielkości uwzględnione zostało wycięcie walcowe – wywiercony otwór).

Tabela 1: Zestawienie wartości momentów bezwładności elementów wahadła

Element	m [kg]	J_0 [kg m ²]	J_n [kg m ²]	Uwagi – patrz rys. 7
pręt	0.922	$80 \cdot 10^{-3}$	—	oś ξ nie jest osią centralną dla pręta
walec	5.08	$3.60 \cdot 10^{-3}$	$11.52 \cdot 10^{-3}$	osie ξ , η są osiami centralnymi
półwalec	2.04	$2.92 \cdot 10^{-3}$	$0.87 \cdot 10^{-3}$	osie ξ , η są osiami centralnymi

5 Sposób przeprowadzenia ćwiczenia

Zasadniczą część ćwiczenia stanowią pomiary i obliczenia okresu wahań. Dynamiczne równanie ruchu modelu wahadła z uwzględnieniem oporów ruchu (w łożyskach, oddziaływanie powietrza) ma postać

$$J_y \ddot{\varphi} = M_y \operatorname{sign}(\dot{\varphi}) - mgs \sin \varphi. \quad (34)$$

Siły oporu zostały zredukowane do pary sił o momencie M_y . Użyte w obliczeniach wartości momentu M_y odzwierciedlają rzeczywiste opory ruchu wahadła.

5.1 Wyznaczanie okresu wahań dużych wychyleń wahadła

Przed przystąpieniem do pomiarów należy wybrać spośród przedstawionych w Tabeli 2 (sprawozdanie) warianty, dla których będą przeprowadzone pomiary i obliczenia. Poniżej omówione są kolejne czynności, które należy wykonać podczas realizacji ćwiczenia.

1. Włączyć zasilacz optycznego czujnika okresu wahań, miernik czasu i komputer.
2. Przeprowadzić pomiary okresu wahań.
 - (a) Wychylić pręt (bez dodatkowych ciężarów) o kąt 5° i puścić swobodnie (bez prędkości początkowej).
 - (b) Odczytać wskazanie miernika okresu T_{exp} i zapisać w Tabeli 2. Pomiary powtórzyć dla początkowych wychyleń o wartościach 10° , 30° i 45° .
 - (c) Zgodnie z planem pomiarów umocować na pręcie wahadła walec lub półwalec. Zanotować odległość L_0 (określić ją na podstawie nacięć na pręcie, wykonanych co 5 mm, pierwsze nacięcie znajduje się w odległości 50 mm od osi wahań).
 - (d) Wykonać pomiary dla innych wychyleń początkowych i zanotować wyniki.
3. Wykorzystując wzory (27), (31) oraz (33) oraz dowolny arkusz kalkulacyjny wyliczyć wartości okresu dla przypadku teorii drgań nieliniowych.

Po zakończeniu ćwiczenia należy zdjąć z pręta zamocowaną bryłę, wyłączyć zasilacz czujnika, miernik i komputer oraz uporządkować stoisko pomiarowe.

6 Wyniki pomiarów i sprawozdanie

6.1 Obliczenia pomocnicze

Po zakończeniu pomiarów należy obliczyć okresy wahań wg teorii liniowej, wzór (6) i zanotować je w Tabeli 2. Następnie, dla wybranego wariantu zmodyfikowanego wahadła wyznaczyć minimalny okres wahań i odpowiadającą mu odległość osi wahań od środka ciężkości (odpowiednie wzory w sekcji 3.2). Porównać otrzymane wyniki z zawartymi w Tabeli 2, a odnoszącymi się do danego wariantu wahadła; zaznaczyć na schemacie położenie osi wahań i środka ciężkości wahadła.

6.2 Sprawozdanie

W sprawozdaniu należy podać:

1. zestawienie wyników pomiarów w Tabeli 2 i obliczeń teoretycznych,
2. wnioski wynikające z przeprowadzonych pomiarów i obliczeń,

7 Pytania kontrolne

1. Jaka jest różnica pomiędzy wahadłem fizycznym a wahadłem matematycznym?
2. Co to jest długość zredukowana wahadła fizycznego?
3. Co to jest wahadło rewersyjne?
4. Wyprowadzić równanie opisujące ruch wahadła metodą Newtona-Eulera.
5. Dlaczego rozróżnia się przypadki dużych i małych wychyleń wahadła?
6. Czy okres wahań jest zależny od kąta wychylenia wahadła?
7. W jakim przypadku ruch wahadła można traktować jako ruch harmoniczny?

Data:

Ocena:

Tabela 2: Wyznaczanie okresu małych i dużych wahań wahadła fizycznego – sprawozdanie

Wariant	masa		moment bezwł.		poł. bryły	dł. zred.	odl. OC	wych. pocz.	OKRES		
	bryła	wahadło	bryła	wahadło	L_0	l_{red}	s	ϕ_0	teoria		eksp.
	m_W	m_B	J_ξ lub J_η	J_y				[°]	T_{lin}	T_{NL}	T_{exp}
	[kg]	[kg]	[kgm ²]	[kgm ²]					[s]	[s]	[s]
1								5			
								10			
								30			
								45			
2								5			
								10			
								30			
								45			
3								5			
								10			
								30			
								45			

Wariant 1: tylko pręt wahadła

Wariant 2: Pręt + bryła w płaszczyźnie ruchu wahadła

Wariant 3: Pręt + bryła poprzecznie umieszczona do płaszczyzny ruchu wahadła

Dane studentów:

Wnioski umieścić na odwrocie.