DRGANIA UKŁADU MECHANICZNEGO O JEDNYM STOPNIU SWOBODY

Mechanika Techniczna – Ćwiczenie 11 *

1 Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest obserwacja zjawiska drgań swobodnych i wymuszonych liniowego układu mechanicznego o jednym stopniu swobody oraz doświadczalne wyznaczenie częstości drgań własnych układu, a także zaznajomienie się z czujnikami i przyrządami elektronicznymi stosowanymi w pomiarach wielkości dynamicznych.

2 Wprowadzenie

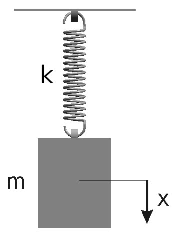
Drganiami układu mechanicznego nazywamy ruchy wokół statecznego położenia równowagi tego układu. Jeśli pojawia się w nim siła zwrotna proporcjonalna do wychylenia to drgania nazwane będą harmonicznymi. W szczególności każdy sprężysty układ podlegający prawu Hooke'a (na przykład ciało zawieszone na sprężynie, giętka belka, rozciągliwy drut) może wykonywać taki ruch.

Umiejętność analizy drgań rozmaitych układów ma ogromne znaczenie praktyczne. Ćwiczenie to dotyczy badania drgań prostego liniowego układu mechanicznego składającego się z ciała zawieszonego na sprężynie śrubowej walcowej, której masa jest mała w porównaniu z masą ciała. Badane będą zarówno drgania swobodne ciała, jak i takie, które wymuszone są zmienną siłą. Pomiary wielkości charakteryzujących drgania dokonywane są na drodze elektrycznej. Rezultaty pomiarów będą zbierane w Tabeli 1 (sprawozdanie). Otrzymane na ich podstawie wartości częstości i okresu drgań będą porównane z wynikami uzyskanymi z modelu teoretycznego.

3 Teoretyczny opis zjawiska

3.1 Drgania swobodne

Na rysunku 1 jest przedstawiony układ składający się z ciała o masie m zawieszonego na nieważkiej sprężynie o współczynniku sztywności k. Rozważane są jedynie przemieszczenia pionowe ciała co oznacza, że analizowany układ ma tylko jeden stopień swobody: przemieszczenie pionowe, a zachodzący ruch jest odpowiedzią na zakłócenie początkowe.



Rysunek 1: Ciało zawieszone na sprężynie

Jeśli przez x oznaczyć wychylenie ciała odmierzane od jego położenia równowagi trwałej, równanie ruchu będzie miało postać

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx, \tag{1}$$

lub po przekształceniu

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \alpha^2 x = 0, \tag{2}$$

gdzie

$$\alpha = \sqrt{\frac{k}{m}}. \tag{3}$$

*Autor – K. Januszkiewicz, w: K. Januszkiewicz, J. Grabski: Ćwiczenia Laboratoryjne z Mechaniki, Łódź 2008

Takie liniowe jednorodne równanie różniczkowe ma dwa niezależne rozwiązania typu $\sin \omega t$ i $\cos \omega t$, zatem jego rozwiązanie ogólne przyjmuje wygląd:

$$x = C_1 \sin \alpha t + C_2 \cos \alpha t. \tag{4}$$

Inna forma wyrażenia (4) może być następująca

$$x = a \sin(\alpha t + \varphi), \tag{5}$$

przy czym między stałymi zachodzą poniższe związki:

$$a = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}, \qquad \operatorname{tg} \varphi = \frac{C_2}{C_1}. \tag{6}$$

Mamy więc do czynienia z ruchem harmonicznym, którego częstość (kołowa) α jest określona wzorem (3), a ponieważ między częstością drgań a ich okresem istnieje zależność

$$\alpha = \frac{2\pi}{T}, \tag{7}$$

to okres tych drgań jest dany wzorem

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c}}. \tag{8}$$

W przypadku liniowego układu mechanicznego częstość drgań ω (a zatem i okres drgań T) są określone jedynie przez parametry strukturalne układu (bezwładność oraz sztywność) i nie zależą od warunków początkowych. Współczynnik a nazywa się amplitudą drgań, natomiast argument $(\alpha t + \varphi)$ funkcji sinus ich fazą. Wartość początkowa fazy φ jak i amplituda a zależą od warunków rozpoczęcia ruchu, tj. początkowego wychylenia $x_0 = x(0)$ i początkowej prędkości $\dot{x}_0 = \dot{x}(0)$. Niezerowa wartość przynajmniej jednej z tych wielkości jest niezbędna aby mógł wystąpić omawiany tu rodzaj drgań.

Dla zadanego wychylenia początkowego x_0 i prędkości początkowej $\dot{x}_0$ wychylenie ciała w czasie opisuje następująca zależność:

$$x = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\alpha}\right)^2} \sin(\alpha t + \varphi), \tag{9}$$

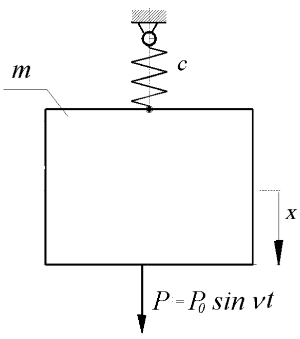
gdzie

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\dot{x}_0}{\alpha x_0}. \tag{10}$$

3.2 Drgania wymuszone, zjawisko rezonansu

W przypadku gdy na układ działa cały czas jakieś zaburzenie w postaci zmiennej siły, albo zadanego ruchu wybranego punktu układu (np. punktu zaczepienia sprężyny) mamy wówczas do czynienia z drganiami wymuszonymi. Drgania układu odbywają się z częstością wzbudzenia, która może mieć dowolną wartość niezależną od jego częstości własnej.

Rozważamy drgania układu z rys. 1 pod wpływem harmonicznej siły wymuszającej o częstości ν oraz amplitudzie P_0. Analizowany obecnie układ jest przedstawiony na rys. 2.



Rysunek 2: Układ o jednym stopniu swobody wzbudzany siłą harmoniczną

Równanie ruchu ciała o masie m przyjmuje następującą postać równania różniczkowego

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx + P_0 \sin \nu t, \tag{11}$$

bądź po przekształceniach

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = \frac{P_0}{m} \sin \nu t. \tag{12}$$

Jest to liniowe równanie różniczkowe niejednorodne, którego rozwiązanie jest sumą rozwiązania ogólnego równania jednorodnego (należącego do drgań swobodnych) i całki szczególnej równania niejednorodnego (opisującego ustalone drgania wymuszone). Zakładając całkę szczególną w postaci

$$x = A \sin \nu t, \tag{13}$$

gdzie A oznacza stałą podlegającą wyznaczeniu, rozwiązanie równania (11) ma postać

$$x = a \sin(\alpha t + \varphi) + A \sin \nu t. \tag{14}$$

Podstawiając (14) do (11) otrzymuje się zależność współczynnika A od częstości wymuszenia ν

$$A(\nu) = \frac{P_0}{m(\alpha^2 - \nu^2)}, \tag{15}$$

albo po wykorzystaniu zależności (3)

$$A(\nu) = \frac{P_0}{k - m\nu^2}. \tag{16}$$

Stałe a oraz φ zależą od warunków rozpoczęcia ruchu.

Rozwiązanie (14) przestaje być słuszne dla wartości częstości siły wymuszającej, przy której mianownik we wzorze (16) będzie równy zeru. Wówczas rozwiązanie przyjmuje inną postać, wobec nieoznaczoności stałej A. Stan taki nazywa się rezonansem, amplituda drgań rośnie w nim z czasem liniowo i zachodzi on gdy częstość siły wymuszającej jest równa częstości własnej układu. Warunek zerowania się mianownika jest bowiem identyczny z zależnością (3)

$$\nu_r = \alpha = \sqrt{\frac{k}{m}},$$

gdzie α – częstość drgań własnych układu przedstawionego na rysunku 1, ν_r – częstość rezonansowa siły wymuszającej układu z rysunku 2.

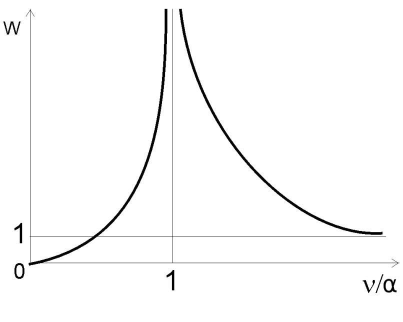
Przyjmując, że amplituda siły wymuszającej $P_0 = S\nu^2$ – gdzie S współczynnik zależny od parametrów konstrukcyjnych urządzenia drgającego – wówczas amplituda wychyleń ustalonych drgań wymuszonych (wartość bezwzględna stałej A) jest następująca:

$$|A| = \left| \frac{S\nu^2}{m(\alpha^2 - \nu^2)} \right| = \frac{S}{m} W, \tag{17}$$

gdzie W – współczynnik zwielokrotnienia amplitudy wychylenia

$$W = \left| \frac{\nu^2/\alpha^2}{1 - (\nu/\alpha)^2} \right|. \tag{18}$$

Na rysunku 3 jest przedstawiona zależność współczynnika zwielokrotnienia W od stosunku częstości siły wymuszającej do częstości własnej układu, tj. ν/α. Widzimy, że współczynnik zwielokrotnienia jest nieskończenie duży kiedy częstość wymuszenia równa się częstości własnej układu.



Rysunek 3: Wykres rezonansowy drgań wymuszanych bezwładnościowo

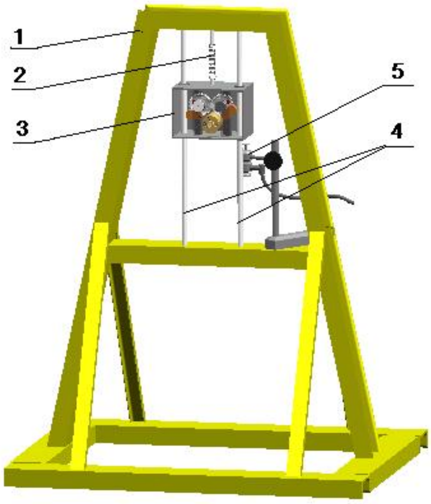
Ruch ciała jest w fazie z siłą wzbudzającą dla częstości ν niższych od α. Po przekroczeniu częstości rezonansowej wychylenie ciała odbywa się przeciwnie do zwrotu siły wymuszającej.

W dotychczasowych rozważaniach zakładano brak tłumienia drgań. W przypadku obecności choćby niewielkiego tłumienia (w praktyce zawsze ma miejsce dyssypacja energii mechanicznej poprzez tarcie lub też inne opory) amplituda drgań swobodnych z częstością α zmniejsza się dość szybko z czasem i pozostają jedynie drgania z częstością ν, tzw. ustalone drgania wymuszone. Maksimum amplitudy tych drgań odpowiada częstości siły wymuszającej minimalnie różniącej się od częstości drgań własnych. Jeśli tylko tłumienie jest niewielkie w porównaniu do jego wartości krytycznej (która to reprezentuje granicę między występowaniem i nie występowaniem oscylacji) można zaniedbać tłumienie w obliczeniach częstości własnej. Ponadto, w całym zakresie częstości siły wymuszającej wychylenie ciała opóźnia się o pewien kąt fazowy względem siły wymuszającej.

4 Opis stanowiska badawczego

4.1 Badany obiekt

Widok stanowiska badawczego przedstawiono na rys. 4.

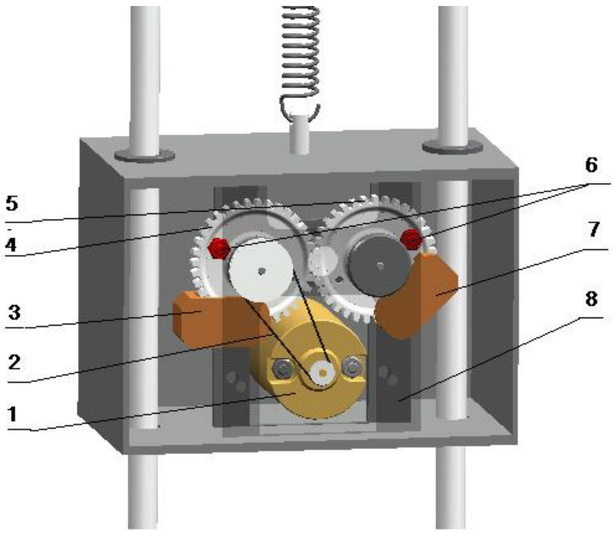


Rysunek 4: Stanowisko badawcze

Stanowisko składa się z ramy (1), sprężyny (2), zawieszonego na niej ciała (3) (wibratora bezwładnościowego), dwóch prowadnic (4) zapewniających pionowy ruch wibratora oraz bezdotykowego czujnika przemieszczeń (5) rejestrującego drgania ciała.

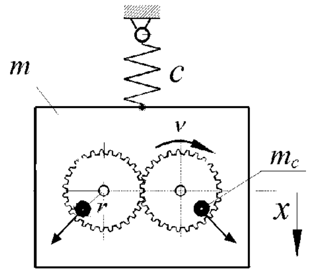
Ciało (3) może być wprawione w pionowy ruch drgający w dwojaki sposób:

- poprzez wychylenie ciała z położenia równowagi statycznej i gwałtowne zwolnienie,
- wskutek działania na niego harmonicznie zmiennej pionowej siły wymuszającej (uzyskanej po włączeniu silnika wibratora, którego widok pokazano na rys. 5).



Rysunek 5: Widok wibratora bezwładnościowego

Silnik prądu stałego (1) o płynnej regulacji obrotów napędza, poprzez przekładnię pasową (2), lekkie koło zębate (4) współpracujące z identycznym kołem (5). Na obu kołach, mających po 35 zębów, są umocowane w identyczny sposób (symetrycznie względem środkowej płaszczyzny wibratora) jednakowe ciężarki (6) o masie $m_c = 9$ gramów bardzo małej w porównaniu do masy $m = 2600$ gramów całego wibratora. Udział masy m_c w analizie drgań układu pomijamy w tym sensie, że przypisuje się jej tylko znaczenie źródła siły odśrodkowej. Ciężarki i zaczep sprężyny śrubowej leżą w pionowej płaszczyźnie wyznaczonej przez osie prowadnic, w której znajduje się również środek ciężkości całego wibratora. Dzięki temu zasadniczym ruchem układu są jego przemieszczenia pionowe. W wyniku przeciwbieżnego ruchu kół powstają dwie identyczne siły odśrodkowe.



Rysunek 6: Harmoniczna siła o amplitudzie proporcjonalnej do kwadratu częstości

Składowe poziome sił odśrodkowych wzajemnie się znoszą. Suma składowych pionowych obydwu sił odśrodkowych opisana jest następującą zależnością

$$P = 2(m_c r \nu^2 \sin \nu t) = P_0 \sin \nu t, \tag{19}$$

gdzie:

- $P_0 = 2m_c r\nu^2 = S\nu^2$ – amplituda siły wymuszającej,
- m_c – masa ciężarka umocowanego mimośrodowo na kole zębatym,
- r – odległość ciężarka od osi obrotu koła,
- ν – prędkość kątowa (ustalona) koła zębatego.

Siła wymuszająca ma stały kierunek pionowy, i jest harmoniczną funkcją czasu.

4.2 Przyrządy pomiarowe i sposób wykonywania pomiarów

Pomiary wielkości charakterystycznych dla badanego zjawiska dokonuje się z wykorzystaniem laserowego czujnika przemieszczenia optoNCDT firmy *micro-epsilon* oraz oscyloskopu, na którym wizualizowany i mierzony jest sygnał z czujnika, proporcjonalny do aktualnej wartości przemieszczenia.

5 Przebieg pomiarów

Wyznaczenie częstości (okresu) drgań swobodnych badanego układu jest dokonywane w pierwszej kolejności

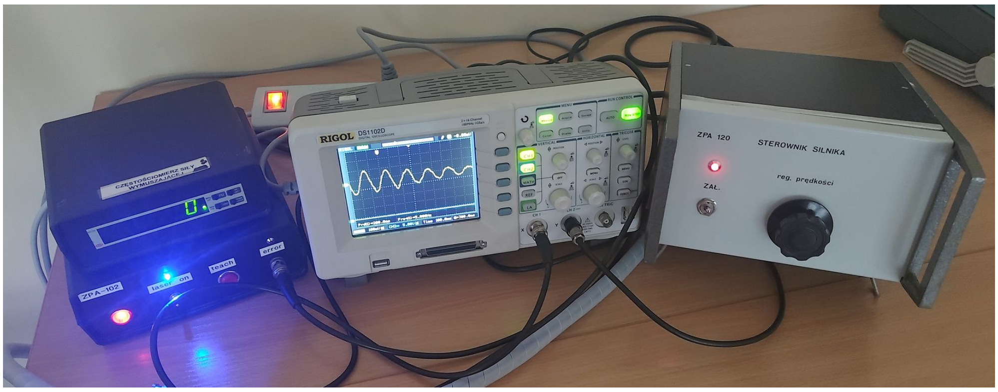
- pomiar przy drganiach swobodnych poprzez wprowadzenie zakłócenia równowagi statycznej przez wychylenie ciała z położenia równowagi i nagłe jego zwolnienie, oraz
- pomiar podczas drgań wymuszonych metodą rezonansową, tzn. przez znalezienie takiej częstości siły wymuszającej, dla której wystąpi największa amplituda drgań.

Dane pomiarowe należy zapisywać w odpowiednich kolumnach Tabeli 1.

5.1 Pomiar okresu drgań

Pomiar okresu drgań swobodnych.

1. Włączyć aparaturę pomiarową (czujnik laserowy, oscyloskop).



2. Dobrać odpowiednie wzmocnienie kanału i poziom wyzwalania oscyloskopu.

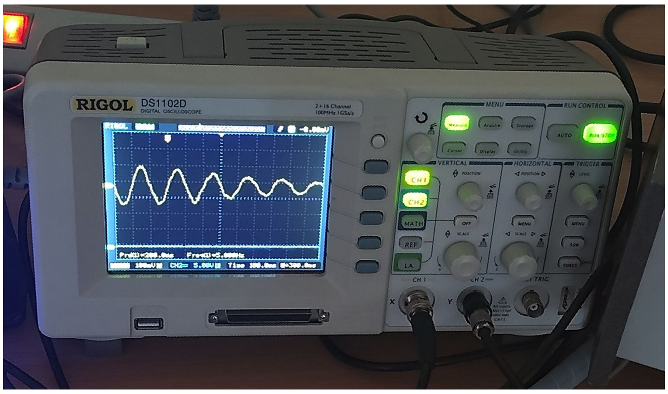
3. Włączyć podstawę czasu na jednokrotne wyzwalanie.
4. Naciskając na górną pokrywę wibratora spowodować jego wychylenie do dołu o około 1cm. Szybko zwolnić nacisk.

5. Na zarejestrowanym na oscyloskopie przebiegu drgań wyznaczyć ich okres przy pomocy kursorów.
6. Powtórzyć pomiar trzykrotnie.

Pomiar częstości rezonansowej drgań wymuszonych

1. Włączyć dodatkowo regulator prędkości obrotowej silnika wibratora, częstościomierz, zasilacz czujników optycznych prędkości obrotowej i fazy.
2. Do drugiego kanału oscyloskopu dołączyć sygnał z czujnika fazy.
3. Włączyć automatyczne wyzwalanie podstawy czasu.
4. Zwiększać powoli prędkość obrotową silnika (czyli częstość wymuszenia drgań) pokrętłem regulatora prędkości celem znalezienia rezonansu. Należy jednocześnie obserwować ruch układu, przebieg wykresu na ekranie oscyloskopu oraz wskazania częstościomierza. O tym, że układ znajduje się w rezonansie świadczyć będzie położenie impulsu z czujnika fazy i największa wysokość sygnału z czujnika drgań.
5. W tych warunkach należy dokonać pomiaru częstości siły wymuszającej poprzez zarejestrowanie przebiegu drgań na oscyloskopie i pomiar za pomocą kursorów. **Uwaga! Nie utrzymywać układu zbyt długo w rezonansie.**
6. Powtórzyć powyższy pomiar kilkakrotnie. W tym celu należy obrócić nieznacznie (w prawo lub w lewo) pokrętło regulatora prędkości silnika (aby odstroić układ – wyjść z rezonansu) i następnie dostroić go ponownie.
7. Zatrzymać silnik (pokrętłem potencjometru) i wyłączyć wszystkie przyrządy pomiarowe i zasilacze.

Instrukcja obsługi oscyloskopu DS 1102D



1. W sekcji VERTICAL na płycie czołowej oscyloskopu, włączyć oba kanały przyciskami CH1 i CH2 (powinny być podświetlone). W kanale, do którego doprowadzony jest sygnał z czujnika drgań, np. czujnika laserowego (CH1), ustawić sprzężenie zmiennoprądowe sygnału wejściowego przyciskiem rozwijanego na ekranie menu (z prawej strony ekranu): CH1 → Coupling → AC. W celu redukcji zakłóceń na ekranie, włączyć ograniczenie pasma kanału: BW Limit → ON. Usuwanie rozwijanego na ekranie menu – przyciskiem MENU ON/OFF (obok prawego górnego rogu ekranu).
2. Podobnie dla drugiego kanału (CH2) – sygnał z czujnika prędkości, ustawić sprzężenie stałoprądowe: CH2 → Coupling → DC.
3. W sekcji TRIGGER ustawić w rozwijanym na ekranie menu, rodzaj wyzwalania podstawy czasu na Auto (układ akwizycji pracuje nawet przy braku impulsów wyzwalających): MENU → Sweep → Auto.
4. Podczas obracania się silnika wibratora i przy włączonym czujniku laserowym drgań, ustawić w sekcji VERTICAL odpowiednie współczynniki odchylania w osi pionowej i położenie przebiegów na ekranie pokrętłami SCALE i POSITION. Wstępnie można ustawić 100 mV dla czujnika laserowego i 5.00 V dla czujnika prędkości (wyświetlane w dolnej części ekranu).
5. W sekcji HORIZONTAL ustawić odpowiednią prędkość podstawy czasu pokrętłem SCALE, wyświetlaną na dole ekranu. Wstępnie można ustawić Time 100.0 ms (tzn. 100 ms/działkę).
6. Przyciskiem RUN/STOP można zatrzymać, powtarzać lub kontynuować wyświetlanie przebiegu. Na zatrzymanych przebiegach można przeprowadzić pomiary.
7. Pomiar okresu (częstotliwości) przy pomocy kursorów.
    - nacisnąć przycisk Cursor w sekcji MENU na płycie czołowej oscyloskopu.
    - ustawić tryb ręczny pomiarów kursorowych: Mode → Manual.
    - przyciskiem Type ustawić kursory czasowe X .
    - obrotem pokrętła wielofunkcyjnego ustawić kursor A na szczycie przebiegu.
    - obrotem pokrętła wielofunkcyjnego ustawić kursor B na kolejnym szczycie przebiegu. Zmiana kursorów A, B lub AB - przez kolejne wciśnięcie pokrętła wielofunkcyjnego. U góry ekranu można odczytać odstęp czasu (Δ X) i częstotliwość.
8. Pomiar automatyczny okresu lub częstotliwości: MENU → Measure - ustawić źródło mierzonego sygnału przyciskami: Measure → Source → CH1. - wybrać pokrętłem pomiar okresu lub częstotliwości: Time → Period lub Time → Freq. - na ekranie wyświetlany jest wynik pomiaru.
9. W przypadku trudności z uzyskaniem stabilnego obrazu na ekranie, wcisnąć przycisk AUTO w sekcji RUN CONTROL i powtórzyć czynności 1 do 7 (8).

6 Opracowanie wyników pomiarów i sprawozdanie

Po zakończeniu pomiarów należy przystąpić do wykonywania obliczeń niezbędnych do wypełnienia wszystkich rubryk Tabeli 1 oraz określenia niepewności pomiarów. Potrzebne do obliczeń wartości masy m, stałej sprężyny c dostępne są w dokumentacji stoiska.

Wszelkie wyniki obliczeń zaokrąglić biorąc pod uwagę niedoskonałość doświadczenia. Należy pamiętać, że nie ma potrzeby być bardzo dokładnym, opisując własną niedokładność. W szczególności niepewności i różnice procentowe obliczać z dokładnością do jednej lub najwyżej dwóch cyfr znaczących. Wynik końcowy winien być tak zaokrąglony, aby rząd jego ostatniej cyfry znaczącej był taki sam, jak rząd niepewności. Niepewność nie może być wyznaczona z większą dokładnością niż sama wielkość, której ona dotyczy.

6.1 Niepewności pomiarów

Należy określić niepewności u_0 przypadkowe standardowe pomiaru okresu drgań T oraz częstości własnej α. Do obliczenia niepewności pojedynczego pomiaru stosuje się następujące wzory, dla okresu po lewej oraz częstotliwości po prawej:

$$u_0(T) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(T_i - T_0)^2}{n-1}} \qquad \text{albo} \qquad u_0(f) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(f_i - \alpha_0)^2}{n-1}} \tag{20}$$

gdzie wartość średnia jest określona zależnością

$$T_0 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} T_i \qquad \text{albo} \qquad \alpha_0 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_i\,. \tag{21}$$

Niepewność wartości średniej

$$u(T) = \frac{u_0(T)}{\sqrt{n}} \qquad \text{albo} \qquad u(f) = \frac{u_0(f)}{\sqrt{n}}\,. \tag{22}$$

Niepewności częstości własnej oblicza się ze wzoru:

$$u(\alpha) = 2\pi\frac{1}{T_0^2}u(T) \qquad \text{albo} \qquad u(\alpha) = 2\pi u(f)\,. \tag{23}$$

gdzie wartość liczby π należy przyjąć z dokładnością o jeden rząd większą niż niepewność okresu.

6.2 Sprawozdanie

Sprawozdanie ma zawierać: obliczenia niepewności pomiarów okresu lub częstotliwości, wyniki pomiaru okresu drgań zapisane w postaci: $(T_0 \pm u(T))$ [jednostka], wyniki pomiaru częstości własnej zapisane w postaci: $(\alpha_0 \pm u(\alpha))$ [jednostka], obserwacje i wnioski.

Pytania kontrolne

1. Drgania – objaśnić zjawisko; wymienić podstawowe wielkości je charakteryzujące.
2. Wyjaśnić podstawę napisania równania (1).
3. Opisać prosty ruch harmoniczny: podać kilka przykładów, wyjaśnić jego nazwę.
4. Objaśnić pojęcia: drgania swobodne, drgania wymuszone, drgania tłumione.
5. Podać praktyczne powody, dla których ważna jest znajomość częstości własnych układu.
6. Objaśnić zjawisko rezonansu.

LABORATORIUM

MECHANIKI

TECHNICZNEJ

Ćwiczenie 11

DRGANIA UKŁADU O 1 STOPNIU SWOBODY

Grupa: ____________________

Zespół: ____________________

data ____________________

Imię i nazwisko:

1. ____________________
2. ____________________
3. ____________________
4. ____________________
5. ____________________
6. ____________________

Wyniki pomiarów i obliczeń

Masa ciała $m =$ .... kg   stała sprężyny $k =$ .... N/m

Tabela 1: Wyniki pomiarów i obliczeń

Pomiar	**drgania swobodne**		**drgania wymuszone**
	poj. okres	**śr. z 10 okr.**	**poj. okres**
	T [s]	T [s]	T [s]
1			
2			
3			
4			
5			
6			
wartość średnia eksp. [1–6] T_{eksp}			
niepewność średniej okresu, (22) $u(T)$			
teoretyczna wartość okresu, (8) T_{teor}			
częstość własna śr., zmierzona $\alpha_{eksp} = \frac{2\pi}{T_{eksp}}$ [rd/s]			
częstość własna, teoretyczna, (3) $\alpha = \sqrt{\frac{k}{m}}$ [rd/s]			
wzgl. różnica częstości $\Delta = \frac{\alpha - \alpha_{eksp}}{\alpha} \cdot 100$ [%]			

Wnioski: