

WYZNACZANIE SIŁ W PRĘTACH MODELU KRATOWNICY PŁASKIEJ

Mechanika Techniczna – Ćwiczenie 2 *

1 Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest porównanie wartości sił działających w elementach modelu płaskiej kratownicy, wyznaczonych teoretycznie i doświadczalnie.

2 Wprowadzenie

Kratownicą nazywamy układ prostych prętów, których końce są ze sobą połączone przegubowo. Kratownice są szeroko rozpowszechnionymi konstrukcjami inżynierskimi (przesła mostów, słupy trakcji elektrycznej, różnego rodzaju dźwigary, wysięgniki, belki dźwignic itp. Rozróżnia się kratownice płaskie (wszystkie pręty leżą w jednej płaszczyźnie) i kratownice przestrzenne.

W rzeczywistych konstrukcjach połączenia prętów wykonywane są za pomocą spawania, nitowania, skręcania śrubami itp. W obliczeniach takich konstrukcji przyjmuje się, że węzły stanowią połączenia przegubowe, co znacznie ułatwia analizę. Dodatkowym uproszczeniem jest pominięcie w obliczeniach ciężaru prętów. Stanowisko laboratoryjne umożliwia wyznaczenie, w sposób doświadczalny, sił w prętach kratownicy. Porównanie wyników otrzymanych z pomiarów z rezultatami obliczeń teoretycznych dla modelu fizycznego kratownicy pozwala na weryfikację przyjętego modelu.

2.1 Obliczanie sił w prętach kratownicy płaskiej

Z punktu widzenia zastosowań praktycznych ważne jest określenie sił reakcji podpór i wyznaczeniu sił działających w jej prętach. Dla wyznaczenia reakcji korzysta się z warunków równowagi całej kratownicy (płaski dowolny układ sił). Po wyznaczeniu tych reakcji można określić siły wewnętrzne w prętach. Stosowanych jest kilka metod wyznaczania sił w prętach kratownicy — między innymi:

1. Metoda równowagi węzłów: polega na uwolnieniu od więzów poszczególnych węzłów kratownicy i ułożeniu równań równowagi oddzielnie dla każdego z węzłów (rzutując wszystkie działające siły, na dwie dowolne, nie-równoległe osie).
2. Metoda Rittera: umożliwia wyznaczenie sił w wybranych prętach. W tym przypadku rozpatruje się równowagę jednego z dwóch podukładów otrzymanych z myślowego przecięcia kratownicy. Przekrój prowadzi się, przez co najwyżej trzy pręty, przy czym ich osie nie mogą zbiegać się w tym samym punkcie.
3. Metody komputerowe: są stosowane do rozwiązywania kratownic o dużej liczbie prętów. Używane do tego celu procedury umożliwiają numeryczne, a niekiedy również analityczne rozwiązanie zadania.

Warunkiem koniecznym na to, by kratownica była statycznie wyznaczalna jest:

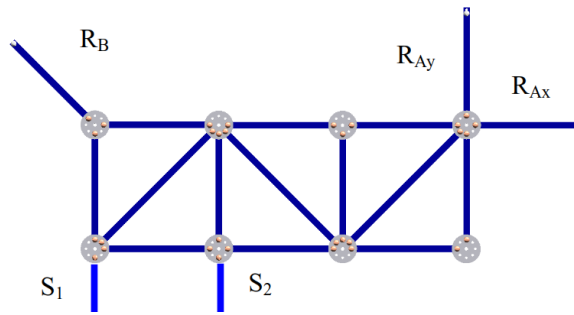
$$p = 2w - 3 \quad (1)$$

gdzie p – liczba prętów kratownicy, w – liczba węzłów (przegubów).

Jeśli liczba prętów p jest większa niż wynika to z zależności (1), wówczas niezależnych równań równowagi jest mniej niż niewiadomych. Układ ma wtedy nieskończenie wiele rozwiązań. Taką kratownicę nazywamy statycznie niewyznaczalną. Nadliczbowe pręty powodują przesztynienie konstrukcji. Obciążenia należy przykładać wyłącznie do węzłów, a nie do samych elementów. W analizie kratownicy ciężary prętów są pomijane lub, w razie potrzeby, przykładane do węzłów (połowa ciężaru na każdy z węzłów prętów).

Kratownica przedstawiona na rys. 1 jest konstrukcją płaską zbudowaną z prętów, $p = 13$, węzłów, $w = 8$ i 3 prętów nośnych (nie są to pręty kratownicy). Jeśli obciążenie zostanie przyłożone w dowolnych węzłach, siły wewnętrzne występują zarówno w prętach kratownicy, jak i w prętach nośnych (reakcje).

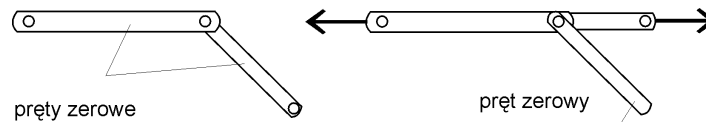
*Autor – W. Lubnauer, w: K. Januszkiewicz, J. Grabski: ĆWICZENIA LABORATORYJNE Z MECHANIKI, Łódź 2008



Rysunek 1: Schemat kratownicy

Taką kratownicę można traktować jako zestaw dwóch prętów połączonych przegubowo na końcach. Siły we wszystkich prętach można wyznaczyć, uwzględniając kolejno równowagę każdego węzła. Dostępne są równania $p + 3$ dla p prętów i 3 reakcji. Ta metoda połączeń jest najskuteczniejsza, gdy należy wyznaczyć siły we wszystkich prętach.

Jeśli należy wyznaczyć siłę tylko w jednym pręcie lub w kilku prętach, bardziej efektywna jest metoda przekroju. W tej metodzie analizujemy równowagę dużej części kratownicy, składającej się z kilku węzłów i elementów oddzielonych od konstrukcji wymagowanym przekrojem. Przekrój ten musi przecinać maksymalnie trzy pręty, co pozwala na obliczenie trzech niewiadomych dla dwuwymiarowego układu sił. W tym przypadku dostępne są 3 równania (traktując całą kratownicę jako ciało swobodne, mamy dodatkowo 3 równania do wyznaczenia reakcji, jeśli to konieczne). Rozwiązywanie zagadnienia można przyspieszyć eliminując z kratownicy tzw. pręty zerowe. Na rys. 2 przedstawiono dwa przypadki układu prętów zerowych, występujące w kratownicy płaskiej.

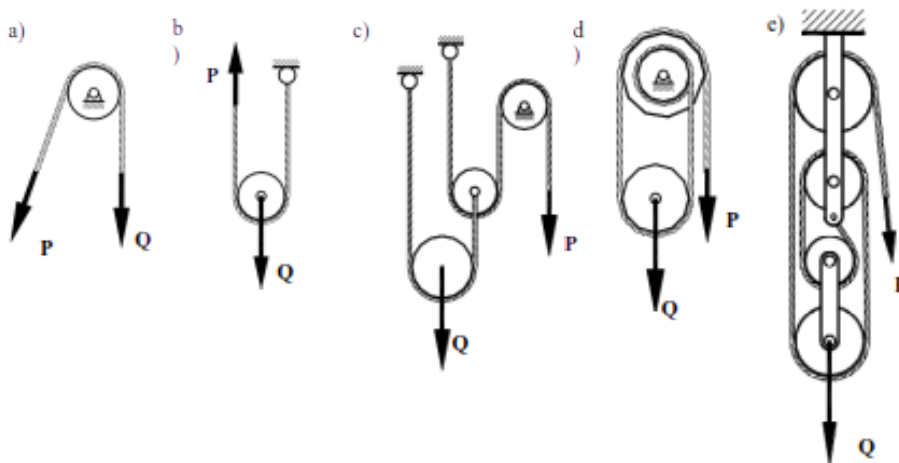


Rysunek 2: Układy prętów zerowych w kratownicy płaskiej

Należy jednak zauważyć, że takie elementy nie są bezużyteczne (są potrzebne do zapewnienia stabilności konstrukcji kratownicy pod ciężarem własnym lub np. w przypadku zmiany warunków obciążenia).

2.2 Wielokrążki

Wielokrążki są układami zaliczanymi do maszyn prostych. Na rys. 3 zostały przedstawione różne przykłady maszyn prostych z krążkami i wielokrążkami.

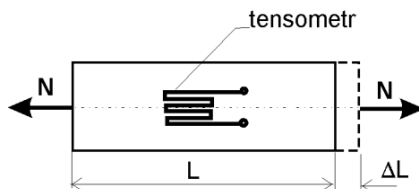


Rysunek 3: Krążki i wielokrążki: (a) krążek stały, (b) krążek ruchomy, (c) wielokrążek potęgowy, (d) wielokrążek różnicowy, (e) wielokrążek sumacyjny

Maszyny proste służą do pokonywania sił oporu użytecznego Q siłami napędzającymi P bądź to zmniejszonymi w sposób dla nas wygodny, bądź to skierowanymi w kierunku dla nas pożądanym. W idealnych maszynach prostych praca siły Q jest równa pracy siły P . Tym samym chcąc działać siłą P o mniejszej wartości musimy nią działać na dłuższej drodze. Siły rzeczywiste, jakimi musimy działać korzystając z maszyn prostych są większe od sił teoretycznych, gdyż są powiększone o siły oporów, tarcia, itp. Przykładowo, sprawność pojedynczego, krążka wynosi 97–99%.

2.3 Wprowadzenie do tensometrii oporowej

Rozważmy pręt, na którego końce działają dwie siły o identycznej wartości N , jak pokazano na rys. 4.



Rysunek 4: Pręt rozciągany siłami osiowymi

Dla jednoosiowego rozciągania pręta (z jednorodnego, izotropowego materiału), na podstawie prawa Hooke'a mamy:

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L} = \frac{N}{EF} = \frac{\sigma}{E}, \quad (2)$$

gdzie: ε – odkształcenie wzdluzne, ΔL – wydłużenie pręta o długości L , L – długość, N – siła osiowa, F – przekrój poprzeczny, E – moduł Younga, σ – naprężenie normalne.

Przyjmuje się, że kontakt tensometru z powierzchnią pręta jest idealny (nie ma ślizgania się tensometru względem powierzchni pręta). Zmiana rezystancji jest spowodowana mechanicznym i termicznym odkształceniem pręta:

$$\frac{\Delta R}{R} = \left(\frac{\Delta R}{R} \right)_{\varepsilon} + \left(\frac{\Delta R}{R} \right)_{T}. \quad (3)$$

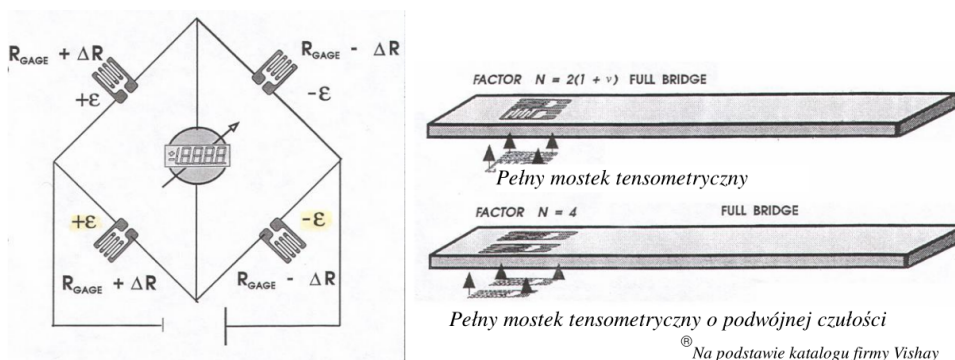
Przedstawiona powyżej zależność (2) nie ujmuje całokształtu zagadnienia związanego z odkształceniami jakich doznaje rzeczywisty pręt przy obciążeniu osiowymi siłami. Bowiem pręt taki obok odkształceń wzdluznych ε doznaje również odkształceń poprzecznych o znaku przeciwnym do znaku ε . Oznacza to, że pręt rozciągany będzie wykazywał zmniejszenie jego wymiarów poprzecznych w miarę wzrostu przyłożonej siły. Wielkość tych zmian jest zależna od do liczby Poissona ν (dla stali konstrukcyjnych $\nu = 0.3$). Na rozciągającym pręcie jest naklejony tensometr oporowy, którym jest rezystor drutowy lub foliowy. Wraz z odkształceniami pręta, tensometr także ulega odkształceniom, zmieniając swoją oporność elektryczną R o wartość ΔR . Dla danego typu tensometru (w zakresie odkształceń sprężystych, czyli stosowalność prawa Hooke'a) zachodzi następujący związek (k : wsp. czułości odkształceniowej):

$$\frac{\Delta R}{R} = k \cdot \varepsilon. \quad (4)$$

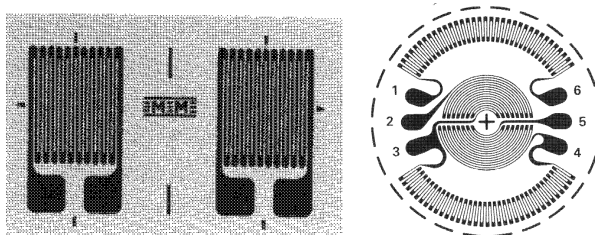
Mierząc zmiany oporności tensometru, wywołane odkształceniami i znając jego współczynnik czułości k można wyznaczyć odkształcenia względne ε , a następnie obliczyć siłę w pręcie. Siła ta określona jest zależnością

$$N = EF\varepsilon. \quad (5)$$

Ponieważ wywołane zmiany względne oporności są niewielkie (ok. promila) i są porównywalne ze zmianami oporności wywołanymi wpływem temperatury, stosuje się układy tensometrów (2 lub 4) połączone jako mostek Wheatstone'a.



Rysunek 5: Tensometryczny mostek Wheatstone'a oraz sposób umieszczania tensometrów na pręcie



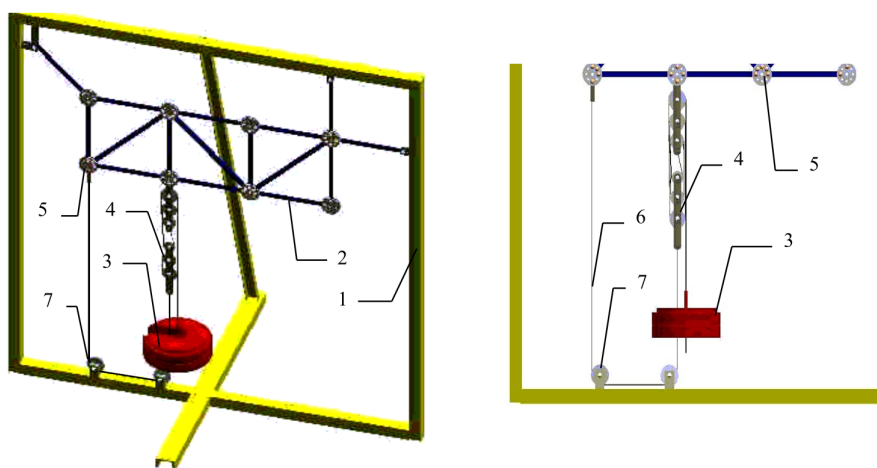
Rysunek 6: Przykładowe tensometry

Zmiany oporności tensometrów włączonych do obwodu mostka powodują powstawanie zmian napięcia na pionowej przekątnej mostka. Zastosowanie odpowiednio wyskalowanego wzmacniacza pomiarowego pozwala odczytać bezpośrednio na jego wskaźniku wartość odkształcenia ε lub przyrost odkształceń względem stanu początkowego (uzależnione to jest od typu używanego wzmacniacza). Wzmacniacz tensometryczny może w danym momencie współpracować tylko z jednym mostkiem tensometrycznym (punktem pomiarowym). Aby móc mierzyć odkształcenia z użyciem większej ilości mostków stosuje się przełączniki mostków tzw. skrzynki przełącznikowe. Umożliwiają one pomiary odkształceń w dużej liczbie punktów (w przypadku kratownic w wielu prętach). Obecnie coraz częściej stosuje się mostki z wyjściem cyfrowym, mogące współpracować z komputerem PC. Ułatwia to wszelkie obliczenia i opracowania wyników badań doświadczalnych, zwłaszcza bardzo złożonych konstrukcji mechanicznych. Dokładny sposób postępowania z konkretnym typem wzmacniacza jest zawarty w jego instrukcji obsługi.

3 Opis stanowiska badawczego

3.1 Badany obiekt

Na rys. 7 jest pokazane stanowisko do badań sił w elementach modelu kratownicy. Stanowisko składa się ze stalowej ramy (1), na której jest rozpięta kratownica (2) wykonana z cienkich płaskowników stalowych, połączonych ze sobą poprzez blachy węzłowe (5). Kratownicę podwieszono na ramie za pomocą prętów. Obciążana jest ona krążkami (3) poprzez wielokrążek sumacyjny (4). Ciężno jest prowadzone poprzez krążki stałe (7), które umożliwiają zmianę sposobu obciążenia kratownicy. Umieszczenie na szalce wielokrążka obciążników powoduje powstanie sił w prętach. Na prętach właściwych kratownicy, podporowych oraz pomocniczych naklejono mostki tensometryczne. Do wyprowadzeń mostków przylutowano bardzo cienkie przewody, których drugie końce przylutowano do listwy zbiorczej umocowanej na górnej porzeczce ramy stoiska.



Rysunek 7: Widok badanego układu: po lewej model kratownicy, po prawej widok wielokrążka z obciążnikami

3.2 Przyrządy pomiarowe i sposób wykonania pomiarów

Do pomiaru sił w prętach kratownicy wykorzystano tensometry, naklejone na przeciwległych stronach prętów i tworzących pełne mostki tensometryczne. Takie usytuowanie tensometrów eliminuje wpływ zginania prętów przy obciążeniu kratownicy i zmniejsza wpływ zmian temperatury. W wyniku obciążenia kratownicy jej pręty ulegają odkształceniom proporcjonalnym do działających wewnątrz nich sił. Równocześnie z odkształcaniem się prętów, odkształcają się tensometry i tym samym ulega zmianie ich oporność elektryczna. Tensometry połączone są w układzie mostka Wheatstone'a do pomiaru oporności. Zmiany oporności tensometrów mierzone są poprzez pomiarowy wzmacniacz tensometryczny. Sygnał pomiarowy dociera do niego poprzez przełącznik, umożliwiający podłączenie wybranych tensometrów, rys. 8.

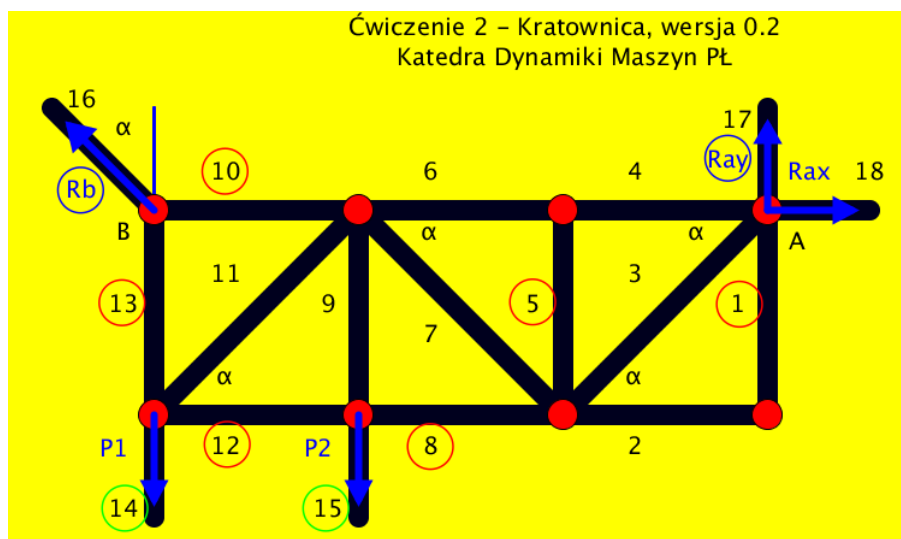


Rysunek 8: Tensometryczny układ pomiarowy ZPA 122 ze stanowiska pomiarowego

4 Przebieg pomiarów

Ćwiczenie jest wspomagane programem komputerowym, który pomaga zrozumieć zastosowaną metodę rozwiązywania analitycznego i weryfikuje otrzymane wyniki. Oblicza również względny błąd po wykonaniu pomiaru.

1. Uzgodnić numery badanych prętów, maksymalnie 6 nie licząc podporowych, wybór spośród : 1, 5, 8, 10, 12, 13, podłączonych do urządzenia pomiarowego oraz wariant obciążenia zewnętrznego kratownicy (50 lub 100 N).
2. Obliczyć obciążenia – siły P_1 i P_2 działające w wielokrażku oraz reakcje podpór kratownicy w punktach A i B.
3. Wyznaczyć metodą Rittera siły w badanych prętach kratownicy, zapisać wyniki w sprawozdaniu.
4. Dla każdego z badanych prętów:
 - Przy WYŁĄCZONYM mostku wybrać właściwy tensometr za pomocą przełącznika obrotowego.
 - Włączyć mostek, wyzerować wskazania przyciskiem TARA.
 - Dociażyć kratownicę założonym obciążeniem (żółte obciążniki), odczytać wartość siły w pręcie, zanotować. Obciążniki delikatnie umieszczać na szalce wielokrażka, szalka musi być nieruchoma podczas pomiaru.
 - Wybrać numer pręta w programie, wprowadzić zmierzoną wartość. Na podstawie wyników uzyskanych w programie zweryfikować obliczenia z wartością zmierzoną. Zanotować błąd względny pomiaru.
 - Wyłączyć mostek, zdjąć wszystkie obciążniki kratownicy oprócz czerwonego.
5. Wykonać pomiary dla kolejnego wariantu obciążenia kratownicy powtarzając kroki z p. 4.
6. Po zakończeniu pomiarów zdjąć żółte obciążniki, wyłączyć wzmacniacz.



Rysunek 9: Numeracja prętów kratownicy, w kółkach tensometry podłączone do układu pomiarowego z rys. 8

5 Opracowanie wyników pomiarów i sprawozdanie

Różnicę względną (procentową) wartości sił otrzymanych doświadczalnie P_i oraz teoretycznie P_{it} wyznacza się z

$$\delta_i = \frac{P_i - P_{it}}{P_{it}} 100\% \quad (6)$$

Sprawozdanie powinno zawierać wyniki uzyskane metodą Rittera w wybranych prętach kratownicy. Obliczenia wykonać dla wybranego wariantu obciążenia, np. $G = 50$ N. Potrzebne ewentualnie wartości sił w prętach pomocniczych (S_1 , S_2) oraz podporowych (R_{AX} , R_{AY} , R_B) wyznaczyć wykorzystując wyniki przeprowadzonych wcześniej obliczeń wstępnych. Pokazać schemat obliczeniowy, równania i wyniki liczbowe, obserwacje i wnioski.

Pytania sprawdzające

1. Co to są wielokrażki i do czego służą? Podaj przykłady wielokrażków.
2. Co to jest kratownica i jaki jest warunek jej statycznej wyznaczalności?
3. Co to są pręty zerowe kratownicy? Podaj przykłady prętów zerowych.
4. Na czym polega metoda Rittera rozwiązywania kratownic?

LABORATORIUM MECHANIKI TECHNICZNEJ

Ćwiczenie 2

WYZNACZANIE SIŁ W PRĘTACH MODELU KRATOWNICY PŁASKIEJ

Grupa: _____

Zespół: _____

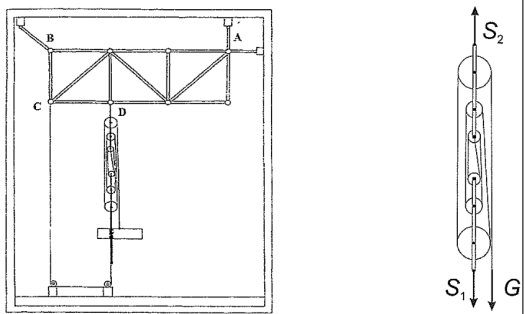
Data _____

Dane studentów:

1. _____
2. _____
3. _____
4. _____
5. _____
6. _____

Obliczenia wstępne

a) Dla obciążnika o ciężarze $Q = \dots$ N obciążającego bloczek w stanie równowagi określić siły S_1 i S_2 .

Schemat układu	Równania równowagi i ich rozwiązanie
	

Wyniki obliczeń dla $Q =$ _____ $S_1 = \dots$ _____ $S_2 = \dots$ _____

b) Znając wartości sił S_1, S_2 obliczyć wartości reakcji w punktach A i B.

Schemat układu	Równania równowagi i ich rozwiązanie

Wyniki obliczeń reakcji: $R_{Ax} = \dots$ $R_{Ay} = \dots$ $R_B = \dots$

Tabela 1: Wyniki pomiarów i obliczeń w prętach kratownicy

Nr	Siła pomiar eksperymentalny P_i	Siła wartość teoretyczna P_{id}	Różnica względna P_i oraz P_{id}
i	[N]	[N]	Δ_i [%]
1			
5			
8			
10			
12			
13			

Określenie sił w prętach metodą Rittera (z włączeniem schematu, równań oraz wyników numerycznych)

Wnioski