

# BADANIE ZJAWISKA TARCIA

Mechanika Techniczna – Ćwiczenie 1 \*

## 1 Cel ćwiczenia

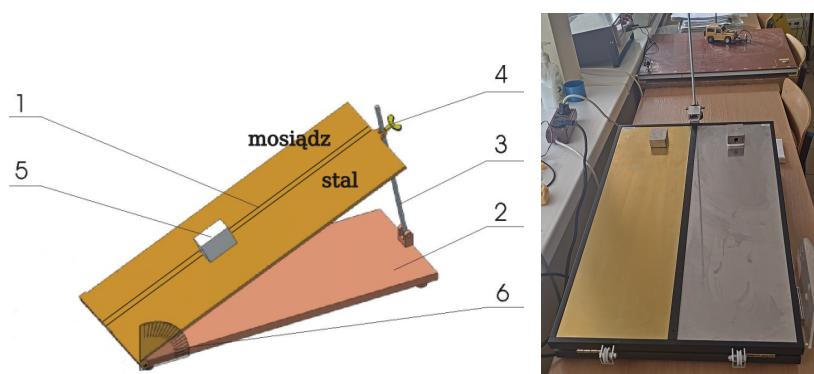
Celem ćwiczenia jest obserwacja efektów działania sił tarcia statycznego i kinetycznego w prostych układach. W szczególności jest nim eksperymentalne wyznaczenie współczynników tarcia statycznego pomiędzy kostką a płaszczyzną oraz wiotkim ciągnem a nieruchomym walcem.

## 2 Wprowadzenie

Kierunek i zwrot siły tarcia poślizgowego określone są różnie w zależności od tego, czy ruch stykających się ciał ma się dopiero rozpocząć, czy też już trwa. W pierwszym przypadku siła tarcia jest przeciwna do zamierzonego przesunięcia, w drugim natomiast jest ona przeciwna do prędkości względnej ślizgających się ciał. Pojawienie się ruchu nie tylko może zmieniać kierunek siły tarcia, ale także jej wartość. W trakcie tego ćwiczenia można będzie zaobserwować działanie sił tarcia w kilku różnych jakościowo sytuacjach.

## 3 Opis stanowiska badawczego

Ćwiczenie przeprowadzane jest na trzech stanowiskach. Widok pierwszego z nich, nachylanej płyty (równi pochyłej), używanego do wyznaczania współczynnika tarcia statycznego pomiędzy sztywną kostką a płaską powierzchnią przedstawiono na rys. 1.



Rysunek 1: Stanowisko do pomiaru współczynnika tarcia statycznego

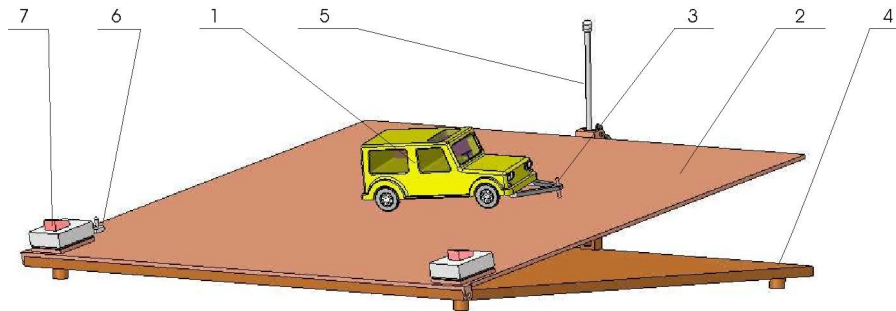
Płyta (1) może być ustawiana pod dowolnym kątem do poziomej podstawy (2) za pomocą prowadnicy (3) i urządzenia pozwalającego kontrolować zmianę pozycji katowej równi (4). Kostka (5) umieszczana jest na płycie z dwiema różnymi powierzchniami, a płyta podnoszona powoli do momentu początku ześlizgiwania się kostki. Badane są trzy kostki prostokątne o tych samych wymiarach i zbliżonych masach, ale różniące się stanem i rodzajem powierzchni kontaktu – są to mianowicie: 1 – teflon, 2 – stal, 3 – guma. Kąt nachylenia płyty mierzony jest za pomocą kątomierza (6) umocowanego do ramy stoiska.

Zasadnicze elementy drugiego stanowiska stanowią sześć nieruchomych krążków wykonanych z różnych materiałów oraz jeden krążek ruchomy, pokazane na rys. 2. Krążki: (1) – drewniany, (2) – tekstolitowy, (3) – teflonowy, (4) i (5) – mosiężne mają taką samą średnicę 58 mm, natomiast krążek mosiężny (6) ma średnicę 20 mm. Wszystkie one są umocowane na stałe do ramy (8). Z kolei wykonany z mosiądzu krążek (7) ma także średnicę 58 mm, ale dzięki osadzeniu go za pomocą łożyska kulkowego na umocowanej w ramie poziomej osi może się on obracać. Dowolnie wybrane krążki można opasywać lekką, wiotką linką (9). Na jednym jej końcu zawieszony jest ciężarek (10) o masie 100 g, natomiast do drugiego końca linki jest uczepiony pojemnik (11) – również o masie 100 g. Napełniając pojemnik obciążnikami możliwe jest wywołanie ślizgania się linki po krążku nieruchomym lub też spowodowanie obrotu krążka ruchomego.

\*Autorzy – W. Zwoliński, W. Lubnauer, K. Januszkiewicz, w: K. Januszkiewicz, J. Grabski: ĆWICZENIA LABORATORYJNE Z MECHANIKI, Łódź 2008



Rysunek 2: Stanowisko do badania tarcia cięgien i momentów oporu



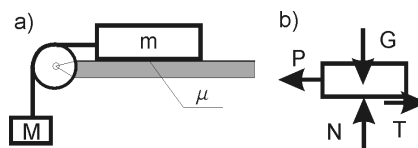
Rysunek 3: Stanowisko do demonstracji tarcia statycznego i kinetycznego

Stanowisko tarcie to model samochodu z napędem umieszczony na przechyłanej płycie pokazane na rys. 3. W kontakcie z płytą pozostają jedynie tylne, napędzane koła samochodu. Przednia oś jest uniesiona, a samochód zamocowany jest w sposób umożliwiający jedynie obrót jego bryły wokół osi (3) prostopadłej do powierzchni płyty. Kąt pochylenia płyty może być płynnie zmieniany za pomocą prowadnicy (5) z zaciskiem. Przełącznik (6) służy do włączania zasilania i zmiany kierunku obrotu kół, start napędu za pomocą przycisku (7).

## 4 Teoretyczny opis zjawiska

### 4.1 Wyznaczanie współczynnika tarcia statycznego

Rozważmy układ przedstawiony na rys. 4a złożony z kostki o masie  $m$  (ciężarze  $G = m \cdot g$ ) umieszczonej na poziomej powierzchni i do której doczepiono linę z zawieszonym na niej ciałem o masie  $M$  (ciężarze  $Q = M \cdot g$ ). Zbadajmy równowagę kostki, na którą działa pionowa siła ciężkości  $G$  i pozioma siła  $P$  oraz siły reakcji chropowatego podłoża  $N$  i  $T$  (rys. 4b).



Rysunek 4: Schemat układu: kostka na poziomej płaszczyźnie

Znając wartość siły  $P = Q$ , przy której następuje ruch kostki, określa się współczynnik tarcia statycznego z następującego wzoru:

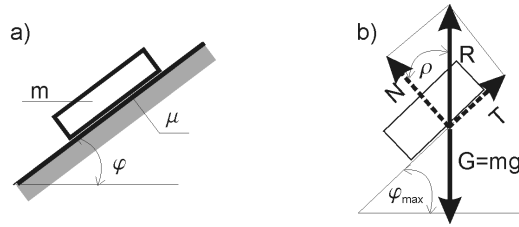
$$\mu = \frac{P}{G} = \frac{M}{m}. \quad (1)$$

Rozważmy teraz kostkę spoczywającą na powierzchni nachylonej do poziomu (rys. 5a). Zwiększając stopniowo kąt nachylenia powierzchni  $\varphi$  możemy spowodować ruch (ześlizgiwanie się) kostki. Maksymalna wartość tego kąta, dla której kostka pozostaje w spoczynku, jest równa kątowi tarcia statycznego

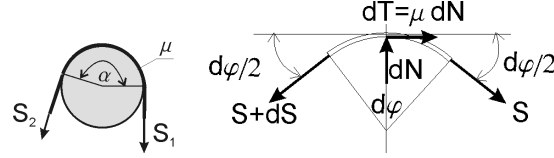
$$\mu = \operatorname{tg} \varphi_{\max}. \quad (2)$$

Z powyższego wzoru możemy wyznaczyć współczynnik tarcia statycznego  $\mu$ .

Weźmy teraz pod uwagę wiotkie cięgno opasujące nieruchomy krążek, jak pokazano na rys. 6. Związek



Rysunek 5: Schemat kostki umieszczonej na równi pochyłej oraz działających sił



Rysunek 6: Schemat układu: wiotkie cięgno opasujące krążek

pomędzy wartością napięć w dwóch częściach cięgna w stanie równowagi granicznej (cięgno zamierzałoby zacząć się ślizgać po krążku w lewo) jest dany zależnością

$$\frac{S_2}{S_1} = e^{\mu\alpha} \quad (3)$$

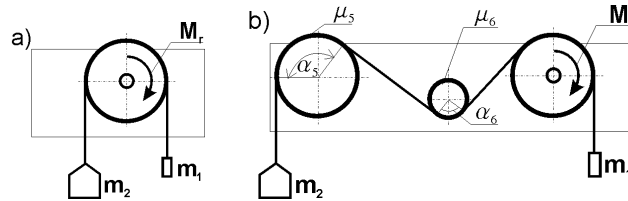
gdzie  $\mu$  – współczynnik tarcia statycznego,  $\alpha$  – kąt opasania (wyrażony w radianach),  $e$  – podstawa logarytmu naturalnego ( $e = 2.718$ ),  $S_1$  – napięcie w części, która opiera się,  $S_2$  – napięcie w części, która ciągnie. Należy zauważyć, że w przypadku istnienia poślizgu można stosować powyższy wzór, ale należy wstawić współczynnik tarcia kinetycznego  $\mu_k$ .

Mierząc wartości sił  $S_1$  i  $S_2$  można wyznaczyć współczynnik tarcia statycznego;  $S_1 = m_1g$  oraz  $S_2 = m_2g$ , gdzie  $g$  – przyspieszenie ziemskie,  $m_1$  i  $m_2$  – odpowiednio masy ciężarka i pojemnika z obciążnikami

$$\mu = \frac{1}{\alpha} \ln \frac{S_2}{S_1} = \frac{1}{\alpha} \ln \frac{m_2}{m_1}. \quad (4)$$

Znając wartości sił  $S_1$  i  $S_2$  można także wyznaczyć moment oporu łożyska  $M_r$  podpierającego krążek ruchomy 7 (rys. 7a)

$$M_r = (S_2 - S_1)R = (m_2 - m_1)Rg. \quad (5)$$



Rysunek 7: Konfiguracja układu: a) moment oporu łożyska; b) linka opasująca krążki nieruchome 5, 6 oraz ruchomy 7 (patrz rys. 2)

Wykorzystując znajomość współczynników tarcia  $\mu_5$  i  $\mu_6$  oraz moment oporu  $M_r$  można wyznaczyć minimalną wartość masy  $m_2$  dla znanej wartości masy  $m_1$  (rys. 7b odnoszący się do stoiska z rys. 2).

Przy danych zależnościach  $O_5B + BE + CO_6 = a$  oraz  $O_6G + HJ + JO_7 = b$  otrzymuje się następujące równania do wyznaczenia  $\beta$  i  $\gamma$ :

$$\frac{R}{\sin \beta} + \frac{(R-r)}{\tan \beta} + \frac{r}{\sin \beta} = a \quad \text{i} \quad \frac{R}{\sin \gamma} + \frac{(R-r)}{\tan \gamma} + \frac{r}{\sin \gamma} = b. \quad (6)$$

Rozwiązania tych równań mają postać:

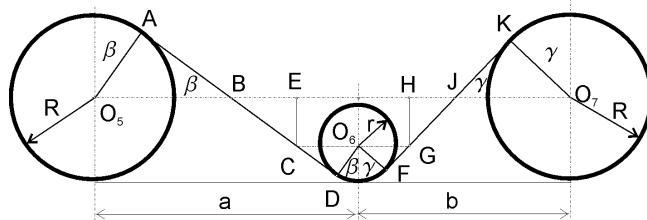
$$\tan \frac{\beta}{2} = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4Rr}}{2r}, \quad \tan \frac{\gamma}{2} = \frac{b - \sqrt{b^2 - 4Rr}}{2r}. \quad (7)$$

Kąty opasania  $\alpha_5$  i  $\alpha_6$  dla krążków 5 i 6 wynoszą zatem

$$\alpha_5 = \frac{\pi}{2} + \beta \quad \alpha_6 = \beta + \gamma. \quad (8)$$

W rezultacie minimalna masa  $m_2$  dana jest związkiem

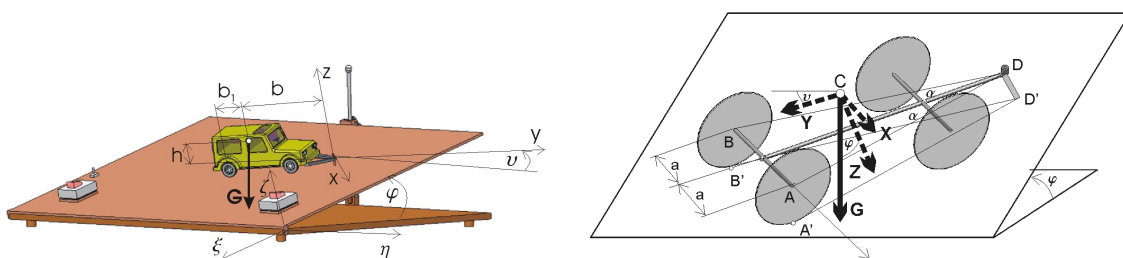
$$m_2 = \left( m_1 + \frac{M_r}{gR} \right) e^{\mu_5\alpha_5 + \mu_6\alpha_6}. \quad (9)$$



Rysunek 8: Wymiary i kąty analizowanego układu

## 4.2 Analiza sił tarcia działających na koła samochodu

Jak wspomniano wcześniej (w opisie stanowiska), z podłożem kontaktują się jedynie tylne (napędzane) koła samochodu. Przód pojazdu jest lekko uniesiony, a samochód zamocowany jest w sposób umożliwiający jedynie obrót jego bryły wokół osi prostopadłej do podłoża (przegub w punkcie D).



Rysunek 9: Schemat układu: wymiary i składowe siły ciężkości

Płaszczyzna ABD (zawierająca osie kół) jest jedynie nieznacznie odchylona od płaszczyzny podłoża A'D'B, dlatego różnica między kątami A'D'B' i ADB (kątem ADB = 2\alpha) jest pomijalna. Kąt \alpha określony jest następującą zależnością wynikającą z geometrii układu:

$$\sin \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + (b + b_1)^2}}, \quad (10)$$

gdzie:  $a$ ,  $b$ ,  $b_1$  oraz pojawiające się później  $r$  to wymiary pokazane na rysunku.

Z lokalnym (ruchomym) układem odniesienia  $xyz$  związanym z samochodem oraz układem  $\xi\eta\zeta$  związanym z płaszczyzną płyty. Przy  $v = 0$  osie  $x$ ,  $y$ ,  $z$  są równoległe odpowiednio do osi  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ .

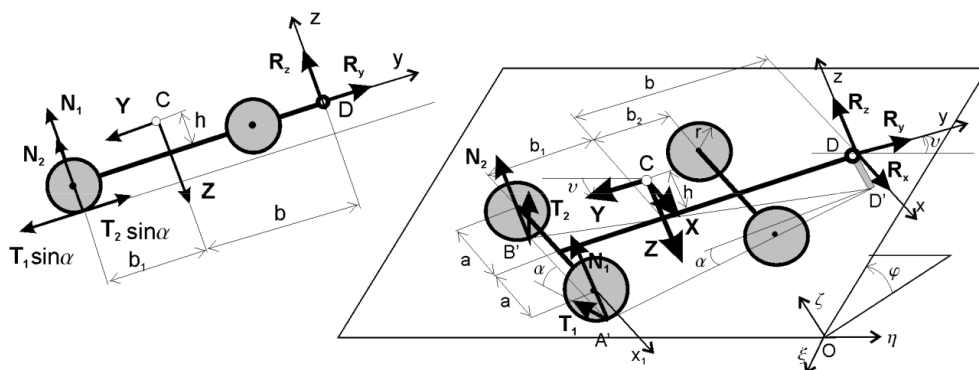
Składowe siły ciężkości samochodu  $G$  (wzdłuż  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ) określone są następująco:

$$X = G \sin \varphi \cos v, \quad Y = G \sin \varphi \sin v, \quad Z = G \cos \varphi. \quad (11)$$

W dalszej części wyznaczmy siły tarcia występujące w punktach styku tylnych kół samochodu w dwóch przypadkach: statycznym i dynamicznym.

### Siły tarcia statycznego

Rozważmy położenie równowagi granicznej samochodu z nieobrcającymi się tylnymi kołami.



Rysunek 10: Siły działające na samochód w położeniu równowagi granicznej

W położeniu równowagi granicznej siły tarcia statycznego  $T_1$  i  $T_2$  są prostopadłe odpowiednio do linii A'D' i B'D'. Dla układu z rys. 10 otrzymuje się następujące równania równowagi:

$$\sum_i P_{ix} : -T_1 \cos \alpha - T_2 \cos \alpha + X + R_x = 0, \quad (12)$$

$$\sum_i P_{iy} : -T_1 \sin \alpha + T_2 \sin \alpha - Y + R_y = 0, \quad (13)$$

$$\sum_i P_{iz} : N_1 + N_2 - Z + R_z = 0, \quad (14)$$

$$\sum_i M_{ix1} : -T_1 r \sin \alpha + T_2 r \sin \alpha - Z b_1 + Y h + R_z (b + b_1) = 0, \quad (15)$$

$$\sum_i M_{iy} : -N_1 a + N_2 a + X h + T_1 r \cos \alpha + T_2 r \cos \alpha = 0, \quad (16)$$

$$\sum_i M_{iz} : -(T_1 + T_2)(b + b_1) \cos \alpha - (T_1 + T_2)a \sin \alpha + X b = 0. \quad (17)$$

W stanie równowagi granicznej występują dodatkowo dwa związki dotyczące sił tarcia:

$$T_1 = \mu N_1, \quad T_2 = \mu N_2, \quad (18)$$

gdzie  $\mu$  jest współczynnikiem przyczepności kół.

Z powyższego układu równań otrzymuje się składowe reakcji w punktach styku kół z podłożem:

$$N_1 = Z \frac{b(a + \mu r \cos \alpha)}{2a(b + b_1 + \mu r \sin \alpha)} + X \frac{h}{2a}, \quad N_2 = Z \frac{b(a - \mu r \cos \alpha)}{2a(b + b_1 + \mu r \sin \alpha)} - X \frac{h}{2a}. \quad (19)$$

Z kolei prostokątne składowe reakcji w przegubie D wynoszą:

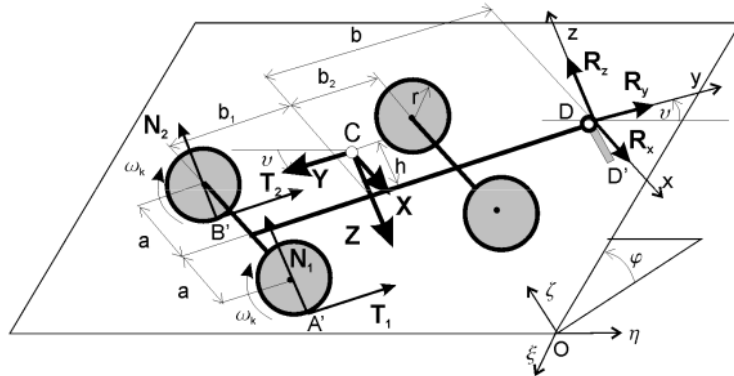
$$\begin{aligned} R_x &= Z \frac{b\mu \cos \alpha}{b + b_1 + \mu r \sin \alpha} - X, \\ R_y &= Z \frac{\mu^2 b r \sin \alpha \cos \alpha}{a(b + b_1 + \mu r \sin \alpha)} + X \frac{\mu h \cos \alpha}{a} + Y, \\ R_z &= Z \frac{b_1 + \mu r \cos \alpha}{b + b_1 + \mu r \sin \alpha}. \end{aligned} \quad (20)$$

Rozwiązując powyższy układ równań, wyznacza się kąt nachylenia  $\varphi$  odpowiadający stanowi równowagi granicznej:

$$\tan \varphi = \frac{\mu b [(b + b_1) \cos \alpha + a \sin \alpha]}{[b + b_1 + \mu r \sin \alpha] b \cos \alpha - [(b + b_1) \cos \alpha + a \sin \alpha] \mu h \sin \alpha}. \quad (21)$$

### Siły tarcia kinetycznego

Rozważmy teraz samochód w chwili, gdy jego tylne koła zaczynają obracać się z prędkością kątową  $\omega_k$  (rys. 11).



Rysunek 11: Siły działające na samochód w chwili rozpoczęcia ruchu tylnych kół

Przód samochodu jest podparty przegubowo (samochód nie ma pełnej swobody ruchu), więc obracające się tylne koła ślizgają się po podłożu, wywołując siły tarcia kinetycznego w punktach A' i B' styku kół z płytą. W rozważanej sytuacji siły tarcia kinetycznego są równoległe do osi  $y$  pokrywającej się z osią podłużną samochodu (porównaj obecny przypadek z wcześniej rozważanym przypadkiem sił tarcia statycznego). Należy pamiętać, że siła tarcia kinetycznego jest zawsze przeciwna do prędkości względnej punktu styku ślizgających się ciał (w naszym przypadku – koła i płyty).

Oznaczmy:

$m$  – masa samochodu:  $m = \frac{G}{g}$ ,

$J_z$  – moment bezwładności masy samochodu względem osi  $z$ :  $J_z = J_{zc} + mb^2$ ,

$\varepsilon$  – przyspieszenie kątowe samochodu:  $\varepsilon = \frac{d^2\theta}{dt^2}$ ,

$p_c$  – styczna składowa przyspieszenia środka masy samochodu:  $p_c = \varepsilon b$ .

Traktując samochód jako sztywne ciało obracające się wokół nieruchomej osi  $z$  (tor środka masy  $C$  jest okręgiem o promieniu  $b$ ), otrzymuje się sześć następujących równań (przy założeniu początkowej prędkości kątowej ciała  $\omega = 0$ ):

$$\sum_i M_{iz} : \quad J_z \varepsilon = T_1 a - T_2 a + X b, \quad (22)$$

$$\sum_i P_{ix} : \quad m p_c = X + R_x, \quad (23)$$

$$\sum_i P_{iy} : \quad m \cdot 0 = T_1 + T_2 - Y + R_y, \quad (24)$$

$$\sum_i P_{iz} : \quad m \cdot 0 = N_1 + N_2 - Z + R_z, \quad (25)$$

$$\sum_i M_{ixc} : \quad J_{xc} \cdot 0 = (T_1 + T_2)(r + h) - (N_1 + N_2)b_1 + R_y h + R_z b, \quad (26)$$

$$\sum_i M_{iyc} : \quad J_{yc} \cdot 0 = -N_1 a + N_2 a - R_y h. \quad (27)$$

Siły tarcia kinetycznego można wyrazić przez siły normalne:

$$T_1 = \mu_k N_1, \quad T_2 = \mu_k N_2, \quad (28)$$

gdzie  $\mu_k$  jest współczynnikiem tarcia kinetycznego.

Rozwiązując powyższy układ równań, otrzymujemy:

- składowe normalne sił reakcji w punktach styku koło–podłoże

$$N_1 = \frac{Zb + Yh}{2(b + b_1 - \mu_k r)} + X \frac{h}{2a} \quad (29)$$

$$N_2 = \frac{Zb + Yh}{2(b + b_1 - \mu_k r)} - X \frac{h}{2a}, \quad (30)$$

- prostokątne składowe reakcji w przegubie D

$$\begin{aligned} R_x &= X \frac{\mu_k h b - J_z}{J_z} \\ R_y &= \frac{Y[b + b_1 - \mu_k(r + h)] - \mu_k Z b}{b + b_1 - \mu_k r} \\ R_z &= \frac{Z(b_1 - \mu_k r) - Y h}{b + b_1 - \mu_k r}, \end{aligned} \quad (31)$$

- przyspieszenie środka masy

$$p_c = X \frac{b + \mu_k h}{J_{zc} + mb^2} b, \quad (32)$$

- przyspieszenie kątowe

$$\varepsilon = X \frac{b + \mu_k h}{J_{zc} + mb^2}. \quad (33)$$

Z zależności (33) wynika, że składowa  $X$  siły ciężkości ( $X = G \sin \varphi \cos v$ ) jest przyczyną obrotu samochodu wokół osi prostopadłej do nachylonego podłoża.

W szczególnym przypadku gdy  $v = 0^\circ$  (oś podłużna samochodu równoległa do dłuższej krawędzi płyty, czyli poprzecznie do nachylenia podłoża – wówczas  $X = G \sin \varphi$ ), otrzymuje się następujący wzór określający przyspieszenie kątowe samochodu:

$$\varepsilon = G \frac{b + \mu_k h}{J_{zc} + mb^2} \sin \varphi. \quad (34)$$

W drugim szczególnym przypadku, gdy  $v = 90^\circ$  (oś podłużna samochodu skierowana prostopadle do dłuższej krawędzi płyty, czyli wzdłuż nachylenia podłoża) składowa  $X = 0$ , a zatem  $\varepsilon = 0$  i obrót samochodu nie nastąpi.

## 5 Procedura pomiarowa

### 5.1 Wyznaczanie współczynnika tarcia statycznego

W pierwszej części ćwiczenia wykonaj następujące czynności.

1. Zawieś linkę z obciążnikiem i pojemnikiem na dodatkowe masy w połowie długości na jednym z krążków.
2. Stopniowo napełniaj pojemnik obciążnikami aż linka zacznie się ślizgać.
3. Określ masę pojemnik z obciążnikami i zanotuj jako  $m_2$  w Tabeli 1.
4. Wykonaj pomiar trzykrotnie.
5. Następnie powtórz kroki 1–4 dla każdego z nieruchomych krążków (1–6).

W drugiej części ćwiczenia wykonaj następujące czynności.

1. Ustaw płytę poziomo i połóż kostki z powierzchnią styku stalową na **stalowej powierzchni ślizgowej**, zanotuj stan powierzchni w tabeli 1.
2. Stopniowo podnoś płytę aż do położenia, w którym kostka zaczyna zjeżdżać.
3. Zanotuj w tabeli 1 kąt nachylenia płyty w chwili zerwania przyczepności kostki.
4. Wykonaj pomiar trzykrotnie.
5. Powtórz działania 1–4 dla **powierzchni teflonowej**, a następnie pokrytej gumą.
6. *Można powtórzyć, w celu porównania, działania 1–5 dla wszystkich powierzchni styku w **zmodyfikowanych warunkach** – np. zwilżonych wodą, mydłem lub podobnym środkiem.*

### 5.2 Badanie zachowania modelu samochodu

1. Włącz zasilanie silnika samochodu i sprawdź, czy podstawa stanowiska jest ustawiona poziomo.
2. Umieść samochód na płycie tak, aby jego oś podłużna była równoległa do dłuższego, poziomego krawędzi płyty.
3. Powoli pochylaj płytę aż do zerwania przyczepności kół samochodu (ten kąt nachylenia płyty odpowiada stanowi równowagi granicznej samochodu).
4. Znacznie zmniejsz kąt nachylenia i ponownie umieść samochód jak poprzednio.
5. Ustaw przełącznik kierunku jazdy w pozycję P (koła obracają się jak przy jeździe do przodu).
6. Naciśnij lewy przycisk uruchamiający napęd tylnych kół i zaobserwuj zachowanie samochodu.
7. Przełącz kierunek jazdy na pozycję T (koła obracają się jak przy jeździe wstecz) i powtórz instrukcje z punktu 6.
8. Umieść samochód w dowolnej pozycji na płycie i wykonaj kroki 3–7.
9. Umieść samochód prostopadle do krawędzi płyty – wzdłuż nachylenia podłoża, jak pokazano na rysunku i powtórz czynności 5–7 dla dowolnego kąta nachylenia płyty.
10. Wyłącz zasilanie silnika.

## Pytania kontrolne

1. Jakie cechy związane są z naturą tarcia?
2. Jaka może być przyczyna powstawania tarcia?
3. Czy tarcie przeszkadza czy pomaga w rozwiązaniach inżynierskich?



# LABORATORIUM MECHANIKI TECHNICZNEJ

## Ćwiczenie 1

### BADANIE ZJAWISKA TARCIA

Grupa: \_\_\_\_\_

data \_\_\_\_\_

Zespół: \_\_\_\_\_

Imię i nazwisko:

1. \_\_\_\_\_

2. \_\_\_\_\_

3. \_\_\_\_\_

4. \_\_\_\_\_

5. \_\_\_\_\_

6. \_\_\_\_\_

#### Pomiary i wyniki: współczynniki tarcia statycznego

Tabela 1: Pomiary wsp. tarcia statycznego  $\mu$  linki/cięgna o różne materiały

Materiał	opasanie $\alpha$	$m_1$	nr	masa $m_2$	$\frac{m_2}{m_1}$	średnia	Wsp. tarcia $\mu$ (1.4)
	rad	g		g	[-]	[-]	[-]
drewno	$\pi$	100	1				
			2				
			3				
tekstolit	$\pi$	100	1				
			2				
			3				
teflon	$\pi$	100	1				
			2				
			3				
mosiądz	$\pi$	100	1				
			2				
			3				
mosiądz	$3\pi$	100	1				
			2				
			3				
mosiądz	$\pi$	100	1				
			2				
			3				

Tabela 2: Pomiary kąta nachylenia  $\phi$  i obliczeń wsp. tarcia  $\mu$  wyznaczanego **na równi pochyłej**

Kostka	Podłoże	pomiar	Kąt nach. $\phi$	Średni $\phi$	$\mu$ (1.2)	Uwagi
			stopnie	stopnie	[-]	
stal	stal	1				
		2				
		3				
stal	mosiądz	1				
		2				
		3				
teflon	stal	1				
		2				
		3				
teflon	mosiądz	1				
		2				
		3				
guma	stal	1				
		2				
		3				
guma	mosiądz	1				
		2				
		3				