

WYZNACZENIE REAKCJI DYNAMICZNYCH W RUCHU KULISTYM

Mechanika Techniczna – Ćwiczenie 14 *

1 Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest doświadczalne określenie reakcji dynamicznych występujących w ruchu kulistym modelu gniotownika oraz porównanie wyników pomiarów z rezultatami obliczeń teoretycznych.

2 Opis zjawiska

Zjawisko występowania dynamicznych reakcji więzów poruszających się ciał jest jednym z ważniejszych problemów przy konstruowaniu maszyn. Reakcje takie występują m.in. wówczas, gdy mamy do czynienia z ruchem obrotowym ciała wokół osi, która nie jest jego osią geometryczną (ciało nie jest wyrównoważone) oraz – w innym przypadku – gdy oś obrotu ciała jest wprawdzie jego osią geometryczną, ale oś ta nie jest nieruchoma, lecz wykonuje również ruch obrotowy. Jest tak w ruchu kulistym ciała sztywnego.

Właściwość ta – występowania dynamicznych reakcji więzów, które zwiększają nacisk między poruszającym się ciałem a podłożem – wykorzystywana jest w konstrukcji tak zwanych gniotowników, młynów służących do rozdrabniania niektórych substancji, na przykład celulozy, kredy. Jest to jeden z nielicznych przypadków, kiedy reakcje dynamiczne występują jako zjawisko pożądane w pracującej maszynie.

Badany model doświadczalny ma budowę podobną do stosowanych w przemyśle gniotowników. Jego krążki poruszają się ruchem kulistym o pionowej osi precesji, co powoduje wystąpienie między nimi a podłożem dodatkowego, dynamicznego nacisku. Konstrukcja stanowiska badawczego pozwala pomierzyć wielkość tego nacisku. Dzięki znajomości mas, wymiarów i prędkości modelu można obliczyć teoretyczną wartość nacisku. Zmierzone wartości powinny być porównywane z określonymi teoretycznie.

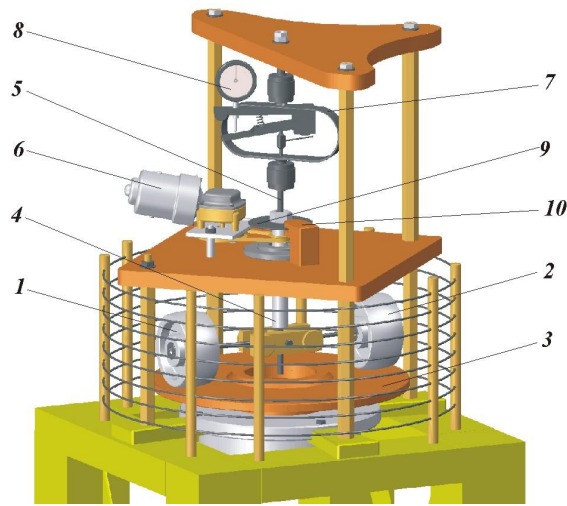
3 Opis stanowiska badawczego

3.1 Badany obiekt

Badany model gniotownika pokazany na rys. 1. Składa się on z dwóch zasadniczych zespołów.

1. Nieruchomej pionowej osi (5), podwieszanej za pośrednictwem dynamometru (7) do obudowy stoiska. Do dolnego końca osi zamocowana jest pozioma tarcza (3), po której mogą poruszać się krążki (1 i 2). Ten układ trzech elementów – dolna tarcza jako podłoże, pionowa oś i w górze dynamometr pałkowy – stanowi rodzaj wagi, na której można mierzyć siłę nacisku krążków na podłoże.
2. Obrotowej ruchomej tulei (4) nałożonej na nieruchomą oś, z dwoma symetrycznymi krążkami (1 i 2), połączonymi z tuleją przegubami. Tuleja wraz z krążkami może obracać się wokół osi pionowej dzięki układowi napędowemu, złożonemu z silnika (6) i dwóch przekładni: ślimakowej i paskowej. Układ napędzany jest silnikiem prądu stałego, którego prędkość obrotowa zależy od wartości napięcia zasilającego (z zakresu 0–12 V). Użycie autotransformatora pozwala zmieniać w sposób ciągły napięcie, a tym samym prędkość obrotową silnika i wreszcie prędkość toczenia się krążków po bieżni.

*Autor – A. Polka, w: K. Januszkiewicz, J. Grabski: ĆWICZENIA LABORATORYJNE Z MECHANIKI, Łódź 2008



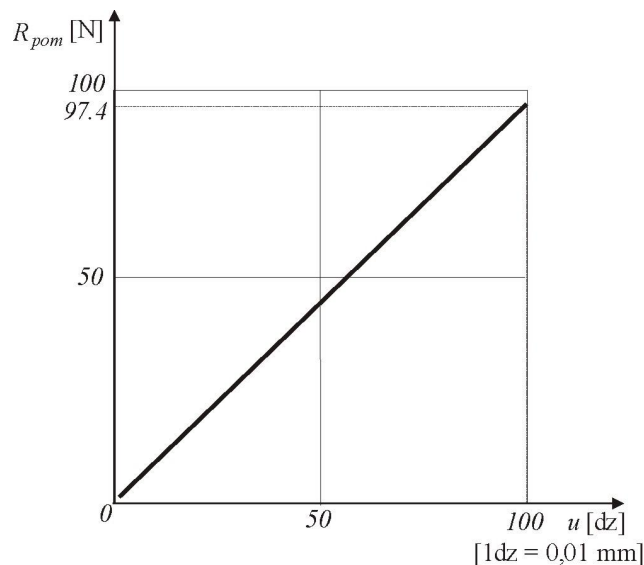
Rysunek 1: Laboratoryjny model gniotownika

3.2 Przyrządy pomiarowe i sposób wykonywania pomiarów

Aparatura pomiarowa stanowiska do badań umożliwia pomiar dwu wielkości: wartość prędkości kątowej precesji ω_0 układu oraz ugięcie dynamometru pałkowego u .

Pomiar wartości wektora prędkości kątowej precesji ω_0 możliwy jest dzięki tarczy perforowanej (9), obracającej się wraz z tuleją wokół osi pionowej. Tarcza (9) ma 10 równomiernie rozmieszczonych na obwodzie otworów. Nad tarczą, nad otworami zamocowany jest czujnik optyczny (10), podłączony do częstotliciomierza. Obracająca się tarcza generuje w układzie pomiarowym impulsy, wywołane przecinaniem linii optycznej czujnika przez kolejne otwory. Układ pomiarowy zlicza i wyświetla liczbę impulsów zarejestrowanych przez miernik w określonym czasie (np. 1 sekundy), przy czym jeden impuls odpowiada 1/10 obrotu tarczy. Znajomość częstotliwości, z jaką otwory tarczy przecinają linię pomiarową czujnika, pozwala na proste obliczenie liczby obrotów tarczy w wybranym czasie oraz – co za tym idzie – prędkości kątowej tulei w chwili pomiaru.

Ugięcie dynamometru u pokazuje czujnik zegarowy (8), zamocowany między dolnym a górnym pałakiem dynamometru. Czujnik mierzy przemieszczenie sprężyny w osi symetrii, to znaczy w miejscu, w którym do dynamometru podwieszona jest nieruchoma, pionowa oś stoiska z dolną tarczą. Pomiar ugięcia – dokonany jako odczyt wskazania czujnika – pozwala obliczyć siłę obciążającą sprężynę, ponieważ wcześniej układ ten został wycechowany i znana jest jego charakterystyka, pokazana na rys. 2.



Rysunek 2: Charakterystyka dynamometru pałkowego

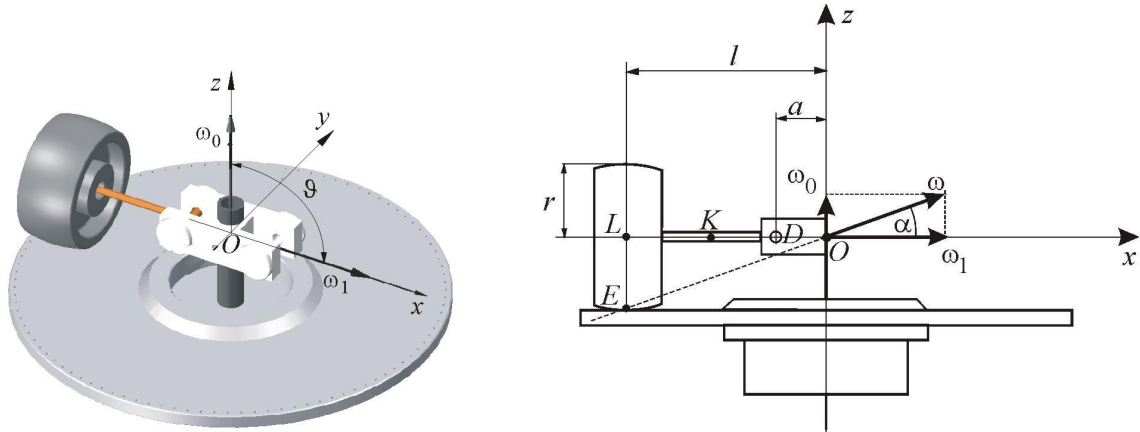
Charakterystyka ta pokazuje liniową zależność między zarejestrowanym przez czujnik ugięciem sprężyny u (na osi poziomej), a siłą w sprężynie R_{pom} (na osi pionowej).

Przy pomiarze siły działającej na tarczę, będącą podstawą wagi, należy mieć świadomość, że pomiar dotyczy nie całkowitej siły obciążającej tarczę, a jedynie jej przyrostu między momentem odczytu i momentem, w którym wyzerowano czujnik zegarowy. Jeżeli zerowanie czujnika odbywało się przed wprowadzeniem układu w ruch, wtedy istnieje możliwość pomiaru wyłącznie przyrostu siły pod wpływem ruchu, a więc wielkość dynamicznej reakcji nacisku. Stan początkowej równowagi statycznej układu jest więc dla naszego pomiaru „stanem zero”.

4 Podstawowe zależności teoretyczne

4.1 Kinematyka układu

Można zauważyć, że mamy do czynienia ze szczególnym przypadkiem ruchu kulistego krążków. Jeden z tych krążków jest pokazany na rys. 3.



Rysunek 3: Podstawowe oznaczenia i wymiary

Na powyższym rysunku widać, że oś obrotu własnego krążków jest zawsze pozioma i obraca się w płaszczyźnie poziomej wokół pionowej osi precesji z prędkością kątową precesji ω_0 (ω_0). Znaczy to, że kąt nutacji zawarty między osią precesji a osią obrotu własnego jest kątem prostym ($\vartheta = \pi/2$) i ma wartość stałą, a więc jego pochodna względem czasu, czyli prędkość kątowa nutacji jest równa zero. Wynika z tego, że wektor chwilowej prędkości kątowej ciała ω równy jest sumie geometrycznej tylko dwóch wektorów: poziomego – prędkości obrotu własnego ω_1 i pionowego – prędkości precesji ω_0 :

$$\omega = \omega_1 + \omega_0. \quad (1)$$

Krążki toczą się po nieruchomym podłożu bez poślizgu, zatem punkt styku krążka z powierzchnią tarczy jest dla krążka chwilowym środkiem obrotu, a więc punktem, przez który przechodzi chwilowa oś obrotu, wychodząca ze środka ruchu kulistego, z punktu O . Pozwala to, na podstawie znanej geometrii układu, określić kąt nachylenia (α) chwilowej osi obrotu do poziomu z zależności

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{r}{l}, \quad (2)$$

gdzie: r – promień krążka, l – odległość środka krążka od osi precesji.

Ponieważ osie precesji i obrotu własnego tworzą ze sobą kąt prosty, oba wektory prędkości kątowych i ich wypadkowa, chwilowa prędkość kątowa ω (1), leżąca na znanym kierunku – chwilowej osi obrotu – tworzą trójkąt prostokątny. Można łatwo obliczyć prędkości układu

$$\omega_1 = \omega_0 \operatorname{ctg} \alpha = \omega_0 \frac{l}{r}, \quad \omega = \frac{\omega_0}{\sin \alpha}. \quad (3)$$

Wynika z tego, że w ruchu ustalonym prędkości układu nie zależą od czasu. Chwilowa prędkość kątowa ω ma więc stałą wartość bezwzględną i jest nachylona do obu osi pod stałymi kątami. Jest to przypadek tzw. **precesji regularnej**, interpretowany również jako toczenie się bez poślizgu stożka ruchomego – w tym przypadku o osi poziomej i kącie wierzchołkowym 2α – po stożku nieruchomym o osi pionowej i znanym kącie wierzchołkowym, w tym przypadku równym $(\pi - 2\alpha)$.

4.2 Analiza dynamiki układu

Będziemy poszukiwać wartości sił dynamicznych w czasie ruchu modelu korzystając z równań dynamiki dla ciała sztywnego:

- równania opisującego ruch środka masy ciała

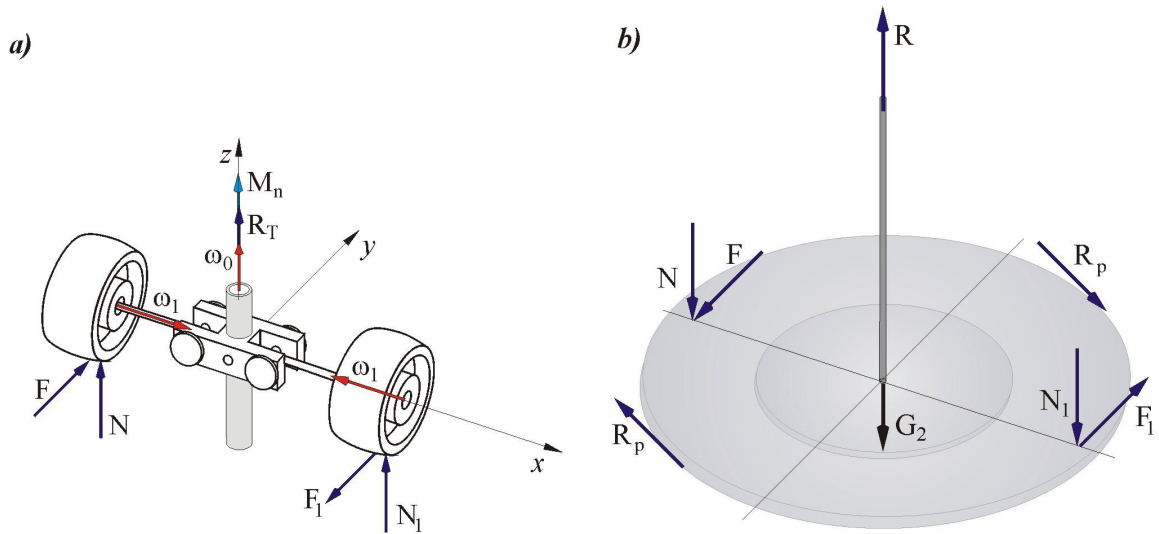
$$m\mathbf{p}_c = \mathbf{P}, \quad (4)$$

- twierdzenia o pochodnej wektora krętu ciała określonego względem nieruchomego bieguna

$$\frac{d\mathbf{K}_o}{dt} = \mathbf{M}_0. \quad (5)$$

Poszukiwane reakcje dynamiczne podłoża są dla modelu siłami zewnętrznymi, znajdują się więc po prawej stronie równań (4) i (5). Dla ich obliczenia należy określić lewe strony równań – przyspieszenie środka masy krążka i prędkość zmian wektora krętu krążka.

Rozpatrywany jest ruch podzespołu (rys. 4a)) złożonego z krążków – poruszających się ruchem kulistym oraz tulei napędzającej wraz z oprawą łożysk i osiami krążków – poruszających się ruchem obrotowym wokół osi z .



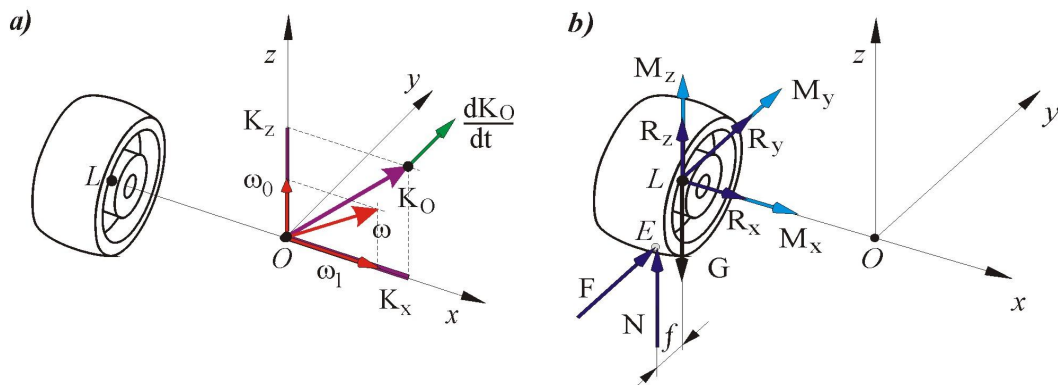
Rysunek 4: Analizowany podzespół złożony z krążków, osi i tulei napędzającej oraz bieźnia

Równania dynamiki muszą być napisane oddzielnie dla każdego z ciał lub podukładów. Będą one sformułowane w układzie ruchomym $Oxyz$ o wersorach $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ (obraca się on z prędkością ω_o). Jeśli poszukiwanymi wielkościami są wartości obu składowych reakcji podłoża N i F (N_1 i F_1), to konieczne jest rozwiązanie równań dynamiki dla: krążka, osi krążka, podukładu złożonego z tulei napędzającej wraz z oprawą łożysk (ze względu na symetrię układu rozpatrywany będzie tylko jeden z krążków i jedna z osi, wokół której obraca się krążek).

Bieźnia (rys. 4b)), po której toczą się krążki jest unieruchomiona (reakcja R_p oznacza oddziaływanie blokady obrotu), a R oznacza siłę oddziaływania dynamometru. Wartość siły R jest sumą sił N, N_1 i G_2 (gdzie G_2 oznacza ciężar bieźni).

4.3 Równania dynamiki dla krążka

Na rys. 5 jest przedstawiony jeden z krążków. Zaznaczony jest wektor krętu i reakcje działające na krążek w punktach L (kontakt z osią) i E (kontakt z bieźnią).



Rysunek 5: Kręt krążka (wektor \mathbf{K}_O) i jego pochodna oraz obciążenia działające na krążek

Przyspieszenie środka masy krążka – w przypadku ruchu układu ze stałą prędkością kątową – wynosi $\mathbf{p}_L = i\omega_0^2 l + \mathbf{j}0 + \mathbf{k}0$. W związku z tym lewą stronę równania (4) można przedstawić w formie

$$m\mathbf{p}_C = m\mathbf{p}_L = i m \omega_0^2 l + \mathbf{j}0 + \mathbf{k}0. \quad (6)$$

Obciążenia zewnętrzne działające na krążek są zaznaczone na rys. 5b), a mianowicie: siła ciężkości $\mathbf{G} = -\mathbf{k}mg$ przyłożona w środku ciężkości krążka (L), reakcja podłoża $\mathbf{R}_E = \mathbf{j}F + \mathbf{k}N$ oraz reakcja w punkcie połączenia krążka z osią (przyjęto, że punktem, w którym ciała są połączone jest środek masy krążka) $\mathbf{R}_L = iR_x + \mathbf{j}R_y + \mathbf{k}R_z$ i moment pary sił $\mathbf{M}_L = iM_x + \mathbf{j}M_y + \mathbf{k}M_z$.

Wektor \mathbf{P} występujący po prawej stronie równania (4) jest określony jako

$$\mathbf{P} = \mathbf{G} + \mathbf{R}_E + \mathbf{R}_L = iR_x + \mathbf{j}(F + R_y) + \mathbf{k}(-mg + N + R_z). \quad (7)$$

Z przyrównania (6) i (7) wynika, że:

$$R_x = m\omega_0^2 l, \quad R_y = -F, \quad R_z = mg - N. \quad (8)$$

Dla określenia lewej strony równania (5) należy wyznaczyć kręt krążka (\mathbf{K}_O), a następnie jego pochodną względem czasu. Kręt krążka liczony względem środka ruchu kulistego (punktu O) można określić przez trzy składowe

$$\mathbf{K}_O = \mathbf{K}_{Ox} + \mathbf{K}_{Oy} + \mathbf{K}_{Oz} = \mathbf{i}K_x + \mathbf{j}K_y + \mathbf{k}K_z, \quad (9)$$

które – w przypadku ogólnym – wyznaczają się z zależności:

$$\begin{aligned} K_x &= J_x \omega_x - J_{xy} \omega_y - J_{xz} \omega_z, \\ K_y &= J_y \omega_y - J_{yz} \omega_z - J_{yx} \omega_x, \\ K_z &= J_z \omega_z - J_{zx} \omega_x - J_{zy} \omega_y. \end{aligned} \quad (10)$$

Dla osiowo-symetrycznego krążka momenty dewiacyjne są równe zero ($J_{xy} = J_{xz} = J_{yz} = \dots = 0$). Z zależności kinematycznych (3) wynika, że:

$$\omega_x = \omega_1 = \omega_0 \frac{l}{r}, \quad \omega_y = 0, \quad \omega_z = \omega_0. \quad (11)$$

Zatem kręt krążka określają wielkości:

$$K_x = J_x \omega_0 \frac{l}{r}, \quad K_y = 0, \quad K_z = J_z \omega_0. \quad (12)$$

Kręt krążka jest wektorem leżącym w płaszczyźnie Oxz (rys. 5a)), która obraca się z prędkością kątową ω_0 , wokół osi z . Pochodną wektora krętu można więc wyznaczyć z zależności

$$\frac{d\mathbf{K}_o}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{K}_o = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & \omega_0 \\ K_x & 0 & K_z \end{vmatrix} = \mathbf{i}0 + \mathbf{j}\omega_0 K_x + \mathbf{k}0 = \mathbf{j}J_x \omega_0^2 \frac{l}{r}. \quad (13)$$

Moment wszystkich sił zewnętrznych względem punktu O (\mathbf{M}_o) występujący w (5) jest równy

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{M}_L + \boldsymbol{\rho}_{OL} \times \mathbf{G} + \boldsymbol{\rho}_{OL} \times \mathbf{R}_L + \boldsymbol{\rho}_{OE} \times \mathbf{R}_E, \quad (14)$$

przy czym wektory $\boldsymbol{\rho}_{OL}$ i $\boldsymbol{\rho}_{OE}$ są równe odpowiednio:

$$\boldsymbol{\rho}_{OL} = -\mathbf{i}l + \mathbf{j}0 + \mathbf{k}0, \quad \boldsymbol{\rho}_{OE} = -\mathbf{i}l - \mathbf{j}f - \mathbf{k}r, \quad (15)$$

gdzie f jest miarą oporu toczenia krążka. Stąd

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_O &= \mathbf{i}M_x + \mathbf{j}M_y + \mathbf{k}M_z + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -mg \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -l & 0 & 0 \\ R_x & R_y & R_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -l & -f & -r \\ 0 & F & N \end{vmatrix} = \\ &= \mathbf{i}(M_x + Fr - Nf) + \mathbf{j}(M_y - mgl) + \mathbf{k}(M_z - R_y l - Fl). \end{aligned} \quad (16)$$

Po podstawieniu rezultatów z (8) mamy zatem

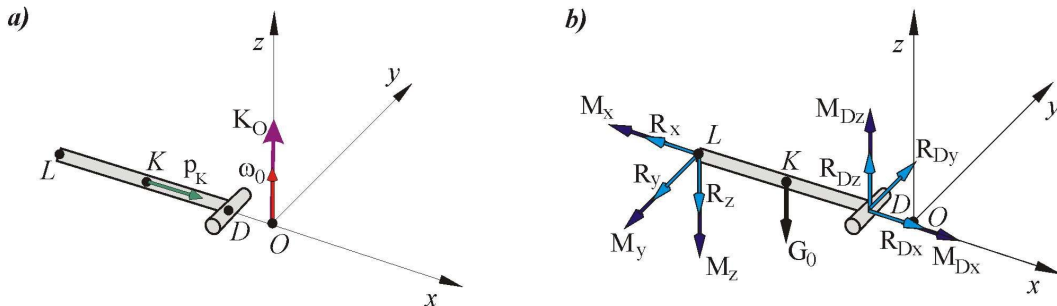
$$\mathbf{M}_O = \mathbf{i}(M_x + Fr - Nf) + \mathbf{j}M_y + \mathbf{k}M_z. \quad (17)$$

Porównując równania (17) i (13) otrzymuje się:

$$M_x + Fr - Nf = 0, \quad M_y = J_x \omega_0^2 \frac{l}{r}, \quad M_z = 0. \quad (18)$$

4.4 Równania dynamiki dla osi krążka

Na rys. 6 jest pokazany wektor krętu dla osi krążka oraz obciążenia działające na tę oś. Z uwagi na połączenie tulei z osią krążka przy użyciu przegubu walcowego (w punkcie D) na rysunku została pominięta składowa momentu M_{Dy} ($M_{Dy} = 0$).



Rysunek 6: Przyspieszenie środka masy (wektor \mathbf{p}_K) i kręt osi krążka (\mathbf{K}_O) oraz obciążenia działające na oś

Oś krążka porusza się jednostajnym ruchem obrotowym wokół osi z . Przyspieszenie środka osi krążka (punktu K) oraz kręt i jego pochodna są odpowiednio równe:

$$\mathbf{p}_K = i\omega_0^2 b + \mathbf{j}0 + \mathbf{k}0, \quad \mathbf{K}_O = i0 + \mathbf{j}0 + \mathbf{k}J_{z1}\omega_0, \quad \frac{d\mathbf{K}_O}{dt} = \mathbf{0}, \quad (19)$$

gdzie J_{z1} moment bezwładności osi krążka względem Oz , a b oznacza współrzędną środka masy pręta, przy czym

$$b = l - \frac{l-a}{2} = \frac{l+a}{2}. \quad (20)$$

Równania dynamiki dla osi krążka – otrzymane na podstawie równań (14.4 i 14.5) – mają postać:

$$m_0\omega_0^2 b = R_{Dx} - R_x, \quad (21)$$

$$0 = R_{Dy} - R_y, \quad (22)$$

$$0 = R_{Dz} - R_z - m_0g, \quad (23)$$

oraz

$$0 = M_{Dx} - M_x, \quad (24)$$

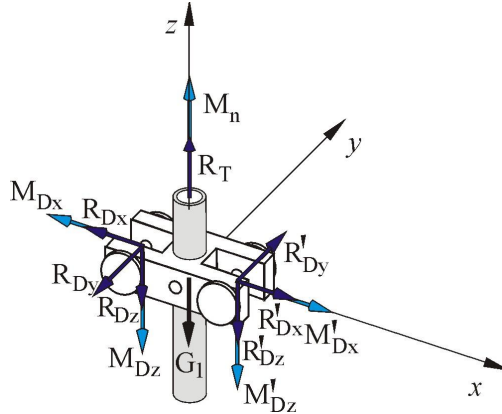
$$0 = -M_y + R_{Dz}a - R_zl - m_0gb, \quad (25)$$

$$0 = M_{Dz} - M_z - R_{Dy}a + R_yl. \quad (26)$$

gdzie m_0 oznacza masę osi krążka.

4.5 Równania dynamiki dla tulei napędzającej

Na rys. 7 są przedstawione obciążenia działające na tuleję napędzającą połączoną z oprawą łożysk. Pochodzą one od oddziaływania osi krążków (w punktach D i D') oraz układu napędowego (moment \mathbf{M}_n) i reakcji łożyska oporowego tulei \mathbf{R}_T . Ze względu na symetrię układu przyjmuje się, że reakcje po obu stronach osi (w punktach D i D') mają jednakowe wartości ($R_{Dx} = R'_{Dx}$, $R_{Dy} = R'_{Dy}$, $R_{Dz} = R'_{Dz}$, $M_{Dx} = M'_{Dx}$, $M_{Dz} = M'_{Dz}$). Ponadto, z uwagi na przegubowe połączenie tulei z osią krążka zostały pominięte składowe momentu M_{Dy} i M'_{Dy} ($M_{Dy} = 0$, $M'_{Dy} = 0$).



Rysunek 7: Obciążenia działające na układ: tuleja napędzająca – oprawa łożysk

Tuleja wraz z przymocowanymi do niej oprawami łożysk osi obraca się wokół pionowej osi z . Środek masy tulei jest nieruchomy (leży na osi obrotu). Równania dynamiki dla układu tuleja napędzająca – oprawa łożysk można napisać, podobnie jak dla poprzednich ciał, na podstawie równań (4) i (5). Przyspieszenie środka masy takiego układu jest równe zero ($\mathbf{p}_o = \mathbf{0}$). Występujący w równaniu (4) wektor \mathbf{P} ma w tym przypadku postać

$$\mathbf{P} = i0 + \mathbf{j}0 + \mathbf{k}(G_1 - 2R_{Dz} - R_T), \quad (27)$$

gdzie $G_1 = m_1g$ oznacza ciężar tulei wraz z przymocowanymi do niej oprawami łożysk. Stąd otrzymuje się równanie

$$0 = R_T - 2R_{Dz} - G_1. \quad (28)$$

Kręt układu tuleja napędzająca – oprawa łożysk może być przedstawiony w sposób podany wzorami (10). Z uwagi na symetrię tego układu i ruch, jakiego doznaje (ruch obrotowy wokół osi z) jego kręt jest wektorem o kierunku osi z . W ruchu ustalonym ze stałą prędkością ω_0 , ($\omega_0 = \text{const}$), kręt tego układu nie ulega zmianie, zatem

$$\frac{d\mathbf{K}_o}{dt} = \mathbf{0}. \quad (29)$$

Moment wszystkich sił zewnętrznych względem punktu O (\mathbf{M}_O) występujący w (5) jest, w tym przypadku, równy

$$\mathbf{M}_O = i0 + \mathbf{j}0 + \mathbf{k}(M_n - 2M_{Dz} - 2R_{Dy}a). \quad (30)$$

Z porównania (29) i (30) otrzymuje się równanie

$$0 = M_n - 2M_{Dz} - 2R_{Dy}a. \quad (31)$$

4.6 Rozwiązanie równań dynamiki

Wyprowadzone w poprzednich punktach równania dynamiki dla poszczególnych podukładów stanowią układ 14 równań (są to układy równań: (8), (18), (21)–(26) oraz równania (28) i (31)). Zawierają one 15 niewiadomych wielkości ($R_x, R_y, R_z, M_x, M_y, M_z, F, N, R_{Dx}, R_{Dy}, R_{Dz}, M_{Dx}, M_{Dz}, R_T, M_n$). Rozwiązanie układu równań będzie możliwe wtedy, gdy uzupełnimy go dodatkowym równaniem. Zakładając

$$M_x = -M_t, \quad (32)$$

to jest przyjmując, że znany jest moment pochodzący od sił tarcia w łożysku krążka (M_t) otrzymuje się 15 równań i 15 wielkości niewiadomych.

Po rozwiązaniu równań otrzymuje się siłę nacisku krążka na bieżnię (N)

$$N = \frac{l}{r(l-a)} J_x \omega_0^2 + \left(m + \frac{m_0}{2}\right) g, \quad (33)$$

a także wszystkie pozostałe niewiadome wielkości. Ze względu na dużą liczbę tych wielkości zostaną przedstawione jedynie niektóre z nich. I tak na przykład:

- siła tarcia pomiędzy krążkiem a bieżnią

$$F = \left[\frac{l}{r(l-a)} J_x \omega_0^2 + \left(m + \frac{m_0}{2}\right) g \right] \frac{f + M_t/r}{2}, \quad (34)$$

- moment napędzający układ krążków (moment obrotowy pochodzący od silnika pomniejszony o ewentualny opór łożyskowania tulei)

$$M_n = 2 \left[\frac{l}{r(l-a)} J_x \omega_0^2 + \left(m + \frac{m_0}{2}\right) g \right] \frac{f + M_t/r}{2} \cdot \frac{l}{r}. \quad (35)$$

Reakcja normalna N , określona wzorem (33), składa się z dwóch członów, reakcji statycznej

$$N_{\text{stat}} = mg + \frac{1}{2} m_0 g = G + \frac{G_0}{2},$$

pochodzącej od sił ciężkości i reakcji dynamicznej

$$N_{\text{dyn}} = \frac{l}{r(l-a)} J_x \omega_0^2,$$

wywołanej ruchem układu i o wartości proporcjonalnej do kwadratu prędkości kątowej precesji.

Jak wyjaśniono wcześniej, w doświadczeniu mierzone jest obciążenie dynamometru (siły R) wywołane reakcjami występującymi podczas ruchu modelu i dotyczy ono sumy bliźniaczych reakcji ($N = N_1$), występujących symetrycznie pod dwoma krążkami oraz ciężaru bieżni (siły G_2)

$$R = N + N_1 + G_2 = 2N + G_2. \quad (36)$$

Statyczne obciążenie dynamometru jest równe

$$R_{\text{stat}} = 2N_{\text{stat}} + G_2 = 2G + G_0 + G_2. \quad (37)$$

Wartość teoretyczna siły dynamicznej obciążającej dynamometr, zatem jest równa

$$R_{\text{teor}}^{\text{dyn}} = R - R_{\text{stat}} = 2N_{\text{dyn}} = 2 \frac{l}{r(l-a)} J_x \omega_0^2. \quad (38)$$

Jak wynika z zależności (34) i (35) wartości siły stycznej (F) i momentu napędzającego tuleję (M_n) są zależne od oporów w łożyskach krążków (M_t) oraz oporu toczenia (którego miarą jest f). Jedynie w układzie idealnym, w którym pomijamy opory ruchu (wtedy $M_t = 0$ i $f = 0$), zarówno moment napędzający jak i reakcja styczna podłoża są równe zero ($M_n = 0, F = 0$).

5 Przebieg pomiarów

Celem ukazania udziału reakcji dynamicznej w całkowitej reakcji w pierwszej kolejności dokonywany jest pomiar reakcji statycznej, a następnie pomiary reakcji dynamicznej dla kilku prędkości wirowania układu.

5.1 Wyznaczanie reakcji statycznej

Przy wyznaczaniu reakcji statycznej (obydwu krążków łącznie) należy wykonać następujące czynności:

1. Unieść nieznacznie jednocześnie obydwa krążki i wyzerować czujnik zegarowy (przez obrót tarczy ze skalą) opukując przy tym lekko stoisko dla skasowania luzów.
2. Opuścić delikatnie krążki na tarczę (uwaga na kierunek obrotu wskazówki czujnika zegarowego).
3. Odczytać wskazanie czujnika i zapisać ugięcie dynamometru w kolumnie 8 Tabeli ??.

5.2 Wyznaczanie reakcji dynamicznej

Należy dokonać pomiarów dla kilku prędkości precesji z zakresu 1–5 obr/s (dla obrotów narastających i malejących). Kolejność czynności jest następująca:

1. Ustalić wartości prędkości obrotowej, dla których będą dokonywane pomiary (podzielić równomiernie wspomniany wyżej zakres) i zapisać je w odpowiedniej kolumnie Tabeli ??.
2. Wyzerować czujnik zegarowy.
3. Sprawdzić czy pokrętło autotransformatora znajduje się w skrajnym lewym położeniu, a następnie włączyć zasilanie autotransformatora, zasilacza czujnika obrotów i częstotliwościomierza.
4. Dla skasowania luzów w układzie wprowadzić na chwilę model w ruch (rozpędzić do około 1 obr/s) – w tym celu należy obracać pokrętłem autotransformatora w prawo, a następnie zatrzymać układ i wyzerować czujnik zegarowy. *Uwaga: Zmniejszanie prędkości wirowania musi być dokonywane stopniowo, aby uniknąć uszkodzenia przekładni ślimakowej (ze względu na jej samohamowność).*
5. Obracając pokrętłem autotransformatora doprowadzić model do żądanej (zapisanej wcześniej w tabeli) prędkości wirowania. Należy obserwować przez chwilę wyświetlacz częstotliwościomierza celem upewnienia się, że układ obraca się już ze stałą prędkością (powtarzalne wskazania miernika).
6. Zanotować kierunek obrotów precesji (lewy, prawy).
7. Odczytać wskazanie czujnika zegarowego i zapisać ugięcie dynamometru w kolumnie 5a (pomiary przy zwiększaniu prędkości) albo 5b (pomiary przy zmniejszaniu prędkości) tabeli ??.
8. Czynności opisane w punktach: 5, 6 i 7 powtórzyć dla kolejnych prędkości precesji.

6 Opracowanie wyników i sprawozdanie

6.1 Obliczenia pomocnicze

Na podstawie uzyskanych pomiarów ugięcia dynamometru należy odczytać z diagramu zmierzone siły. Następnie obliczyć wartości teoretyczne reakcji oraz relacje względne wartości eksperymentalnych i teoretycznych. Do obliczeń przyjmowane są następujące dane liczbowe:

- promień zewnętrzny krążka $r = 56$ mm (odległość p. E styku krążka z podłożem od osi walca DL),
- odległości przegubu walcowego D od osi precesji $a = 37,5$ mm,
- odległość środka krążka L od osi precesji $l = 145$ mm,
- pomierzony moment bezwładności krążka $J_x = 4,35 \cdot 10^{-3}$ kg·m² względem osi obrotu własnego,

Różnica względna wyników pomiaru i obliczeń teoretycznych obliczana jest następująco:

$$\delta = \frac{R_{\text{pom}} - R_{\text{teor}}}{R_{\text{pom}}} \cdot 100\%. \quad (39)$$

Pytania sprawdzające

1. Wyjaśnić pochodzenie terminu „ruch kulisty ciała sztywnego”.
2. Kinematyka ruchu kulistego o precesji regularnej – osie ruchów składowych i rozkład wektora prędkości kątowej.
3. Kręt ciała sztywnego względem bieguna, przypadek ogólny i możliwe uproszczenia, uzasadnić wzory (12).
4. Twierdzenie o pochodnej względem czasu wektora krętu układu względem nieruchomego bieguna – interpretacja geometryczna i kinematyczna.

LABORATORIUM
MECHANIKI
TECHNICZNEJ

Ćwiczenie 14

WYZNACZENIE REAKCJI DYNAMICZNYCH W
RUCHU KULISTYM

Grupa: _____
Zespół: _____

data _____

Imię i nazwisko:

1. _____
2. _____
3. _____
4. _____
5. _____
6. _____

pomiar	prędkość precesji				reakcja dynamiczna				reakcja statyczna		różnica wzgl.
	częstotliwość		pr. obr.	pr. ką.	eksperyment		teoria				
	impulsy [-]		n_0 (śr.)	ω	ugięcie		siła	wz. (39)	ugięcie	siła	wz. (39)
i	impulsy [-]		n_0 (śr.)	ω	działki / mm		R_{pom}	R_{teor}	działki / mm	R_{stat}	δ
[-]	imp ↑	imp ↓	[obr/s]	[rad/s]	dz / mm ↑	dz / mm ↓	[N]	[N]	[-] / mm	[N]	[%]
1	9										
2	8										
3	7										
4	6										
5											

WNIOSKI: