

# WYZNACZANIE PRĘDKOŚCI PRECESJI ŻYROSKOPU – BADANIE MODELU STABILIZATORA ŻYROSKOPOWEGO

Mechanika Techniczna – Ćwiczenie 7 \*

## 1 Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest poznanie zjawisk zachodzących w układach wyposażonych w żyroskop. Przeprowadzane pomiary (stanowisko 7A) mają na celu doświadczalne potwierdzenie zależności pomiędzy momentem sił zewnętrznych działających na żyroskop, a jego prędkością kątową precesji. Natomiast obserwacje przeprowadzane na modelu stabilizatora okrętowego (stanowisko 7B) pozwalają zrozumieć zasadę jego działania.

## 2 Wprowadzenie

Żyroskopem nazywa się układ złożony z wirnika wykonującego ruch obrotowy wokół swojej osi z dużą szybkością oraz odpowiedniego układu zawieszenia. Zawieszenie ma umożliwić ruch kulisty wirnika, przy czym środek ruchu kulistego znajduje się na osi wirnika. Charakterystycznym zjawiskiem dla żyroskopów – z pozoru paradoksalnym – jest efekt żyroskopowy. Zaskakujący sens fizyczny efektu żyroskopowego polega na tym, że do obrócenia wirującego ciała wokół wybranej osi trzeba przyłożyć obciążenie, dla którego wektor momentu ma kierunek prostopadły do osi zamierzonego obrotu oraz do osi wirowania. Podstawowe cechy ruchu żyroskopów to:

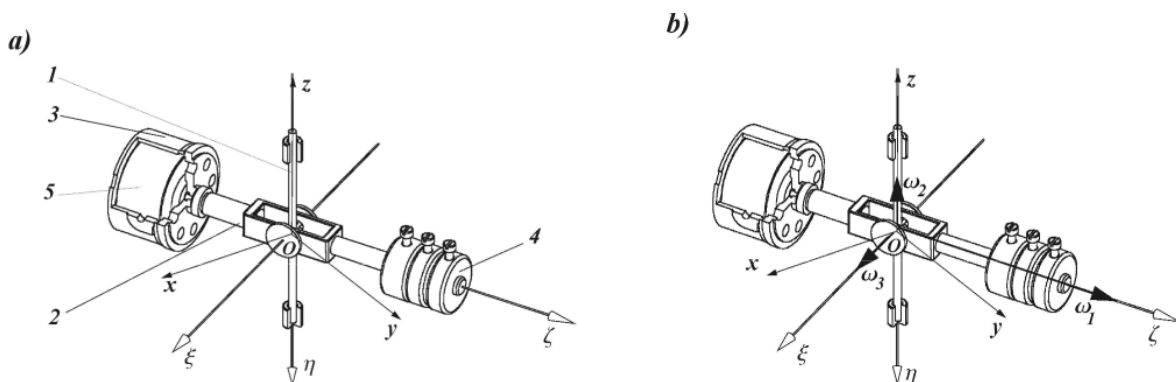
- precesja żyroskopu wywołana działaniem momentu pochodzącego od sił zewnętrznych czynnych,
- zdolność zachowania niezmienniej orientacji przestrzennej osi wirnika.

W zastosowaniach technicznych są używane żyroskopy o wirnikach wykonujących od 20 do 50 tysięcy obrotów na minutę. Występowanie względnie dużego momentu żyroskopowego jest wykorzystywane szeroko w wielu urządzeniach – na przykład żyrokompassy i stabilizatory okrętowe. Jednak nie zawsze istnienie tego momentu jest mile widziane i musi być on brany pod uwagę przy projektowaniu łożysk podpierających wirujące wały, na przykład wirnik silnika lotniczego.

W ćwiczeniu wykorzystywane są dwa stanowiska doświadczalne:

- układ żyroskopowy służący do badania wpływu momentu przyłożonych sił zewnętrznych na prędkość kątową precesji układu (stanowisko 7A),
- wahadło wyposażone w stabilizator żyroskopowy (stanowisko 7B).

## 3 Teoretyczny opis zjawiska



Rysunek 1: Oznaczenia elementów (a); układy współrzędnych: nieruchomy  $(Oxyz)$  i ruchomy  $(O\xi\eta\zeta)$  oraz wektory prędkości kątowych (b)

\* Autor – B. Mianowski, w: K. Januszkiewicz, J. Grabski: ĆWICZENIA LABORATORYJNE Z MECHANIKI, Łódź 2008

Rozpatrywany jest układ (rys. 1a) złożony z pionowej osi (1) i zamocowanym na niej pręcie (2), na którego jednym z końców jest osadzona obudowa silnika (3), a na drugim umieszczone są obciążniki (4). Pręt (2) jest połączony z pionową osią za pomocą łożysk, które umożliwiają obrót pręta wokół osi ( $\xi$ ) – poziomej i jednocześnie prostopadłej do osi ( $z$ ). Zasadniczym elementem układu jest wirnik (5) silnika.

Ruch układu odbywa się w taki sposób, że wirnik obraca się wokół osi  $O\xi$  (rys. 1b). Oś ta ma swobodę obrotu wokół pionowej osi  $Oz$ , jak również wokół poziomej osi  $O\xi$ .

Prędkość kątowna obrotu własnego  $\omega_1$  wirnika analizowanego modelu ma wartość o kilka rzędów większą od wartości prędkości kątowej  $\omega_2$ , z jaką cały układ wiruje wokół pionowej osi  $Oz$ . Analogiczna relacja zachodzi pomiędzy prędkością  $\omega_1$  a prędkością  $\omega_3$ , z jaką obudowa silnika może obracać się wokół poziomej osi  $O\xi$ .

Ruch wirnika jest ruchem złożonym z trzech ruchów obrotowych, zatem jego całkowita prędkość kątowa ( $\omega$ ) jest sumą wektorów prędkości składowych

$$\omega = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3. \quad (1)$$

Należy nadmienić, że dokładna analiza ruchu takiego ciała jest zagadnieniem skomplikowanym. W przybliżonej teorii zjawisk żyroskopowych, która w zadowalający sposób wyjaśnia szereg zjawisk charakterystycznych dla układów wyposażonych w żyroskopy, zakłada się, że całkowita prędkość kątowa wirnika  $\omega$  różni się nieznacznie od prędkości obrotu własnego wirnika  $\omega_1$ , to znaczy

$$\omega \cong \omega_1. \quad (2)$$

Kolejne założenie dotyczące modelu dotyczy wartości prędkości kątowej obrotu własnego – przyjmuje się

$$\omega_1 = \text{const}. \quad (3)$$

W analizie ruchu modelu żyroskopu wykorzystuje się<sup>1</sup> twierdzenie o pochodnej względem czasu wektora krętu  $\mathbf{K}_O$  (określonego względem nieruchomego bieguna  $O$ )

$$\frac{d\mathbf{K}_O}{dt} = \mathbf{M}_O. \quad (4)$$

Pochodną dowolnego wektora (na przykład  $\mathbf{a}(t)$ ), zmieniającego w czasie swoją długość (moduł) i kierunek, wyznacza się z zależności

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \frac{d'a}{dt} + \omega_a \times \mathbf{a}.$$

We powyższym wzorze pierwszy składnik  $\frac{d'a}{dt}$  jest pochodną lokalną, która określa szybkość zmiany długości wektora  $\mathbf{a}$ , natomiast drugi składnik ( $\omega_a \times \mathbf{a}$ ) wynika ze zmiany kierunku wektora  $\mathbf{a}$  – opisanej prędkością obrotu  $\omega_a$  tego wektora. W przypadku wektora  $\mathbf{a}(t)$ , którego długość nie ulega zmianie ( $a(t) = \text{const}$ ) pochodna lokalna jest równa zeru i powyższa zależność przyjmuje postać

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \omega_a \times \mathbf{a}, \quad \text{dla } a(t) = \text{const}.$$

Przy analizie ruchu modelu żyroskopu badanego na stanowisku doświadczalnym założono, że kręt całego układu tylko nieznacznie różni się od krętu samego wirnika żyroskopu. Ponadto przyjmuje się, że spełniony jest warunek (2). Oznacza to, że kręt analizowanego układu można określić na podstawie przybliżonego wzoru jako

$$\mathbf{K}_O = J_Z \omega_1, \quad K_O = J_Z \omega_1, \quad (5)$$

przy czym  $\omega_1$  [rad/s] oznacza wartość prędkości kątowej obrotu własnego, a  $J_Z$  [kg m<sup>2</sup>] jest głównym momentem bezwładności wirnika żyroskopu względem jego osi obrotu własnego ( $O\xi$ ). Przy tak przyjętych założeniach wektor krętu układu  $\mathbf{K}_O$  leży na osi  $O\xi$  i ma stałą wartość. Jego pochodna jest określona zależnością

$$\frac{d\mathbf{K}_O}{dt} = \omega_K \times \mathbf{K}_O, \quad \text{dla } K_O = \text{const}, \quad (6)$$

gdzie  $\omega_K$  oznacza prędkość kątową, z jaką obraca się wektor krętu układu.

W dalszej części rozważane są trzy przypadki:

- wyznaczanie położenia równowagi osi żyroskopu przy nieobracającym się wirniku (rys. 2),
- ruch układu pod działaniem momentu sił zewnętrznych o wektorze skierowanym wzdłuż osi  $Oz$  (rys. 3),
- ruch układu pod działaniem momentu sił zewnętrznych o kierunku osi  $O\xi$  (rys. 4).

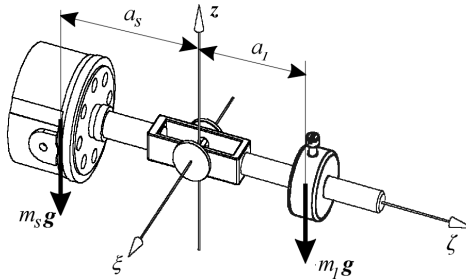
<sup>1</sup>Do tego celu mogą być również użyte równania Eulera.

### 3.1 Układ z nieruchomym wirnikiem – położenie równowagi

W badanym modelu istotne jest położenie równowagi układu w sytuacji, gdy wirnik nie obraca się wokół własnej osi. Położenie równowagi przy poziomym kierunku osi własnej wirnika (rys. 2) uzyskuje się wtedy, gdy suma momentów sił ciężkości względem osi  $O\xi$  jest równa zero

$$\sum M_{\xi}: m_s g a_s - m_l g a_l = 0. \quad (7)$$

Użyte zostały następujące oznaczenia:  $m_s$  – masa silnika (wraz z masą pręta, na którym jest on osadzony),  $a_s$  – odległość środka masy silnika (wraz z prętem) od punktu  $O$ ,  $m_l$  – masa obciążnika (tulei zakładanej na część pręta znajdującą się po przeciwnej stronie silnika),  $a_l$  – odległość środka masy obciążnika od punktu  $O$ ,  $g$  – przyspieszenie ziemskie.



Rysunek 2: Poziome położenie równowagi pręta

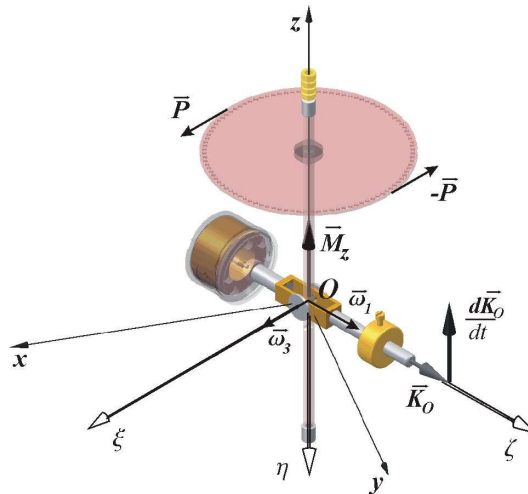
Wprowadzając oznaczenie  $M_s = m_s g a_s$ , łatwo stwierdzić, że w położeniu równowagi

$$M_s = m_l g a_l. \quad (8)$$

Położenie ( $a_l$ ) obciążnika o masie  $m_l$ , które zapewnia poziome położenie równowagi układu (przy nieruchomym wirniku) jest wyznaczane doświadczalnie.

### 3.2 Zjawiska zachodzące w żyroskopie pod działaniem momentu zewnętrznego względem osi pionowej ( $Oz$ )

Rozważa się przypadek, gdy wirnik kręci się wokół poziomej osi i przyłoży się do układu parę sił  $\bar{P}$ ,  $-\bar{P}$ , rys. 3.



Rysunek 3: Moment zewnętrzny ( $M_z$ ) działający na żyroskop oraz wektory: prędkości kątowych, krętu i jego pochodnej

Wektor momentu pary jest skierowany wzdłuż osi  $Oz$ , to znaczy  $M_O = kM_z$  i wektor krętu  $K_O$ , zgodnie z prawem (4), musi doznać przyrostu. Otrzymuje się zatem następującą zależność

$$\frac{dK_O}{dt} = kM_z. \quad (9)$$

Kierunek i zwrot wektora momentu  $M_O = kM_z$  określa kierunek i zwrot wektora przyrostu krętu. Oznacza to, że przyrost (i pochodna) wektora krętu będzie wektorem o kierunku i zwrocie wersora  $k$  osi  $z$ . Wynika stąd, że pojawi się prędkość kątowa wokół osi  $O\xi$ ,  $\omega_\xi = \omega_3$ . Ruch żyroskopu wokół osi  $O\xi$  jest nazywany **nutacją**, a prędkość z jaką się on odbywa – **prędkością nutacji**  $\omega_\xi$ .

Pochodna wektora krętu jest określona zależnością (6), w której w miejsce  $\omega_K$  należy wstawić  $\omega_3$ , to znaczy

$$\frac{d\mathbf{K}_O}{dt} = \omega_3 \times \mathbf{K}_O = \omega_3 \times J_Z \omega_1 = J_Z \omega_3 \times \omega_1. \quad (10)$$

Porównując wartość pochodnej krętu z wartością momentu sił zewnętrznych otrzymuje się równanie

$$J_Z \omega_3 \omega_1 \sin \frac{\pi}{2} = M_z \quad (11)$$

na podstawie którego wartość liczbową prędkości kątowej nutacji wyniesie

$$\omega_3 = \frac{M_z}{J_Z \omega_1}. \quad (12)$$

Jeśli równanie (4) zostanie przedstawione w formie

$$\mathbf{M}_O - \frac{d\mathbf{K}_O}{dt} = 0 \quad (13)$$

i zastosuje się oznaczenie  $\mathbf{M}_g = -\frac{d\mathbf{K}_O}{dt}$ , to będzie można powiedzieć, że wprowadzony w ten sposób moment żyroskopowy  $\mathbf{M}_g$  jest miarą bezwładności układu, a równanie przybiera formę  $\mathbf{M}_O + \mathbf{M}_g = 0$ . Ma on formę

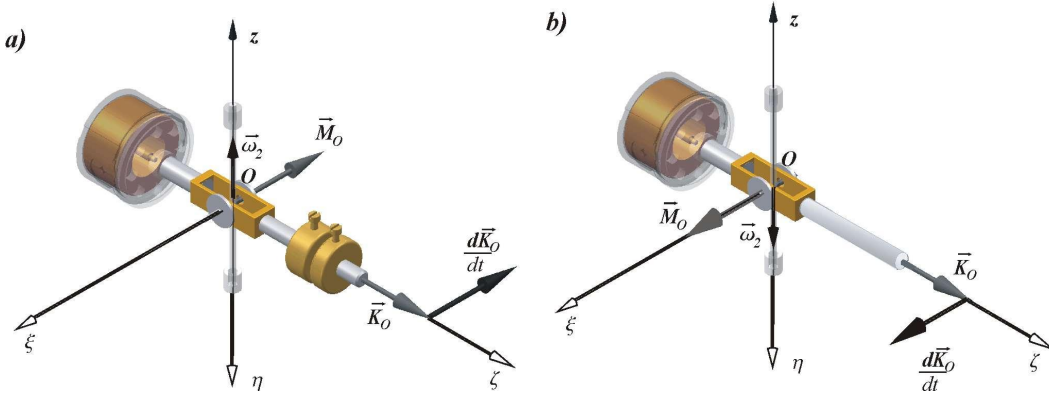
$$\mathbf{M}_g = -\frac{d\mathbf{K}_O}{dt} = -J_Z \omega_3 \times \omega_1 = J_Z \omega_1 \times \omega_3. \quad (14)$$

Opór, jaki stawia układ przy próbie obrotu wokół osi  $Oz$  wyjaśnia występowanie momentu żyroskopowego.

### 3.3 Zjawiska zachodzące w modelu pod działaniem momentu zewnętrznego względem osi poziomej $O\xi$

Przez założenie dodatkowego przeciwcieżaru (rys. 4a) – albo zdjęcie wszystkich przeciwcieżarów (rys. 4b) – powstaje niezrównoważony moment sił zewnętrznych względem osi  $O\xi$ . Oznacza to, że w takim przypadku na układ działa moment  $M_O$  (wywołany siłami ciężkości) o kierunku osi  $O\xi$  i wartości

$$M_O = \left| M_s - \sum_i m_i g a_i \right|. \quad (15)$$



Rysunek 4: Schemat obliczeniowy przy obciążeniu momentem względem osi  $\xi$

Szybkość zmian wektora krętu, zgodnie z zależnością (4) musi być równa momentowi  $M_O$ , to znaczy, że wektor  $\frac{d\mathbf{K}_O}{dt}$  będzie miał ten sam kierunek i zwrot, co  $M_O$  (w tym przypadku zgodny z osią  $O\xi$ ). Wektor krętu  $\mathbf{K}_O$  może doznać przyrostu jedynie w wyniku obrotu całego układu dokoła pionowej osi  $Oz$ . Prędkość kątowa  $\omega_2$  tego obrotu jest nazywana prędkością precesji.

Pochodna wektora krętu może być wyznaczona z zależności (6), po wstawieniu  $\omega_2$  w miejsce wektora  $\omega_K$

$$\frac{d\mathbf{K}_O}{dt} = \omega_2 \times \mathbf{K}_O = \omega_2 \times J_Z \omega_1 = J_Z \omega_2 \times \omega_1. \quad (16)$$

Przez porównanie wartości tej pochodnej z momentem  $M_O$  otrzymuje się zależność

$$\omega_2 = \frac{M_O}{J_1 \omega_1}. \quad (17)$$

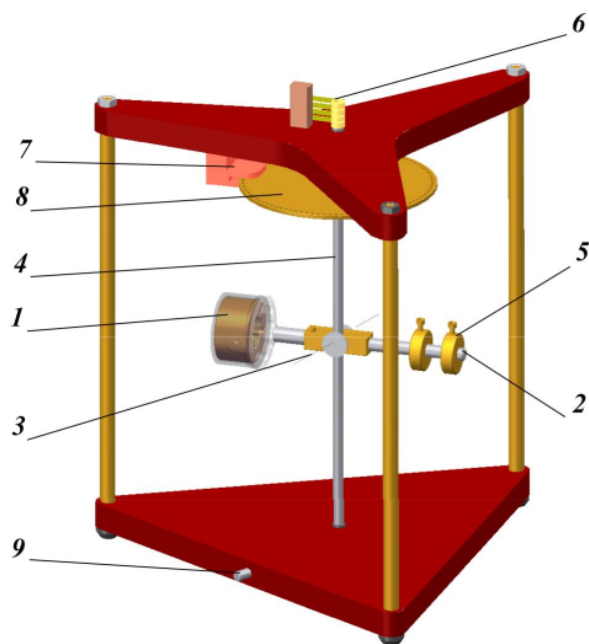
Moment żyroskopowy ( $M_g$ ) w tym przypadku jest równy

$$\mathbf{M}_g = -\frac{d\mathbf{K}_O}{dt} = -J_1 \omega_2 \times \omega_1 = J_1 \omega_1 \times \omega_2. \quad (18)$$

## 4 Opis stanowisk badawczych

### 4.1 Stanowiska do pomiaru prędkości kątowej precesji żyroskopu 7A

Na rys. 5 przedstawiony jest widok stanowiska z układem żyroskopowym o trzech stopniach swobody.



Rysunek 5: Elementy stanowiska pomiarowego 7A

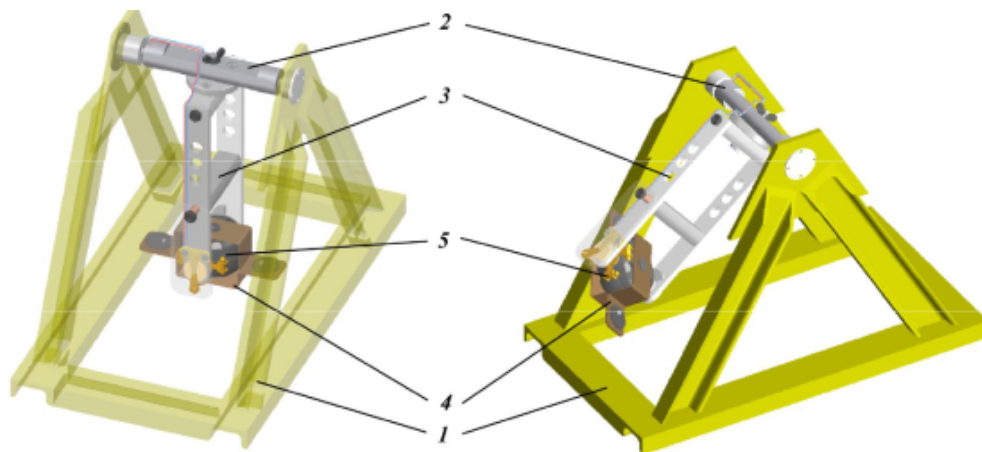
Silnik żyroskopowy (1), którego wirnik wykonuje ok. 26 tysięcy obrotów na minutę (ponad 400 obr/s) jest sztywno związany z prętem (2), będącym przedłużeniem osi własnej wirnika. Pręt ten może obracać się wokół osi poziomej (3) i pionowej osi (4) – umieszczonej w łożyskach ostoi.

Statyczne zrównoważenie układu (poziome położenie pręta (2) przy nieruchomym wirniku) umożliwiają przesuwne przeciwcieżary (5). Silnik jest zasilany z przetwornicy napięcia przez szczotki i pierścienie (6). Przetwornica zasila silnik żyroskopu prądem trójfazowym o napięciu 36 V i częstotliwości około 400 Hz.

Do pomiaru wartości prędkości kątowej precesji ( $\omega_2$ ) – to znaczy obrotu wokół osi pionowej (4) – został zastosowany czujnik optyczny (7) i tarcza (8) o 100 otworach na obwodzie. Pomiar wartości prędkości kątowej obrotów własnych ( $\omega_1$ ) wirnika żyroskopu odbywa się w ten sposób, że po wyłączeniu zasilania silnika – przycisk (9) **ZWOLNIONY** – pracuje on jako prądnica. Zmiany napięcia prądu generowanego przez prądnice są zliczane przez miernik. Ponieważ stojan silnika jest dwubiegunowy, to miernik rejestruje jeden impuls na jeden obrót wirnika. Do pomiaru prędkości kątowej precesji i obrotu własnego służy ten sam miernik (licznik uniwersalny).

### 4.2 Model stabilizatora żyroskopowego – opis stanowiska 7B

Rozpatrywany układ (rys. 6) jest wahadłem wyposażonym w stabilizator żyroskopowy.



Rysunek 6: Wahadło stabilizowane żyroskopem – widok stanowiska badawczego 7B

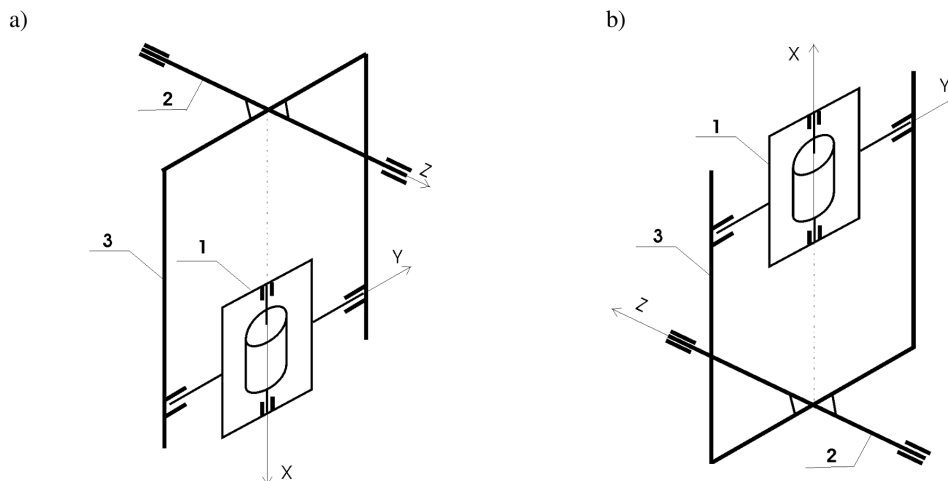
W ramie (1) są osadzone łożyska wałka (2). Do wałka jest przymocowana ramka (3) – nazywana ramką zewnętrzną. W ramce zewnętrznej jest umieszczona ramka wewnętrzna (4) z osadzonym w niej silnikiem „żyro-

skopowym” (5). Ramka wewnętrzna wraz z osią własną silnika (wirnika) może zmieniać położenie o około  $\pm 90^\circ$  względem ramki zewnętrznej. Zasilanie silnika jest takie samo, jak w stoisku 7A.

W sytuacji, gdy wirnik nie obraca się wokół własnej osi, zachowanie układu (to jest położenia równowagi, ruch) jest takie jak zwykłego wahadła fizycznego. Jeśli wirnik obraca się ze znaczną szybkością wokół własnej osi, to ruch ten działa stabilizująco na wahadło (na przykład umożliwia ustawienie go w niestatecznym górnym położeniu równowagi).

## 5 Sposób przeprowadzenia eksperymentów

W pierwszej kolejności dokonywane są pomiary prędkości kątowej precesji na stanowisku 7A. Następnie badane jest zachowanie się stabilizatora żyroskopowego na stanowisku 7B. Wyniki pomiarów i obliczeń rejestrowane są w tabeli 1 i na rysunku 7.



Rysunek 7: Schemat stabilizatora żyroskopowego

### 5.1 Pomiary prędkości kątowej precesji

1. Zrównoważyć oś wirnika (rys. 2) w jej położeniu poziomym za pomocą przeciwważaru. Zmierzyć odległość środka przeciwważaru od osi pionowej obrotu ( $a_i$ ) i zanotować ją oraz masę przeciwważaru ( $m_i$ ) – podana jest na obciążnikach – w tabeli 1.
2. Sprawdzić, czy częstotściomierz ma ustawioną podstawę czasu 1 s.
3. Włączyć prostownik, ustawić przełącznik zasilania stoiska 7A, włączyć silnik, przycisk (9) **WCIŚNIĘTY**.
4. Odczekać około 2 min., aby żyroskop osiągnął obroty nominalne i ustawić pręt z umocowanym do niego silnikiem poziomo. Przyłożyć palce do obrzeża brązowej tarczy i próbować obracać ją w jedną i drugą stronę (starać się obracać przez wywarcie nacisku, ale bez wywołania widocznego obrotu). Zaobserwować kierunek wychylania się pręta (osi wirnika) w zależności od kierunku działania momentu.
5. Utrzymując pręt z silnikiem (oś  $O\zeta$ ) poziomo założyć na pręt dodatkowy ciężarek (lub przesunąć w stronę końca pręta ten ciężarek, który już był założony), jak to pokazują schematy w tabeli 1.
6. Zmierzyć odległość  $a_i$ ; zanotować zmierzoną wartość jak i odczytaną masę  $m_i$  w tabeli 1.
7. Ustawić pręt poziomo, pozostawić układ samemu sobie i obserwować jego ruch.
8. Odczytać wskazanie miernika prędkości kątowej precesji  $\omega_2$  i zapisać je w tabeli 1. Narysować na odpowiednich schematach umieszczonych w tabeli 1 wektory: momentu  $M_0$ , prędkości kątowych  $\omega_1$  i  $\omega_2$ .  
Uwaga: W czasie pomiaru oś wirnika powinna pozostawać w położeniu bliskim poziomemu. Prędkość kątową precesji mierzyć przy nastawie podstawy czasu 10 s (uzyskuje się wtedy większą dokładność).
9. Wykonać pomiar prędkości obrotowej wirnika żyroskopu  $\omega_1$ . W tym celu należy **ZWOLNIĆ** na chwilę przycisk (9); zapisać wskazanie miernika w tabeli 1.  
Uwaga: W czasie pomiaru oś wirnika powinna pozostawać w położeniu bliskim poziomemu. Prędkość obrotu wirnika mierzyć przy nastawie podstawy czasu 1 s. Włączenie pomiaru prędkości wirnika powoduje wyłączenie zasilanie silnika, a więc jego obroty maleją w czasie pomiaru. Zatem najwyższy odczyt (zwykle pierwszy) uznajemy za najdokładniejszy.
10. Przyciskiem (9) włączyć ponownie zasilanie silnika i przestawić podstawę czasu licznika na 10 s.

11. Powtórzyć pomiary (punkty 5–10) dla różnych wartości momentu  $M_O$ , wg schematów z tabeli 1.
12. Wyłączyć zasilanie przetwornicy i miernik prędkości.

## 5.2 Badanie modelu stabilizatora żyroskopowego

1. Przy nieruchomym wirniku silnika wprowadzić w ruch wahadłowy ramkę zewnętrzną i wewnętrzną w celu sprawdzenia, że opory łożysk i komutatorów są minimalne.
2. Zatrzymać wahadło w położeniu równowagi trwałej (patrz rys. 6 – po lewej).
3. Włączyć zasilanie przetwornicy, ustawić przełącznik na zasilanie stoiska 7B i odczekać ok. 2 minut.
4. Ustawić oś wirnika pionowo, wykonać łagodne próby obrócenia ramki zewnętrznej w jedną i drugą stronę. Obserwować ruchy obu ramek. Zwrócić uwagę na wielkość oporu, jaki stawia ramka zewnętrzna przy próbie jej poruszenia. Zanotować kierunek momentu przyłożonego do ramki zewnętrznej i kierunek powstałej precesji ramki wewnętrznej (obudowa silnika).
5. Przeszawić łagodnie wahadło w górne położenie pionowe (tzn. w położenie równowagi nietrwałej zwykłego wahadła); ustawić oś wirnika żyroskopu pionowo.
6. Wykonać próby odchylenia wahadła od pionu w obu kierunkach. Zwrócić uwagę na wielkość oporu, jaki stawia ramka zewnętrzna przy próbie jej poruszenia.
7. Wykonać próby odchylenia ramki wewnętrznej (obudowy silnika) od pionu w obu kierunkach. Zanotować kierunek powstałego obrotu ramki zewnętrznej (wahadła); nanieść to na schemacie układu (rys. 7b).
8. Opuścić wahadło, wyłączyć prostownik oraz uporządkować stoisko.

## 6 Opracowanie wyników pomiarów i sprawozdanie

Po zakończeniu pomiarów i obserwacji należy przystąpić do wykonania obliczeń niezbędnych do wypełnienia pozostałych rubryk tabeli 1. Przy obliczaniu momentu zewnętrznego należy przyjąć  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ . Natomiast w obliczeniach momentu żyroskopowego przyjąć wartość moment bezwładności wirnika  $J_Z = 0.816 \cdot 10^{-4} \text{ kg m}^2$ .

### Pytania kontrolne

1. Co to jest żyroskop?
2. Co to jest efekt żyroskopowy?
3. Na czym polega uproszczenie przyjmowane w *przybliżonej teorii żyroskopu*?
4. Przytoczyć sformułowanie twierdzenia o pochodnej krętu.
5. Podać kilka przykładów korzystnego i niekorzystnego działania efektu żyroskopowego.



**LABORATORIUM  
MECHANIKI  
TECHNICZNEJ**

**Ćwiczenie 7**

**WYZNACZANIE PRĘDKOŚCI KĄTOWEJ PRECESJI  
ŻYROSKOPU – BADANIE MODELU STABILIZATORA  
ŻYROSKOPOWEGO**

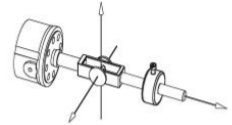
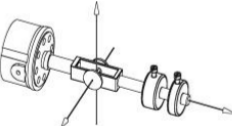
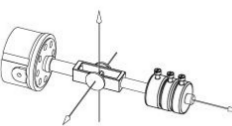
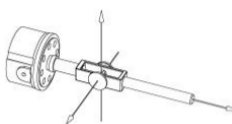
Grupa: \_\_\_\_\_  
Zespół: \_\_\_\_\_

data \_\_\_\_\_

Imię i nazwisko:

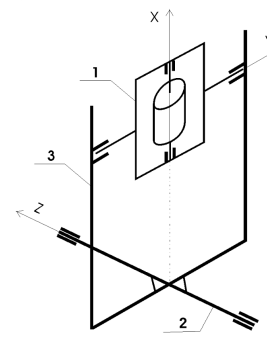
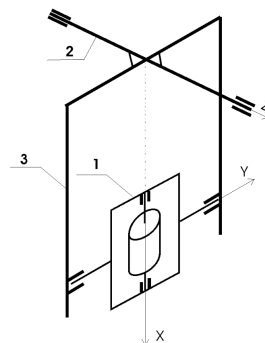
1. \_\_\_\_\_
2. \_\_\_\_\_
3. \_\_\_\_\_
4. \_\_\_\_\_
5. \_\_\_\_\_
6. \_\_\_\_\_

Tabela 1: Wyniki pomiarów i obliczeń

nr	Warianty obciążenia Wektory momentu sił zewnętrznych Wektory obu prędkości kątowych	masa obc.	odl. od osi pion.	mom. sił ciężk. obc.	mom. zewn.	prędk. precesji		prędk. wirowania		mom. żyroskopowy
		$m_1$	$a_1$	$M_i = gm_i a_i$	$M_O$	$n_2$	$\omega_2 = \frac{2\pi n_2}{100}$	$n_1$	$\omega_1 = 2\pi n_1$	$M_g = J_Z \omega_1 \omega_2$
		kg	mm	Nm	Nm	imp/s	rad/s	obr/s	rad/s	Nm
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1		$m_1 =$ 0.347	$a_1 =$	$M_1 =$	0.0					
2		$m_2 =$	$a_2 =$	$M_2 =$	$M_2 =$					
3		$m_2 =$ $m_3 =$	$a_3 =$ $a_3 =$	$M_2 =$ $M_3 =$	$M_2 + M_3 =$					
4					$M_1 =$					

a)

b)



$$g = 9.81 \text{ m/s}^2$$

$$J_Z = 0.816 \cdot 10^{-4} \text{ kg m}^2$$