

DRGANIA SWOBODNE UKŁADU O DWÓCH STOPNIACH SWOBODY

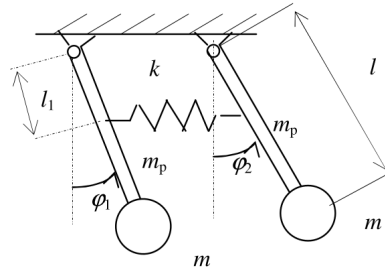
Drgania i Dynamika Maszyn – Ćwiczenie 7*

1 Cel ćwiczenia

Eksperymentalne wyznaczenie częstości drgań własnych oraz odpowiadających im postaci drgań układu dwóch wahadeł. Analiza i obserwacja postaci drgań odpowiadających tym częstościom oraz zjawiska dudnienia.

2 Wstęp teoretyczny

Badany układ został przedstawiony na Rys. 1. Dwa identyczne wahadła fizyczne połączone są sprężyną o współczynniku sztywności k . Na końcu każdego wahadła o długości l znajduje się masa m , która jest równa masie pręta m_p . Dla uproszczenia, masy m są traktowane jako punkty materialne znajdujące się w odległości l od osi obrotu. Sprężyna jest zamocowana w odległości $l_1 = 0.5l$.



Rysunek 1: Model układu

Do wyprowadzenia modelu matematycznego układu dwóch wahadeł zastosowano drugą zasadę dynamiki Newtona dla ruchu obrotowego:

$$B\ddot{\varphi} = \sum_i M_i, \quad (1)$$

gdzie:

- B – masowy moment bezwładności wahadła,
- φ_1, φ_2 – kąty obrotu wahadeł,
- M – moment sił zewnętrznych działających na wahadła.

Masowy moment bezwładności względem osi obrotu każdego wahadła wyraża się następującą zależnością ($m \approx m_p$):

$$B = \frac{m_p l^2}{3} + ml^2 = \frac{ml^2}{3} + ml^2 = \frac{4}{3}ml^2. \quad (2)$$

Korzystając z równań (1) i (2), możemy wyprowadzić równania ruchu badanego układu w następującej postaci:

$$\begin{aligned} \frac{4}{3}ml^2\ddot{\varphi}_1 &= -\left(mg\frac{l}{2} + mgl\right)\varphi_1 - k\left(\frac{l}{2}\right)^2\varphi_1 + k\left(\frac{l}{2}\right)^2\varphi_2 \\ \frac{4}{3}ml^2\ddot{\varphi}_2 &= -\left(mg\frac{l}{2} + mgl\right)\varphi_2 - k\left(\frac{l}{2}\right)^2\varphi_2 + k\left(\frac{l}{2}\right)^2\varphi_1 \end{aligned} \quad (3)$$

Układ sprzężonych równań różniczkowych (3) stanowi zlinearyzowaną formę modelu matematycznego układu dwóch wahadeł. Po przekształceniach matematycznych model ten przyjmuje postać:

$$\begin{aligned} \frac{4}{3}ml^2\ddot{\varphi}_1 + \left(\frac{3}{2}mgl + \frac{kl^2}{4}\right)\varphi_1 - \frac{kl^2}{4}\varphi_2 &= 0, \\ \frac{4}{3}ml^2\ddot{\varphi}_2 + \left(\frac{3}{2}mgl + \frac{kl^2}{4}\right)\varphi_2 - \frac{kl^2}{4}\varphi_1 &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

* Autor: J. Wawrzecki, w: LABORATORIUM DRGAŃ MECHANICZNYCH, K. Marynowski (red), Łódź 2002

Wprowadzając warunki początkowe dostarcza się porcję energii do układu w celu wywołania jego drgań swobodnych. Rozwiązań szczególnych powyższego jednorodnego układu równań **różniczkowych** poszukuje się wtedy w postaci:

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= A_1 \sin(\omega_n t + \delta) \\ \varphi_2 &= A_2 \sin(\omega_n t + \delta),\end{aligned}\tag{5}$$

gdzie:

ω_n – nieznaną (jeszcze) częstość drgań własnych,
 A_1, A_2 – amplitudy wyznaczone z warunków początkowych,
 δ – faza wyznaczana także z warunków początkowych.

Aby wyznaczyć częstości drgań własnych układu, podstawiamy rozwiązania (5) do równań (4). W rezultacie otrzymujemy jednorodny układ równań **algebraicznych** względem nieznanych amplitud A_1 i A_2 w następującej postaci:

$$\begin{aligned}(-b_{11}\omega_n^2 + k_{11})A_1 + k_{12}A_2 &= 0, \\ k_{21}A_1 + (-b_{22}\omega_n^2 + k_{22})A_2 &= 0,\end{aligned}\tag{6}$$

gdzie:

$$b_{11} = b_{22} = \frac{4}{3}ml^2; \quad k_{12} = k_{21} = -\frac{kl^2}{4}; \quad k_{11} = k_{22} = \frac{3}{2}mgl + \frac{kl^2}{4}.$$

Rozwiązania niezerowe układu (6) istnieją, gdy główny wyznacznik jest równy zero. Zatem:

$$\begin{vmatrix} -b_{11}\omega_n^2 + k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & -b_{22}\omega_n^2 + k_{22} \end{vmatrix} = 0.\tag{7}$$

Na podstawie równania (7) otrzymujemy **równanie częstości** w postaci:

$$\omega_n^4 - \frac{b_{11}k_{22} + b_{22}k_{11}}{b_{11}b_{22}}\omega_n^2 + \frac{k_{11}k_{22} - k_{12}k_{21}}{b_{11}b_{22}} = 0.\tag{8}$$

Rozwiązania równania (8) określają dwie **częstości własne** rozważanego układu równań:

$$\begin{aligned}\omega_1^2 &= \frac{9}{8} \frac{g}{l} \\ \omega_2^2 &= \frac{9}{8} \frac{g}{l} + \frac{3}{8} \frac{k}{m}\end{aligned}\tag{9}$$

Z takimi dwiema częstościami drgań własnych ω_1 i ω_2 masy wykonują ruch harmoniczny. Tym samym istnieją **dwie główne postacie** ruchu, odpowiadające tym częstościom układu. Podstawiając ω_1 do (6), otrzymujemy:

$$\begin{aligned}(-b_{11}\omega_1^2 + k_{11})A_{11} + k_{12}A_{21} &= 0, \\ k_{21}A_{11} + (-b_{22}\omega_1^2 + k_{22})A_{21} &= 0,\end{aligned}\tag{10}$$

gdzie:

A_{11} – amplituda pierwszego wahadła odpowiadająca pierwszej postaci drgań własnych,
 A_{21} – amplituda drugiego wahadła odpowiadająca pierwszej postaci drgań własnych.

Równania (10) są liniowo zależne, co wynika z zerowania się ich wyznacznika głównego. Na podstawie dowolnego z równań układu (10) można wyznaczyć stosunek amplitud $v_1 = A_{21}/A_{11} = 1$. Oznacza to, że oba wahadła poruszają się razem w tym samym kierunku z tym samym wychyleniem. W procesie tym sprężyna sprzęgająca nie pracuje – nie jest ani rozciągana, ani ściskana.

W analogiczny sposób dla częstości własnej ω_2 otrzymuje się stosunek amplitud $v_2 = A_{22}/A_{12} = -1$. Tym razem oba wahadła mają te same amplitudy, lecz znajdują się w przeciwnych fazach. Ruch ten jest symetryczny, a środkowy punkt sprężyny sprzęgającej nie przemieszcza się. Otrzymane w ten sposób stosunki nazywamy **współczynnikami głównych postaci drgań**.

Ogólne rozwiązanie równań ruchu (4) otrzymuje się z superpozycji rozwiązań harmonicznymi (5). Uwzględniając obie postacie drgań, otrzymujemy:

$$\begin{aligned}\varphi_1(t) &= A_{11} \sin(\omega_1 t + \delta_1) + A_{12} \sin(\omega_2 t + \delta_2) \\ \varphi_2(t) &= A_{11}v_1 \sin(\omega_1 t + \delta_1) + A_{12}v_2 \sin(\omega_2 t + \delta_2).\end{aligned}\tag{11}$$

Po uwzględnieniu wartości v_1 i v_2 , rozwiązania (11) można zapisać w następującej formie:

$$\begin{aligned}\varphi_1(t) &= A_{11} \sin(\omega_1 t + \delta_1) + A_{12} \sin(\omega_2 t + \delta_2) \\ \varphi_2(t) &= A_{11} \sin(\omega_1 t + \delta_1) - A_{12} \sin(\omega_2 t + \delta_2)\end{aligned}\tag{12}$$

gdzie: $A_{11}, A_{12}, \delta_1, \delta_2$ – wielkości, które można wyznaczyć z warunków początkowych.

Powstaje pytanie: Jakie warunki początkowe należy zadać, aby zaobserwować główne postacie drgań? Przyjmijmy następujące oznaczenia:

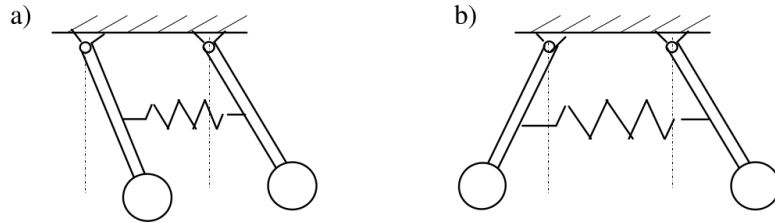
$$\varphi_{10} = \varphi_1(t=0); \quad \varphi_{20} = \varphi_2(t=0); \quad \omega_{10} = \left. \frac{d\varphi_1}{dt} \right|_{t=0}; \quad \omega_{20} = \left. \frac{d\varphi_2}{dt} \right|_{t=0}. \quad (13)$$

Podstawiając zależności (13) do równań (12), otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \varphi_{10} &= A_{11} \sin \delta_1 + A_{12} \sin \delta_2, \\ \varphi_{20} &= A_{11} \sin \delta_1 - A_{12} \sin \delta_2, \\ \omega_{10} &= A_{11} \omega_1 \cos \delta_1 + A_{12} \omega_2 \cos \delta_2, \\ \omega_{20} &= A_{11} \omega_1 \cos \delta_1 - A_{12} \omega_2 \cos \delta_2. \end{aligned} \quad (14)$$

Jeśli chcemy zaobserwować pierwszą główną postać drgań, powinniśmy założyć $A_{12} = 0$. Wtedy $\varphi_{10} - \varphi_{20} = 0$, $\varphi_{10}/\varphi_{20} = 1 = v_1$, a początkowe wychylenia wahadeł są proporcjonalne do pierwszej postaci drgań. Analogicznie, $\omega_{10} - \omega_{20} = 0$ oraz $\omega_{10} = \omega_{20}$ (w szczególności można przyjąć $\omega_{10} = \omega_{20} = 0$).

Oznacza to, że drgania własne dla pierwszej postaci można zaobserwować po wprowadzeniu warunku początkowego $\varphi_{10} = \varphi_{20}$. Wtedy oba wahadła są wychylone o ten sam kąt w tym samym kierunku. Analogicznie można wykazać, że drgania własne dla drugiej postaci można zaobserwować po wprowadzeniu warunku początkowego $\varphi_{10} = -\varphi_{20}$. Główne postacie drgań wahadeł zostały przedstawione na Rys. 2.



Rysunek 2: Główne postacie drgań: a) pierwsza postać, b) druga postać

3 Zjawisko dudnienia

Interesujący przypadek można zaobserwować, gdy warunki początkowe mają postać: $\varphi_{10} = \varphi_0$ oraz $\varphi_{20} = 0, \omega_{10} = \omega_{20} = 0$. Na podstawie równań (14) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= A_{11} \sin \delta_1 + A_{12} \sin \delta_2, \\ 0 &= A_{11} \sin \delta_1 - A_{12} \sin \delta_2, \\ 0 &= A_{11} \omega_1 \cos \delta_1 + A_{12} \omega_2 \cos \delta_2, \\ 0 &= A_{11} \omega_1 \cos \delta_1 - A_{12} \omega_2 \cos \delta_2. \end{aligned} \quad (15)$$

Z dwóch pierwszych zależności układu (15) otrzymuje się:

$$\varphi_{10} = 2A_{11} \sin \delta_1 \quad (16)$$

Z trzeciego i czwartego równania układu (15) otrzymuje się $\delta_1 = \delta_2 = \pi/2$. Uwzględniając powyższe zależności, uzyskujemy:

$$A_{11} = A_{12} = \frac{1}{2} \varphi_0. \quad (17)$$

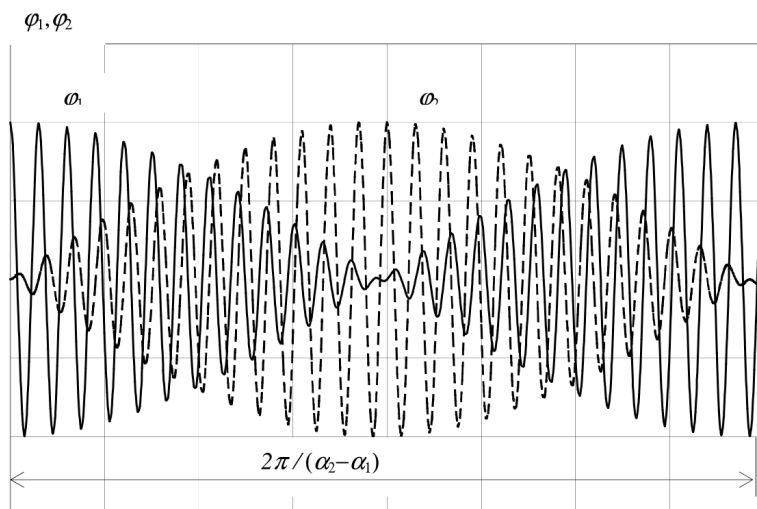
Wtedy ogólne rozwiązanie równań ruchu (12) przyjmuje następującą postać:

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= \frac{1}{2} \varphi_0 \cos \omega_1 t + \frac{1}{2} \varphi_0 \cos \omega_2 t, \\ \varphi_2(t) &= \frac{1}{2} \varphi_0 \cos \omega_1 t - \frac{1}{2} \varphi_0 \cos \omega_2 t. \end{aligned} \quad (18)$$

Stosując wzory trygonometryczne, wyrażenia (18) można przedstawić w formie:

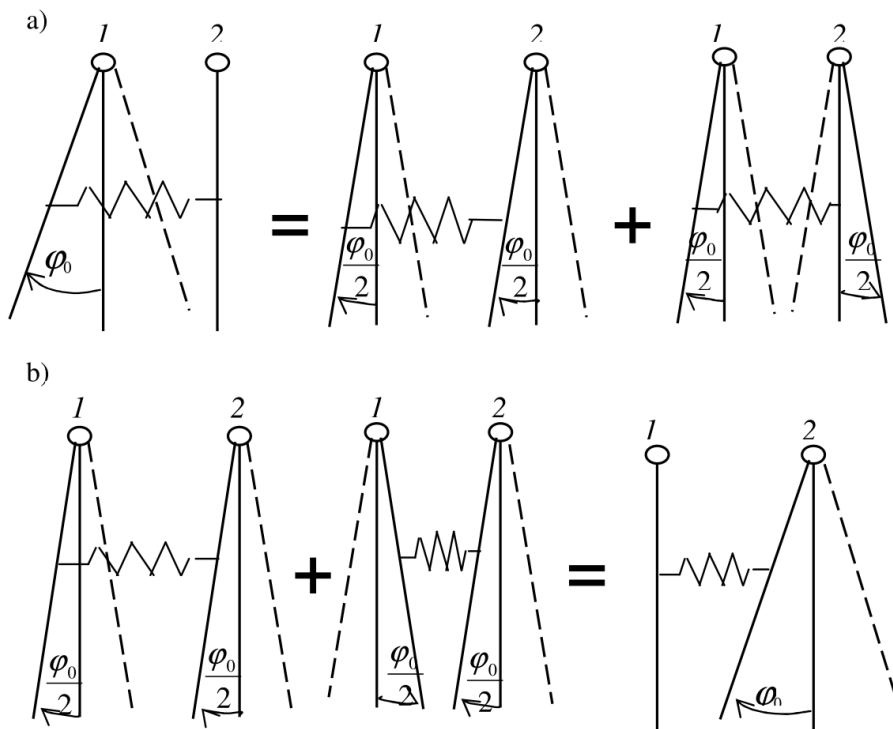
$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= \varphi_0 \cos \left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \right) \cos \left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t \right) \\ \varphi_2(t) &= \varphi_0 \sin \left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \right) \sin \left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t \right) \end{aligned} \quad (19)$$

Przebieg czasowy rozwiązań (19) został przedstawiony na Rys. 3. Jak widać, w przypadku dwóch identycznych sprzężonych układów o jednym stopniu swobody, w badanym układzie można zaobserwować **zjawisko dudnienia**. Energia wprowadzona przez warunki początkowe jest przenoszona w sposób okresowy z pierwszego układu do drugiego. Zjawisko to ilustruje Rys. 4.



Rysunek 3: Przebieg czasowy rozwiązań (19)

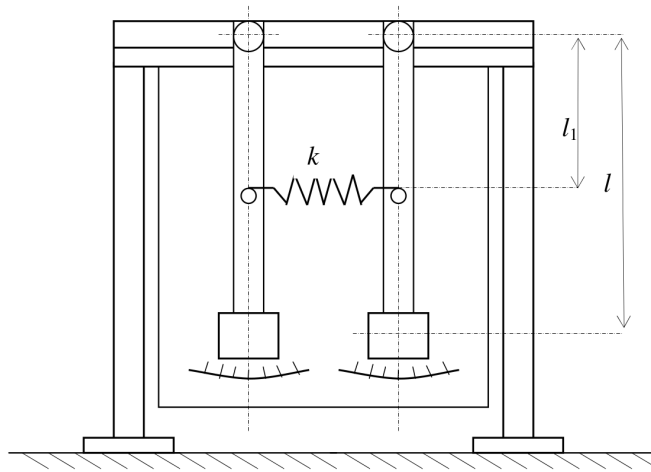
Początkowo porusza się pierwsze wahadło, podczas gdy drugie jest nieruchome. Ruch ten można zinterpretować jako sumę dwóch głównych postaci drgań o odpowiadających im częstościach własnych ω_1 i ω_2 (Rys. 4a). Jeśli wartości częstości własnych są bliskie, potrzebny jest pewien czas (kilka okresów), aby zaobserwować przesunięcie fazowe. Po tym czasie przesunięcie fazowe wynosi 180° (Rys. 4b). Wtedy pierwsze wahadło zatrzymuje się, a drugie oscyluje z amplitudą φ_0 . Zjawisko to powtarza się, a drgania przenoszą się z jednego wahadła na drugie.



Rysunek 4: Ilustracja zjawiska dudnienia

4 Stanowisko pomiarowe

Schemat stanowiska pomiarowego przedstawiono na Rys. 5. Stanowisko to odpowiada modelowi teoretycznemu zaprezentowanemu na Rys. 1. Oba wahadła są zawieszono na pryzmach i mogą oscylować wyłącznie w płaszczyźnie pionowej.



Rysunek 5: Schemat stanowiska pomiarowego

5 Przebieg ćwiczenia

1. Wyznaczyć parametry fizyczne elementów układu:

- zmierzyć długości wahadeł,
- zważyć pręty oraz walce na ich końcach, przyjmując wartość średnią mas,
- wyznaczyć sztywność sprężyny sprzęgającej wyznaczając wartość średnią z jej 2-3 ugięć pod znanymi obciążeniami w zakresie użytkowym.

2. Wyznaczyć eksperymentalnie pierwszą częstość drgań własnych:

- początkowo oba wahadła zostają wychylone o ten sam kąt w tym samym kierunku,
- zmierzyć stoperem czas 20 okresów drgań własnych,
- pomiar czasu 20 okresów należy powtórzyć dwukrotnie,
- obliczyć średnią wartość okresu,
- na podstawie okresu drgań własnych obliczyć pierwszą częstość drgań własnych.

3. Wyznaczyć eksperymentalnie drugą częstość drgań własnych:

- początkowo oba wahadła zostają wychylone o ten sam kąt, lecz w przeciwnych kierunkach,
- zmierzyć stoperem czas 20 okresów drgań własnych,
- pomiar czasu 20 okresów należy powtórzyć dwukrotnie,
- obliczyć średnią wartość okresu,
- na podstawie okresu drgań własnych obliczyć drugą częstość drgań własnych.

4. Wyznaczyć eksperymentalnie częstość dudnienia:

- początkowo jedno wahadło zostaje wychylone o niewielki kąt ($\varphi_0 \leq 5^\circ$),
- zmierzyć stoperem czas 5 okresów dudnienia,
- powtórzyć dwukrotnie pomiar czasu 5 okresów,
- obliczyć średnią wartość okresu dudnienia,
- na podstawie okresu dudnienia obliczyć częstość dudnienia.

5. Porównać wyniki eksperymentalne i teoretyczne:

- obliczyć częstości drgań własnych wg teorii ω_1 i ω_2 na podstawie równań (9),
- obliczyć teoretyczną częstość dudnienia $\omega_d = \omega_2 - \omega_1$,
- przeanalizować wyniki eksperymentalne i teoretyczne.

Literatura

- Tse F.S., Morse I.E., Hinkle R.T.: *Mechanical Vibrations Theory and Applications*, Allyn and Bacon Inc., Boston, London, Sydney, Toronto, 1978.
- Kaliski S.: *Drgania i fale*, PWN, Warszawa 1966.
- Kapitaniak T.: *Wstęp do teorii drgań*, Wydawnictwo PŁ, Łódź 1992.
- Praca zbiorowa: *Drgania mechaniczne - Laboratorium*, Oficyna Wydawnicza PW, Warszawa 1999.
- Rao S.S.: *Mechanical Vibrations*, 3rd ed., Prentice Hall, NY, 1995.

LABORATORIUM
DRGAŃ
MECHANICZNYCH

Ćwiczenie 7

DRGANIA SWOBODNE UKŁADU O DWÓCH
STOPNIACH SWOBODY

Grupa: _____
Zespół: _____

data _____

Imię i nazwisko:

1. _____
2. _____
3. _____
4. _____
5. _____
6. _____

Wnioski i uwagi

Wyniki pomiarów parametrów fizycznych

sztwność sprężyny k		[N/m]
masa pręta m_p		[kg]
masa na końcu pręta m		[kg]
długość pręta l		[m]

Wyznaczenie pierwszej częstości drgań własnych

Czas 20 okresów drgań własnych								
$T_{11} =$		[s]	$T_{12} =$		[s]	$T_{13} =$		[s]
Średnia wartość okresu: $T_1 = \frac{T_{11}+T_{12}+T_{13}}{3 \times 20} =$							[s]	
Wartość 1. częstości drgań własnych: $\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1} =$							[rad/s]	

Wyznaczenie drugiej częstości drgań własnych

Czas 20 okresów drgań własnych								
$T_{21} =$		[s]	$T_{22} =$		[s]	$T_{23} =$		[s]
Średnia wartość okresu: $T_1 = \frac{T_{21}+T_{22}+T_{23}}{3 \times 20} =$							[s]	
Wartość 1. częstości drgań własnych: $\omega_2 = \frac{2\pi}{T_2} =$							[rad/s]	

Wyznaczenie częstości dudnienia

Czas 5 okresów dudnienia								
$T_{d1} =$		[s]	$T_{d2} =$		[s]	$T_{d3} =$		[s]
Średnia wartość okresu: $T_d = \frac{T_{d1}+T_{d2}+T_{d3}}{3 \times 20} =$							[s]	
Wartość częstości dudnienia: $\omega_d = \frac{2\pi}{T_d} =$							[rad/s]	

Obliczenie teoretycznej wartości 1. i 2. częstości drgań własnych oraz częstości dudnienia

$\omega_1 = \sqrt{\frac{9g}{8l}} =$		[rad/s]
$\omega_2 = \sqrt{\frac{9g}{8l} + \frac{3k}{8m}} =$		[rad/s]
$\omega_d = \omega_2 - \omega_1 =$		[rad/s]