

WYZNACZANIE WSPÓŁCZYNNIKA RESTYTUCJI I IMPULSU REAKCJI DYNAMICZNYCH W CZASIE UDERZENIA

Mechanika Techniczna – Ćwiczenie 6 *

1 Cel ćwiczenia

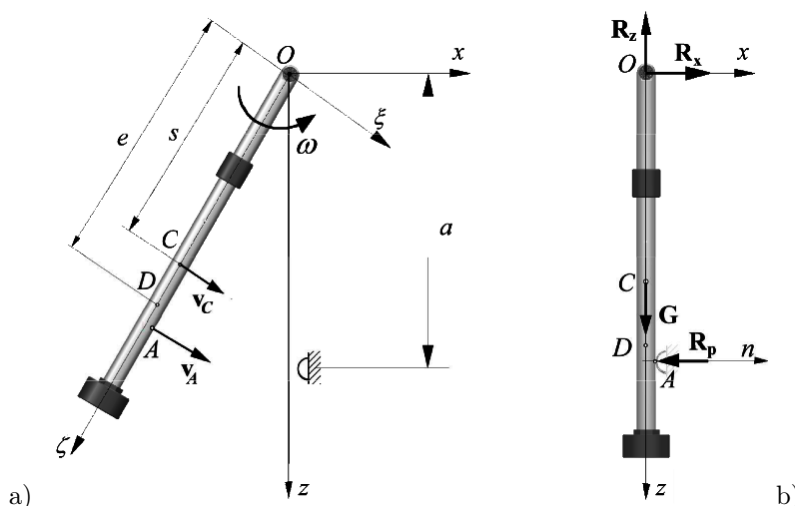
Celem ćwiczenia jest doświadczalne wyznaczenie współczynnika restytucji, doświadczalne i teoretyczne wyznaczenie wartości impulsu reakcji łożysk i położenia środka uderzenia ciała nieswobodnego.

2 Wprowadzenie

Omawiane tu zagadnienia dotyczą modelowania i analizy zjawiska zderzenia ciała nieswobodnego z nieruchomą przeszkodą. Rozpatrywane jest ciało poruszające się ruchem obrotowym wokół poziomej osi pod wpływem sił ciężkości, które uderza w nieruchomą przeszkodę. W czasie uderzenia na ciało działają chwilowe siły pochodzące od przeszkody, które wywołują dodatkowe reakcje łożysk. Matematyczny opis zjawiska pozwalający na wyznaczenie impulsów reakcji przeszkody z łożysk jest możliwy na podstawie twierdzeń o pochodnej krętu i pochodnej pędu ciała oraz hipotezy Newtona.

Stanowisko badawcze umożliwia obserwację zjawiska oraz rejestrację przebiegu zmian wartości reakcji w czasie uderzenia. Przeprowadzone pomiary pozwalają na wyznaczenie współczynnika restytucji, impulsu reakcji w łożyskach powstałych na skutek zderzenia oraz położenia środka uderzenia.

3 Teoretyczny opis zjawiska



Rysunek 1: Uderzenie mimośrodowe ciała nieswobodnego w nieruchomą przeszkodę: a) układy współrzędnych i wymiary, b) siły działające na ciało w czasie uderzenia

W modelu rozpatrywanego układu (rys. 1) ciało obraca się wokół nieruchomej poziomej osi prostopadłej do płaszczyzny symetrii ciała $\xi\zeta$. Ciało uderza mimośrodowo w nieruchomą przeszkodę. Założono, że

* Autorzy – Z. Towarek, A. Jach, J. Grabski, w: K. Januszkiewicz, J. Grabski: ĆWICZENIA LABORATORYJNE Z MECHANIKI, Łódź 2008

przeszkoda umieszczona jest w taki sposób, że kierunek normalnej w miejscu uderzenia jest poziomy i leży w płaszczyźnie symetrii ciała. Wskutek oddziaływania podpory na ciało siłą \mathbf{R}_p w łożyskach powstają dodatkowe reakcje \mathbf{R} . Reakcje są zerowe w przypadku, gdy prosta normalna uderzenia n przechodzi przez środek uderzenia (punkt D).

3.1 Zależności ogólne

Wartości impulsów reakcji w łożyskach (\mathbf{S}) i w miejscu styku z podporą (\mathbf{S}_p) można wyznaczyć na podstawie twierdzeń o pochodnej pędu i pochodnej krętu ciała:

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{Q}}{dt} &= \mathbf{P}, \\ \frac{d\mathbf{K}_O}{dt} &= \mathbf{M}_O,\end{aligned}\tag{1}$$

gdzie \mathbf{P} oznacza sumę wszystkich sił czynnych i sił reakcji dział

Pęd ciała jest określony jako $\mathbf{Q} = m\mathbf{V}_C$, przy czym m oznacza masę ciała, a \mathbf{V}_C prędkość środka masy.

Kręt ciała \mathbf{K}_O względem nieruchomego punktu O można przedstawić za pomocą składowych o kierunkach nieruchomych osi xyz (rys. 1) lub osi ruchomych $\xi\eta\zeta$ – sztywno związanych z ciałem. Najczęściej stosowana jest druga metoda – wówczas

$$\mathbf{K}_O = \mathbf{i}K_\xi + \mathbf{j}K_\eta + \mathbf{k}K_\zeta,\tag{2}$$

gdzie K_ξ, K_η, K_ζ oznaczają rzuty wektora krętu na osie $\xi\eta\zeta$ (sztywno związane z poruszającym się ciałem), a $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ są wersorami tych osi. Rzuty wektora krętu na osie prostokątnego (prawoskrętnego) układu współrzędnych $\xi\eta\zeta$ wyznacza się z zależności:

$$\begin{aligned}K_\xi &= J_\xi\omega_\xi - J_{\xi\eta}\omega_\eta - J_{\xi\zeta}\omega_\zeta, \\ K_\eta &= J_\eta\omega_\eta - J_{\eta\xi}\omega_\xi - J_{\eta\zeta}\omega_\zeta, \\ K_\zeta &= J_\zeta\omega_\zeta - J_{\zeta\xi}\omega_\xi - J_{\zeta\eta}\omega_\eta.\end{aligned}\tag{3}$$

W przypadku gdy ciało obraca się wokół nieruchomej osi – pokrywającej się z osią η – to wektor prędkości kątowej $\boldsymbol{\omega}$ ma tylko jedną składową różną od zera $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{j}\omega_\eta$, ($\omega_\xi = \omega_\zeta = 0$). Jeśli ponadto momenty dewiacyjne $J_{\xi\eta}$ i $J_{\zeta\eta}$ są równe zeru, co ma miejsce wówczas, gdy płaszczyzna $\xi\zeta$ jest płaszczyzną symetrii ciała, to kręt \mathbf{K}_O jest określony jako

$$\mathbf{K}_O = \mathbf{j}K_\eta = \mathbf{j}J_\eta\omega_\eta = J_\eta\boldsymbol{\omega}.\tag{4}$$

(Ponieważ oś η pokrywa się z osią y , to $\omega_\eta \equiv \omega_y = \omega$ oraz $J_\eta \equiv J_y$.)

3.2 Zmiana pędu i krętu rozpatrywanego modelu

Całkując obie strony równania (1) w granicach od t do $t + \Delta t$ otrzymuje się zależności:

$$\Delta\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(t + \Delta t) - \mathbf{Q}(t) = \int_t^{t+\Delta t} \mathbf{P} dt,\tag{5}$$

$$\Delta\mathbf{K}_O = \mathbf{K}_O(t + \Delta t) - \mathbf{K}_O(t) = \int_t^{t+\Delta t} \mathbf{M}_O dt.\tag{6}$$

które określają przyrosty wektorów pędu i krętu układu.

W położeniu, w którym ciało zderza się z przeszkodą równania (5)–(6) można przedstawić w postaci skalarnej:

$$\begin{aligned}mv'_{cx} - mv''_{cx} &= S - S_p, \\ J_y\omega' - J_y\omega'' &= -S_p \cdot a.\end{aligned}\tag{7}$$

Wprowadzone zostały następujące oznaczenia:

- $v'_{cx} = v_{cx}(t + \Delta t)$, $v''_{cx} = v_{cx}(t)$ – rzuty prędkości środka masy ciała na oś x tuż po uderzeniu (w chwili $t + \Delta t$) i tuż przed uderzeniem (w chwili t),
- $\omega' = \omega(t + \Delta t)$, $\omega'' = \omega(t)$ – prędkość kątowa ciała tuż po uderzeniu i tuż przed uderzeniem,
- $S = \int_t^{t+\Delta t} R_x dt$ – impuls siły R_x działającej na łożyska w czasie uderzenia,
- $S_p = \int_t^{t+\Delta t} R_p dt$ – impuls reakcji podpory \mathbf{R}_p .

3.3 Wyznaczenie impulsu reakcji łożysk i reakcji podpory

Dodatkowe równania, konieczne do wyznaczenia wielkości impulsów sił powstających podczas uderzenia:

- hipoteza Newtona, która pozwala na określenie współczynnika restytucji (k) przy uderzeniu w nieruchomą podporę jako

$$k = \frac{v'_A - 0}{-v''_A - 0} = \frac{-v'_A}{v''_A}, \quad (8)$$

- zależności kinematyczne:

$$v'_{cx} = \omega' s, \quad v''_{cx} = \omega'' s, \quad (9)$$

$$v'_A = \omega' a, \quad v''_A = \omega'' a. \quad (10)$$

Po rozwiązaniu równań (7)–(10) otrzymuje się zależności określające impuls reakcji łożysk

$$S = (1 + k)m\omega' \left(\frac{J_y}{ma} - s \right), \quad (11)$$

i impuls reakcji oddziaływania podpory na uderzające w nią ciało

$$S_p = (1 + k) \frac{J_y \omega'}{a}. \quad (12)$$

3.4 Środek uderzenia

Impuls reakcji łożysk (S) jest równy zero wtedy, gdy we wzorze (11) wyrażenie $\left(\frac{J_y}{ma} - s \right)$ jest równe zero. Oznaczając symbolem e taką odległość a ($a = e$), dla której

$$\frac{J_y}{me} - s = 0, \quad (13)$$

można wyznaczyć odległość podpory $a = e$, dla której impuls reakcji łożysk jest równy zero. Odległość ta określa położenie środka uderzenia (np. punktu D na rys. 1). Ze wzoru (13) wynika, że odległość środka uderzenia od osi obrotu jest równa

$$e = \frac{J_y}{ms}. \quad (14)$$

Należy podkreślić, że wzór (14) jest słuszny przy założeniach: oś obrotu jest prostopadła do płaszczyzny symetrii ciała, normalna uderzenia leży w tej płaszczyźnie i jest prostopadła do prostej OC .

3.5 Wyznaczenie współczynnika restytucji

Współczynnik restytucji jest wyznaczany na podstawie hipotezy Newtona, to znaczy z zależności

$$k = \frac{v'_{Ax} - 0}{-v''_{Ax} - 0} = \frac{-\omega' a}{\omega'' a} = \frac{\omega'}{\omega''}. \quad (15)$$

Prędkość ω' oznacza prędkość kątową ciała uderzającego w chwili uderzenia (tuż przed uderzeniem). Można ją wyznaczyć wykorzystując twierdzenie o przyroście energii kinetycznej

$$\frac{1}{2} J_y (\omega')^2 - 0 = mgs(1 - \cos \alpha_1), \quad (16)$$

gdzie założono, że w położeniu początkowym określonym kątem α_1 prędkość ciała nieswobodnego jest równa zero.

W podobny sposób można wyznaczyć prędkość ω'' . Rozpatrując zmianę energii kinetycznej w chwili tuż po uderzeniu i w chwili, gdy ciało osiąga najwyższe wychylenie (określone kątem α_2) otrzymuje się

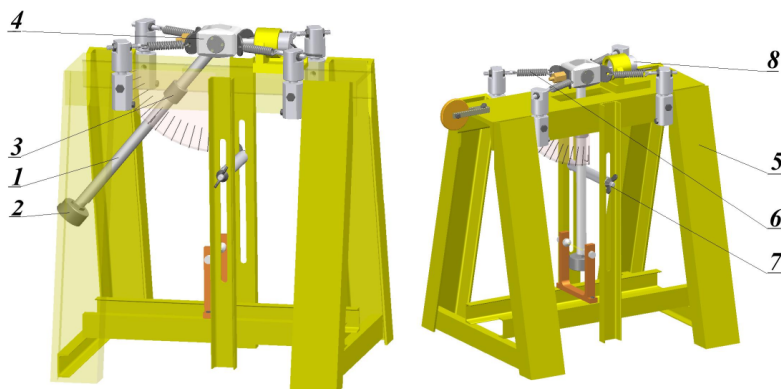
$$\frac{1}{2} J_y (\omega'')^2 - 0 = -mgs(1 - \cos \alpha_2). \quad (17)$$

Po rozwiązaniu równań (15)–(17) zależność określającą współczynnik restytucji dla znanych kątów α_1 i α_2 można przedstawić w formie

$$k = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha_2}{1 - \cos \alpha_1}}. \quad (18)$$

4 Opis stanowiska badawczego

Widok stanowiska do badań jest przedstawiony na rys. 2. Użyte podczas doświadczenia ciało nieswobodne składa się z pręta (1) o przekroju kołowym, na końcu którego jest zamocowany walec (2) oraz tulei (3), którą może być mocowana w dowolnym położeniu na pręcie. Ciało może się obracać względem osi łożysk umieszczonych w lekkiej oprawie (4). Oprawa łożysk jest połączona ramą (5) za pomocą czterech sprężyn (6) o jednakowej sztywności. Przeszkoda (7) umieszczona jest w prowadnicach umożliwiającą zmianę jej położenia względem osi obrotu pręta.



Rysunek 2: Stanowisko badawcze

4.1 Urządzenia pomiarowe

Podstawową wielkością mierzoną w czasie uderzenia jest wypadkowa sił reakcji łożysk (spowodowanych siłami powstającymi w momencie uderzenia). Pomiar jest dokonywany pośrednio – poprzez wyznaczenie przemieszczenia oprawy łożysk. Dokonuje się go przy użyciu indukcyjnego czujnika przemieszczeń (8), którego sygnał podawany jest na wejście oscyloskopu (lub komputera). Na podstawie obrazu czasowego przebiegu reakcji jest wyznaczany impuls reakcji łożysk.

5 Przebieg pomiarów

5.1 Wyznaczanie współczynnika restytucji

W celu wyznaczenia współczynnika restytucji (k) należy dokonać kilku pomiarów kąta wychylenia ciała przed i po uderzeniu.

Sposób przeprowadzenia pomiarów współczynnika restytucji:

1. Ustawić poprzeczkę w okolicy jej górnego skrajnego położenia, dobrze dokręcić i zanotować odległość a w tabeli 1.
2. Wychylić pręt o kąt α_1 (zanotować jego wartość w tabeli 1), a następnie puścić swobodnie.
3. Obserwować ruch ciała po uderzeniu w przeszkodę i zmierzyć maksymalny kąt (α_2), o jaki wychyliło się ono po odbiciu się od przeszkody. Wartość kąta zapisać w odpowiedniej rubryce tabeli 1. Pomiary wykonać trzykrotnie.
4. Przesunąć poprzeczkę w okolice dolnego skrajnego położenia i powtórzyć powyższe czynności.

5.2 Określenie wartości impulsu reakcji łożysk

Wyznaczenie impulsu (S) reakcji łożysk sprowadza się do rejestracji przebiegu zmian reakcji łożysk (R_x) w czasie uderzenia, a następnie obliczenia całki $S = \int_t^{t+\Delta t} R_x dt$. W tym celu należy:

1. Włączyć zasilacz czujnika przemieszczeń i oscyloskop (lub komputer).
2. Zamocować przeszkodę w okolicach jej górnego skrajnego położenia.
3. Wychylić pręt o kąt α_1 (około 40°), a następnie puścić swobodnie.

4. Zarejestrować (na oscyloskopie lub w komputerze) przebieg wartości reakcji (R_x) w funkcji czasu.
5. Uwzględniając skalę osi rzędnych (wartości reakcji R_x) oraz osi odciętych (czas) wyznaczyć impuls siły reakcji (S). Można go oszacować licząc pole pod przebiegiem pierwszego impulsu zarejestrowanego na oscyloskopie przy założeniu, że jest on w przybliżeniu sinusoidalny. Należy zmierzyć amplitudę (maximum pierwszej połówki) sygnału w [V] oraz czas trwania impulsu od zera, przez to maksimum, aż do powrotu do zera w [s]. Wykorzystać wzór na pole pod taką połówką sinusoidy.

Równanie sinusoidy: $y(t) = A \sin(2\pi ft)$, czas trwania półokresu: $T_{1/2} = \frac{1}{2f}$, Pole P obliczamy całkując funkcję w przedziale od 0 do $\frac{1}{2f}$: $P = \int_0^{\frac{1}{2f}} A \sin(2\pi ft) dt = \frac{2A}{\pi f}$. Wynik ma jednostkę [Vs], mnożąc przez współczynnik odnoszący wartość pomiaru amplitudy do sztywności sprężyn na których zamontowany jest miernik otrzymamy wartość w [Ns].

Powyższe czynności wykonać trzykrotnie.

5.3 Wyznaczanie położenia środka uderzenia

Doświadczalne wyznaczenie położenia środka uderzenia polega na zmianie położenia przeszkody i obserwacji zmian maksymalnej wartości reakcji łożysk w czasie uderzenia. Położenie podpory, w którym reakcje osiągają wartość zerową określa położenie środka uderzenia. Sposób przeprowadzenia pomiarów:

1. Zamocować przeszkodę w okolicach jej górnego skrajnego położenia.
2. Wychylić pręt o dowolny kąt (α_1) (zanotować jego wartość w tabeli 3) i puścić go swobodnie.
3. Zarejestrować (na oscyloskopie lub w komputerze) przebieg wartości reakcji (R_x) w funkcji czasu.
4. Przesunąć przeszkodę w dół, wychylić pręt o taki sam kąt i zarejestrować przebieg reakcji.
5. Powyższą czynność powtarzać do momentu uzyskania płaskiego przebiegu zmian siły na ekranie i odczytać odległość przeszkody od osi obrotu. Zanotować w tabeli 3.

Pomiary przeprowadzić dla dwóch różniących się znacznie kątów α_1 (np. 45° oraz 25°).

6 Opracowanie wyników pomiarów i sprawozdanie

Dla porównania rezultatów otrzymanych z pomiarów z wynikami obliczeń teoretycznych wyznaczana jest teoretyczna wartość impulsu reakcji łożysk. W tym celu należy najpierw obliczyć prędkość kątową ciała przed uderzeniem na podstawie zależności otrzymanej ze wzoru (16) – to jest

$$\omega' = \sqrt{\frac{2mgs(1 - \cos \alpha_1)}{J_y}}, \quad (19)$$

następnie, korzystając z zależności (11) o postaci

$$S = (1 + k)m\omega' \left(\frac{J_y}{ma} - s \right) \quad (20)$$

należy obliczyć wartość impulsu reakcji łożysk (S) i zapisać ją w odpowiedniej rubryce tabeli 2. Teoretyczną wartość odległości środka uderzenia od osi obrotu wyznacza się z zależności (14), to znaczy

$$e = \frac{J_y}{ms}. \quad (21)$$

Dane liczbowe:

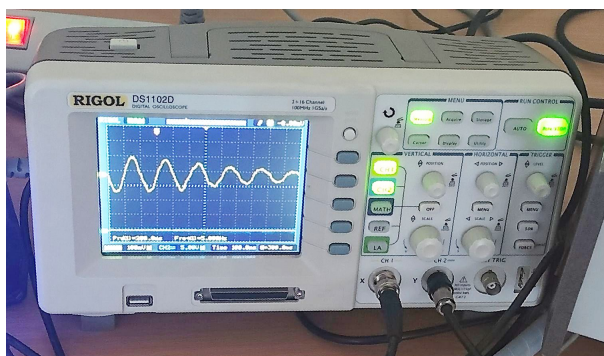
masa ciała nieswobodnego: $m = 1.37$ kg,

moment bezwładności ciała względem osi obrotu: $J_y = 0.1036$ kg·m²,

odległość środka ciężkości od osi obrotu: $s = 255$ mm.

Współczynnik restytucji k – wartość wyznaczona z pomiarów przeprowadzonych dla takiego położenia przeszkody (a), dla jakiego wyznaczany jest impuls reakcji w [Ns].

6.1 Opis obsługi oscyloskopu DS 1102D



1. W sekcji VERTICAL na płycie czołowej oscyloskopu, włączyć oba kanały przyciskami CH1 i CH2 (powinny być podświetlone). Ustawić sprzężenia stałoprądowe sygnałów wejściowych. Po wciśnięciu przycisku CH1, ustawić sprzężenie (Coupling) sygnału z czujnika drgań: CH1 → Coupling → DC. Podobnie dla sygnału z czujnika optycznego: CH2 → Coupling → DC. Usuwanie rozwijanego na ekranie menu – przyciskiem MENU ON/OFF (obok prawego górnego rogu ekranu).
2. W sekcji VERTICAL ustawić pokrętle SCALE czułość odchylenia (w voltach na działkę) i położenie pionowe przebiegów na ekranie pokrętle POSITION:
CH1 → SCALE → 500mV → POSITION → -1.00V
CH2 → SCALE → 10.0V → POSITION → - 40V
3. W sekcji HORIZONTAL ustawić prędkość podstawy czasu pokrętle SCALE, wyświetlaną na pasku stanu. Wstępnie można ustawić Time 50.00 ms (tzn. 50ms/działkę). Pokrętle POSITION w tej sekcji, ustawić początek wyzwalania w lewej części ekranu (dla tej prędkości podstawy czasu około 250.0ms). Pokazuje to wskaźnik ↓ u góry ekranu, a w prawym dolnym rogu wyświetlana jest wartość np. T → 250.0ms. Po zmianie prędkości podstawy czasu, ustawić podobnie początek wyzwalania w lewej części ekranu.
4. W sekcji TRIGGER ustawić źródło, rodzaj i sposób (jednorazowy - Single) wyzwalania podstawy czasu sygnałem z czujnika optycznego (kanał 2) przy pomocy przycisków rozwijanego menu i pokrętła wielofunkcyjnego.
MENU → Mode → Edge - wyzwalanie zboczem
Source → CH2
Slope → ↑ - zbocze narastające
Sweep → Single - jednorazowy cykl akwizycji po pojawieniu się impulsu wyzwalającego
Pokrętle LEVEL ustawić poziom wyzwalania około 4V: TRIG LVL= 4.00V
Wartość poziomu wyzwalania wyświetlana jest w prawym górnym rogu ekranu.
5. Pomiar okresu, częstotliwości lub amplitudy przy pomocy kursorów. Po zarejestrowaniu przebiegów:
 - nacisnąć przycisk Cursor w sekcji MENU na płycie czołowej oscyloskopu.
 - ustawić tryb ręczny pomiarów kursorowych Manual, naciskając przycisk Mode.
 - przyciskiem Type ustawić kursory parametrów czasowych X lub napięciowych Y.
 - obrotem pokrętła wielofunkcyjnego ustawić kursory A i B w odpowiednich punktach przebiegu. Zmiana kursorów A, B lub AB – przez kolejne wciskanie pokrętła wielofunkcyjnego. U góry ekranu można odczytać odstęp czasu (ΔX) i częstotliwość ($1/\Delta X$), lub różnicę napięć (ΔY).
 - Pomiar automatyczny częstotliwości – nacisnąć przycisk Measure w sekcji MENU.
 - ustawić źródło mierzonego sygnału: Measure → Source → CH1.
 - wybrać pomiar częstotliwości: Time → Freq.
 - na ekranie natychmiast wyświetlany jest wynik pomiaru.
7. W przypadku trudności z uzyskaniem stabilnego obrazu na ekranie, wcisnąć przycisk AUTO w sekcji RUN CONTROL i powtórzyć czynności 1 do 5 (6).

7 Pytania kontrolne

1. Na czym polega hipoteza Newtona?
2. Co to jest współczynnik restytucji?
3. Podać definicję impulsu siły?
4. Co oznacza termin „uderzenie mimośrodkowe ciał”?
5. Co to jest środek uderzenia?

**LABORATORIUM
MECHANIKI
TECHNICZNEJ**

Ćwiczenie 10

**WYZNACZANIE WSPÓŁCZYNNIKA RESTYTUCJI
I IMPULSU REAKCJI DYNAMICZNYCH W
CZASIE UDERZENIA**

Grupa: _____
Zespół: _____

data _____

Imię i nazwisko:

1. _____
2. _____
3. _____
4. _____
5. _____
6. _____

Tabela 1: Wyniki pomiarów współczynnika restytucji (k)

nr pom.	położenie przeszkody	kąt pocz. wychylenia	kąt wych. ciała po odbiciu	współczynnik restytucji	wartość średnia
i	a	α_{1i}	α_{2i}	k_i	k
[-]	[mm]	[°]	[°]	[-]	[-]
1					
2					
3					
4					
5					
6					

Tabela 2: Wyniki pomiarów i obliczeń wartości impulsu reakcji (S)

Nr pom.	Poł. przeszkody a [mm]	Pocz. kąt wych. α_1 [°]	Pole wykresu P [mm ²]	Impulsu reakcji S [N·s]		
				eksp.	średnia	teoria
1						
2						
3						

Nastawa podst. czasu:	$T = \dots$ ms/cm	Nastawa wzmocnienia:	$Z = \dots$ V/cm
Stała sprężyn:	$C = \dots$ N/mm	Stała czujnika przem.:	$W = \dots$ mm/V

Tabela 3: Wyniki pomiarów i obliczeń odległości środka uderzenia (e)

nr	pocz. kąt wych. α_1 [°]	odl. środka uderzenia e [mm]	
		eksperyment	teoria
1			
2			