

DRGANIA SWOBODNE UKŁADU O DWÓCH STOPNIACH SWOBODY

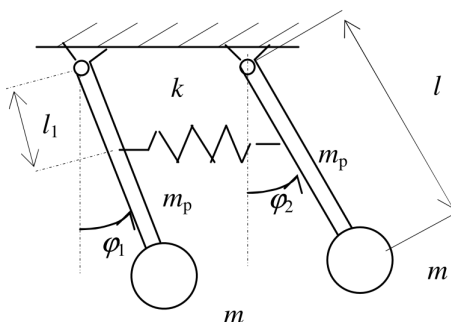
Drgania i Dynamika Maszyn – Ćwiczenie 7 *

1 Cel ćwiczenia

Doświadczalne wyznaczenie częstości drgań własnych układu o dwóch stopniach swobody, pokazanie postaci drgań odpowiadających tym częstościom, a także obserwacja i analiza zjawiska dudnienia.

2 Wprowadzenie teoretyczne

Przedmiotem rozważań jest układ przedstawiony na Rys. 7.1. Składa się on z dwóch jednakowych wahadeł fizycznych połączonych sprężyną o sztywności k . Wahadła charakteryzują się tym, że masa ciała m zamocowanego na końcu pręta o długości l jest w przybliżeniu równa masie pręta m_p . Dla uproszczenia pominięto wymiary zawieszonych ciężarków, traktując je jako ciała o masach skupionych w punktach, w odległości l od osi obrotu. Sprężyna jest zamocowana w odległości od osi obrotu, przy czym $l_1 = 0,5 l$.



Rysunek 1: Model układu

Do wyznaczenia dynamicznych równań ruchu wokół położenia równowagi wahadeł przedstawionych na Rys. 1 w postaci zlinearyzowanej zastosowano drugą zasadę Newtona dla ruchu obrotowego:

$$B\ddot{\phi} = \sum M, \quad (1)$$

gdzie:

- B – masowy moment bezwładności wahadła;
- ϕ – kąt obrotu wahadła mierzony od położenia równowagi (Rys. 1);
- M – moment sił zewnętrznych (sił ciężkości oraz sił ugięcia sprężyny) działających na wahadło.

Masowy moment bezwładności wahadła względem osi obrotu określa zależność:

$$B = \frac{m_p l^2}{3} + m l^2 = \frac{4}{3} m l^2. \quad (2)$$

Dla pierwszego wahadła wykonującego małe drgania wokół położenia równowagi, dynamiczne równanie ruchu (1) ma następującą postać:

$$\frac{4}{3} m l^2 \ddot{\phi}_1 = - \left(m_g \frac{l}{2} + m g l \right) \phi_1 - k \left(\frac{l}{2} \right)^2 \phi_1 + k \left(\frac{l}{2} \right)^2 \phi_2. \quad (3)$$

Analogiczne równanie ruchu drugiego wahadła jest postaci:

$$\frac{4}{3} m l^2 \ddot{\phi}_2 = - \left(m_g \frac{l}{2} + m g l \right) \phi_2 - k \left(\frac{l}{2} \right)^2 \phi_2 + k \left(\frac{l}{2} \right)^2 \phi_1. \quad (4)$$

*W: Laboratorium Drgań Mechanicznych – Łódź 2002

Układ sprzężonych równań różniczkowych (3) i (4) stanowi zlinearyzowany model matematyczny badanego układu. Po przekształceniach model ten można przedstawić w następującej postaci:

$$\begin{aligned}\frac{4}{3}ml^2\ddot{\phi}_1 + \left(\frac{3}{2}mgl + \frac{kl^2}{4}\right)\phi_1 - \frac{kl^2}{4}\phi_2 &= 0; \\ \frac{4}{3}ml^2\ddot{\phi}_2 + \left(\frac{3}{2}mgl + \frac{kl^2}{4}\right)\phi_2 - \frac{kl^2}{4}\phi_1 &= 0.\end{aligned}\quad (5)$$

Wprowadzając warunki początkowe dostarcza się porcję energii do układu w celu wywołania jego drgań swobodnych. Rozwiązań szczególnych jednorodnego układu równań różniczkowych (5) poszukuje się wtedy w postaci:

$$\begin{aligned}\phi_1 &= A_1 \sin(\alpha t + \delta); \\ \phi_2 &= A_2 \sin(\alpha t + \delta).\end{aligned}\quad (6)$$

Po podstawieniu rozwiązań (6) do (5) i sformułowaniu warunku spełniania rozwiązań w każdej chwili czasu, otrzymuje się jednorodny układ równań algebraicznych z niewiadomymi amplitudami A_1 i A_2 oraz częstością α jako parametrem w postaci:

$$\begin{aligned}(-b_{11}\alpha^2 + k_{11})A_1 + k_{12}A_2 &= 0; \\ k_{21}A_1 + (-b_{22}\alpha^2 + k_{22})A_2 &= 0,\end{aligned}\quad (7)$$

gdzie: $b_{11} = b_{22} = \frac{4}{3}ml^2$; $k_{12} = k_{21} = -\frac{kl^2}{4}$; $k_{11} = k_{22} = \frac{3}{2}mgl + \frac{kl^2}{4}$.

Warunkiem istnienia niezerowych rozwiązań układu równań (7) jest zerowanie się jego wyznacznika głównego:

$$\begin{vmatrix} -b_{11}\alpha^2 + k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & -b_{22}\alpha^2 + k_{22} \end{vmatrix} = 0.\quad (8)$$

Na podstawie warunku (8) otrzymuje się równanie częstości w postaci:

$$\alpha^4 - \frac{b_{11}k_{22} + b_{22}k_{11}}{b_{11}b_{22}}\alpha^2 + \frac{k_{11}k_{22} - k_{12}k_{21}}{b_{11}b_{22}} = 0.\quad (9)$$

Rozwiązując równanie dwukwadratowe (9) wyznacza się częstości własne badanego układu:

$$\begin{aligned}\alpha_1^2 &= \frac{9}{8} \frac{g}{l}; \\ \alpha_2^2 &= \frac{9}{8} \frac{g}{l} + \frac{3}{8} \frac{k}{m}.\end{aligned}\quad (10)$$

Istnieją więc zawsze dwie częstości kołowe α_1 oraz α_2 , przy których możliwe są drgania harmoniczne rozpatrywanego układu. Postać drgań układu, przy której wykonuje on drgania harmoniczne, nazywa się **postacią główną drgań**. Podstawiając do układu równań algebraicznych (7) α_1 w miejsce α , otrzymuje się układ równań dla amplitud drgań swobodnych pierwszej postaci:

$$\begin{aligned}(-b_{11}\alpha_1^2 + k_{11})A_{11} + k_{12}A_{21} &= 0; \\ k_{21}A_{11} + (-b_{22}\alpha_1^2 + k_{22})A_{21} &= 0,\end{aligned}\quad (11)$$

gdzie:

A_{11} – amplituda drgań wahadła pierwszego odpowiadająca pierwszej postaci drgań,

A_{21} – amplituda drgań wahadła drugiego odpowiadająca pierwszej postaci drgań.

Równania (11) są liniowo zależne, co wynika z zerowania się ich wyznacznika głównego. Z dowolnego z nich można wyznaczyć wartość stosunku amplitud $\nu_1 = A_{21}/A_{11} = 1$, określający postać układu w czasie drgań harmonicznym o częstości α_1 .

Postępując analogicznie z częstością α_2 , otrzymuje się wartość stosunku $\nu_2 = A_{22}/A_{12} = -1$. Otrzymane w ten sposób stosunki nazywamy **współczynnikami głównych postaci drgań**.

Rozwiązanie ogólne rozpatrywanego układu równań (5) można przedstawić w postaci:

$$\begin{aligned}\phi_1(t) &= A_{11} \sin(\alpha_1 t + \delta_1) + A_{12} \sin(\alpha_2 t + \delta_2); \\ \phi_2(t) &= A_{11}\nu_1 \sin(\alpha_1 t + \delta_1) + A_{12}\nu_2 \sin(\alpha_2 t + \delta_2).\end{aligned}\quad (12)$$

Po uwzględnieniu wartości liczbowych ν_1 oraz ν_2 rozwiązania (12) można zapisać w postaci:

$$\begin{aligned}\phi_1(t) &= A_{11} \sin(\alpha_1 t + \delta_1) + A_{12} \sin(\alpha_2 t + \delta_2); \\ \phi_2(t) &= A_{11} \sin(\alpha_1 t + \delta_1) - A_{12} \sin(\alpha_2 t + \delta_2),\end{aligned}\quad (13)$$

gdzie: $A_{11}, A_{12}, \delta_1, \delta_2$ – stałe zależne od warunków początkowych.

Można postawić pytanie: Jakie warunki początkowe należy zadać, aby obserwować poszczególne główne postacie drgań? Przyjmijmy następujące oznaczenia:

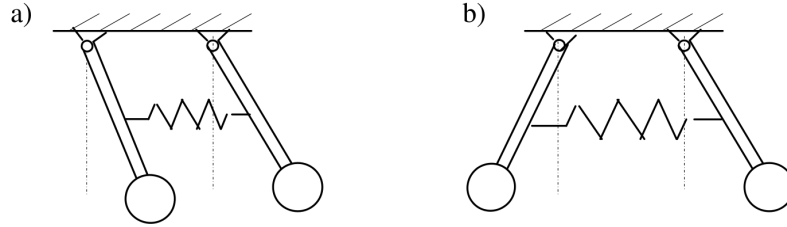
$$\begin{aligned}\phi_{10} &= \phi_1(t=0); & \phi_{20} &= \phi_2(t=0); \\ \omega_{10} &= \left. \frac{d\phi_1}{dt} \right|_{t=0}; & \omega_{20} &= \left. \frac{d\phi_2}{dt} \right|_{t=0}.\end{aligned}\quad (14)$$

Uwzględniając (14) w (13) otrzymuje się:

$$\begin{aligned}\phi_{10} &= A_{11} \sin \delta_1 + A_{12} \sin \delta_2; \\ \phi_{20} &= A_{11} \sin \delta_1 - A_{12} \sin \delta_2; \\ \omega_{10} &= A_{11} \alpha_1 \cos \delta_1 + A_{12} \alpha_2 \cos \delta_2; \\ \omega_{20} &= A_{11} \alpha_1 \cos \delta_1 - A_{12} \alpha_2 \cos \delta_2.\end{aligned}\quad (15)$$

Jeśli chcemy obserwować drgania pierwszej postaci musimy założyć $A_{12} = 0$. Wówczas $\phi_{10} - \phi_{20} = 0$, czyli $\phi_{10}/\phi_{20} = 1 = \nu_1$, zatem warunki początkowe dotyczące przemieszczeń wahadeł są proporcjonalne do postaci głównej drgań. Analogicznie $\omega_{10} - \omega_{20} = 0$, czyli $\omega_{10} = \omega_{20}$ (w szczególności można przyjąć $\omega_{10} = \omega_{20} = 0$).

Oznacza to, że drgania własne pierwszej postaci można obserwować przy przyjęciu warunku początkowego $\phi_{10} = \phi_{20}$, co oznacza wychylenie obu wahadeł o ten sam kąt (w odniesieniu do jego wartości i znaku). Postępując analogicznie, można dojść do wniosku, że drgania własne drugiej postaci występują przy warunku początkowym $\phi_{10} = -\phi_{20}$. Obraz graficzny drgań własnych pierwszej i drugiej postaci przedstawia Rys. 2.



Rysunek 2: Postacie drgań własnych a) pierwsza, b) druga

2.1 Zjawisko dudnienia

Ciekawy przypadek można otrzymać przyjmując w chwili początkowej ruchu wahadeł: $\phi_{10} = \phi_0$ oraz $\phi_{20} = 0$, $\omega_{10} = \omega_{20} = 0$. Na podstawie (15) jest wówczas:

$$\begin{aligned}\phi_0 &= A_{11} \sin \delta_1 + A_{12} \sin \delta_2; \\ 0 &= A_{11} \sin \delta_1 - A_{12} \sin \delta_2; \\ 0 &= A_{11} \alpha_1 \cos \delta_1 + A_{12} \alpha_2 \cos \delta_2; \\ 0 &= A_{11} \alpha_1 \cos \delta_1 - A_{12} \alpha_2 \cos \delta_2.\end{aligned}\quad (16)$$

Z pierwszego i drugiego równania (16) otrzymuje się:

$$\phi_{10} = 2A_{11} \sin \delta_1. \quad (17)$$

Z trzeciego i czwartego równania (16) oraz z warunku istnienia niezerowych rozwiązań dla A_{11} i A_{12} otrzymuje się $\delta_1 = \delta_2 = \pi/2$. Uwzględniając powyższe zależności otrzymuje się:

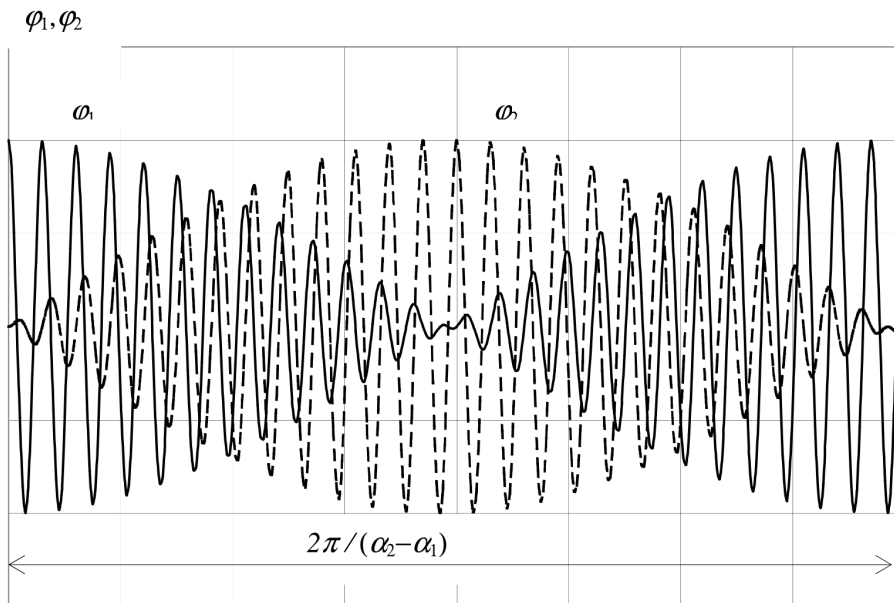
$$A_{11} = A_{12} = \frac{1}{2}\phi_0, \quad (18)$$

oraz rozwiązanie ogólne w następującej postaci:

$$\begin{aligned}\phi_1(t) &= \frac{1}{2}\phi_0 \cos \alpha_1 t + \frac{1}{2}\phi_0 \cos \alpha_2 t; \\ \phi_2(t) &= \frac{1}{2}\phi_0 \cos \alpha_1 t - \frac{1}{2}\phi_0 \cos \alpha_2 t.\end{aligned}\quad (19)$$

Korzystając ze wzorów trygonometrycznych wyrażenia (19) można przedstawić następująco:

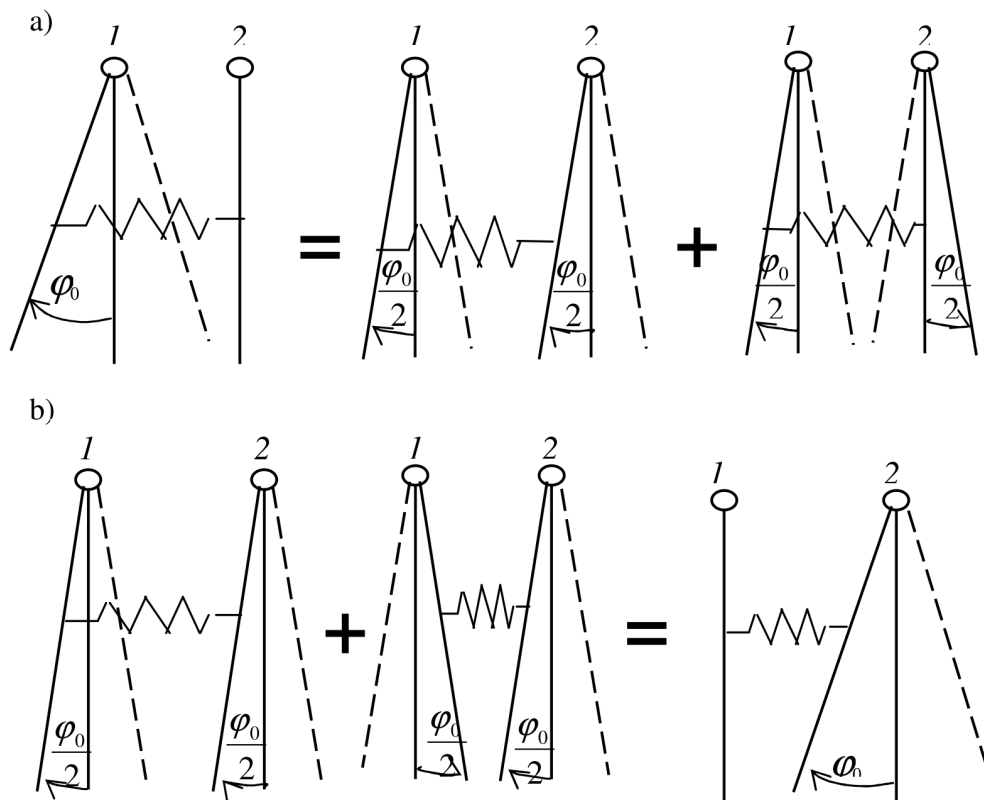
$$\begin{aligned}\phi_1(t) &= \phi_0 \cos \left(\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2} t \right) \cos \left(\frac{\alpha_2 + \alpha_1}{2} t \right); \\ \phi_2(t) &= \phi_0 \sin \left(\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2} t \right) \sin \left(\frac{\alpha_2 + \alpha_1}{2} t \right).\end{aligned}\quad (20)$$



Rysunek 3: Rozwiązania (20) ilustrujące zjawisko dudnienia

Przebieg rozwiązań (20) przedstawia Rys. 3. Widać, że w przypadku sprzężenia dwóch identycznych układów drgających o jednym stopniu swobody drgania w układzie sprzężonym mają charakter **dudnień**. Energia określona przez warunki początkowe jest przekazywana okresowo z jednego układu do drugiego. Zjawisko to przedstawione jest na Rys. 4.

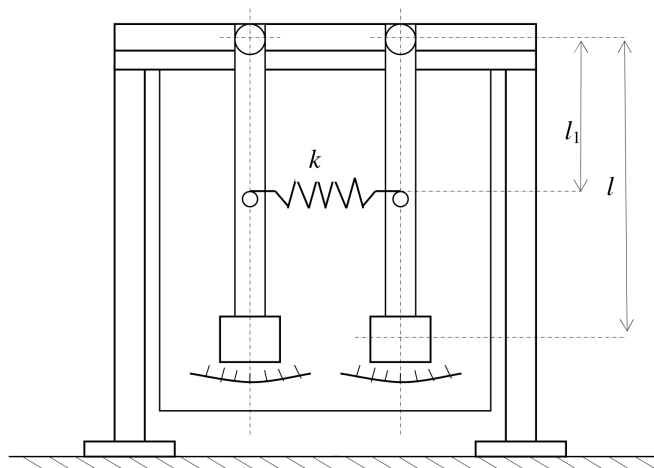
W pierwszej chwili wahadło 1 wykonuje drgania, wahadło 2 jest nieruchome (Rys. 4a). Ruch ten można zinterpretować jako sumę dwóch drgań własnych pierwszej i drugiej postaci o częstościach α_1 i α_2 . Przy dostatecznie bliskich wartościach tych częstości potrzeba pewnego czasu (odpowiadającego kilku okresom), aby nastąpiło przesunięcie faz. W pewnej chwili przesunięcie faz obu postaci wynosi 180° , co ilustruje Rys. 4b. Dodając oba przedstawione ruchy, można zauważyć, że wahadło 1 jest teraz nieruchome, podczas gdy wahadło 2 wykonuje drgania o amplitudzie ϕ_0 . Zjawisko to powtarza się i drgania przenoszą się z jednego wahadła na drugie.



Rysunek 4: Postacie drgań własnych a) pierwsza, b) druga

3 Stanowisko pomiarowe

Stanowisko pomiarowe jest przedstawione schematycznie na Rys. 5. Odpowiada ono modelowi teoretycznemu przedstawionemu na Rys. 1. Wahadła są podparte w dwóch przysmach i mogą wykonywać drgania tylko w płaszczyźnie pionowej.



Rysunek 5: Schemat stanowiska pomiarowego

4 Przebieg ćwiczenia

1. W celu wyznaczenia pierwszej częstości drgań własnych układu należy:
 - (a) wychylić oba wahadła o taki sam kąt co do wartości i zwrotu,
 - (b) przy użyciu stopera zmierzyć czas 20 okresów drgań swobodnych,
 - (c) pomiar czasu 20 okresów drgań powtórzyć dwukrotnie,
 - (d) obliczyć wartość średnią okresu drgań swobodnych,
 - (e) na podstawie obliczonej wartości okresu wyznaczyć wartość pierwszej częstości drgań własnych badanego układu.
2. W celu wyznaczenia drugiej częstości drgań własnych układu należy:
 - (a) wychylić oba wahadła o takie same kąty co do wartości, lecz o przeciwnych zwrotach,
 - (b) przy użyciu stopera zmierzyć czas 20 okresów drgań swobodnych,
 - (c) pomiar czasu 20 okresów drgań powtórzyć dwukrotnie,
 - (d) obliczyć wartość średnią okresu drgań swobodnych,
 - (e) na podstawie obliczonej wartości okresu wyznaczyć wartość drugiej częstości drgań własnych badanego układu.
3. W celu wyznaczenia częstości dudnienia należy:
 - (a) wychylić jedno wahadło o mały kąt ($\phi_0 \leq 5^\circ$),
 - (b) przy użyciu stopera zmierzyć czas 5 okresów dudnienia,
 - (c) pomiar czasu 5 okresów dudnienia powtórzyć dwukrotnie,
 - (d) obliczyć wartość średnią okresu dudnienia,
 - (e) na podstawie obliczonej wartości okresu wyznaczyć wartość częstości dudnienia.
4. W celu porównania wyznaczonych częstości z ich wartościami teoretycznymi należy:
 - (a) obliczyć częstości drgań swobodnych α_1 i α_2 na podstawie wzorów (10),
 - (b) obliczyć wartość częstości dudnienia $\alpha_d = \alpha_2 - \alpha_1$,
 - (c) przeprowadzić analizę wyników teoretycznych i doświadczalnych.

5 Literatura

1. Kaliski S.: *Drgania i fale*. PWN, Warszawa 1966.
2. Kapitaniak T.: *Wstęp do teorii drgań*, Wydawnictwo PŁ, Łódź 1992.
3. Praca zbiorowa: *Drgania mechaniczne - Laboratorium*, Oficyna Wydawnicza PW, Warszawa 1999.

LABORATORIUM
DRGAŃ
MECHANICZNYCH

Ćwiczenie 7

DRGANIA SWOBODNE UKŁADU O DWÓCH
STOPNIACH SWOBODY

Grupa: _____
Zespół: _____

data _____

Imię i nazwisko:

1. _____
2. _____
3. _____
4. _____
5. _____
6. _____

Wyznaczenie I-szej częstości kołowej drgań własnych układu

Czas 20 okresów drgań swobodnych:

$$T_{11} = \dots \text{ [s]; } T_{12} = \dots \text{ [s]; } T_{13} = \dots \text{ [s]}$$

$$\text{Wartość średnia okresu drgań swobodnych: } T_1 = \frac{T_{11}+T_{12}+T_{13}}{3 \times 20} = \dots$$

$$\text{Wartość I-szej częstości kołowej drgań własnych: } \alpha_1 = \frac{2\pi}{T_1} = \dots$$

Wyznaczenie II-giej częstości kołowej drgań własnych układu

Czas 20 okresów drgań swobodnych:

$$T_{21} = \dots \text{ [s]; } T_{22} = \dots \text{ [s]; } T_{23} = \dots \text{ [s]}$$

$$\text{Wartość średnia okresu drgań swobodnych: } T_2 = \frac{T_{21}+T_{22}+T_{23}}{3 \times 20} = \dots$$

$$\text{Wartość II-giej częstości kołowej drgań własnych: } \alpha_2 = \frac{2\pi}{T_2} = \dots$$

Wyznaczenie częstości dudnienia

Czas 5 okresów dudnienia:

$$T_{d1} = \dots \text{ [s]; } T_{d2} = \dots \text{ [s]; } T_{d3} = \dots \text{ [s]}$$

$$\text{Wartość średnia okresu dudnienia: } T_d = \frac{T_{d1}+T_{d2}+T_{d3}}{3 \times 5} = \dots$$

$$\text{Wartość częstości dudnienia: } \alpha_d = \frac{2\pi}{T_d} = \dots$$

Zmierzone i wyznaczone dane liczbowe:

szttywność sprężyny: $k = \dots$;

masa na końcu pręta: $m = \dots$;

długość pręta: $l = \dots$

Wyniki obliczeń teoretycznych

Obliczenie pierwszej częstości kołowej drgań własnych:

$$\alpha_1 = \sqrt{\frac{9}{8} \frac{g}{l}} = \dots$$

Obliczenie drugiej częstości kołowej drgań własnych:

$$\alpha_2 = \sqrt{\frac{9}{8} \frac{g}{l} + \frac{3}{8} \frac{k}{m}} = \dots$$

Obliczenie częstości dudnienia:

$$\alpha_d = \alpha_2 - \alpha_1 = \dots$$

Porównanie wyników doświadczalnych i teoretycznych

Wnioski