

WYZNACZANIE CZĘSTOŚCI REZONANSOWYCH DRGAŃ SKRĘTNYCH WAŁU

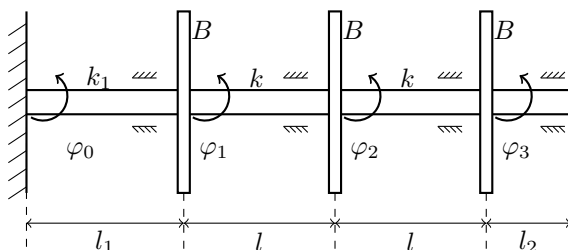
Drgania i Dynamika Maszyn – Ćwiczenie 5*

1 Cel ćwiczenia

Pomiar częstości rezonansowych drgań skrętnych wału z trzema tarczami i obserwacja odpowiadających im postaci skręcenia wału oraz porównanie wartości częstości rezonansowych uzyskanych z pomiarów z częstościami drgań własnych obliczonymi analitycznie.

2 Wprowadzenie teoretyczne

Model rozpatrywanego układu drgającego przedstawia Rys. 1. Jest to układ o trzech stopniach swobody. Rozpatruje się drgania własne skrętne (drgania swobodne) układu, gdy wał jest utwierdzony na końcu. Na wale o sztywnościach k_1 i k osadzone są trzy jednakowe tarcze o momencie bezwładności B .



Rysunek 1: Model układu drgającego

Równania różniczkowe ruchu mają następującą postać:

$$\begin{aligned} B\ddot{\varphi}_1 + k(\varphi_1 - \varphi_2) + k_1(\varphi_1 - \varphi_0) &= 0 \\ B\ddot{\varphi}_2 + k(\varphi_2 - \varphi_3) - k(\varphi_1 - \varphi_2) &= 0 \\ B\ddot{\varphi}_3 - k(\varphi_2 - \varphi_3) &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

W celu wyznaczenia częstości drgań własnych skrętnych układu zastosowano metodę Holzera. Rozwiązania szczególne układu równań (1) przewiduje się w postaci funkcji harmoniczych:

$$\varphi_1 = \Phi_1 \sin \alpha t; \quad \varphi_2 = \Phi_2 \sin \alpha t; \quad \varphi_3 = \Phi_3 \sin \alpha t, \quad (2)$$

gdzie: α – poszukiwana częstość własna drgań swobodnych, Φ_1 , Φ_2 , Φ_3 – amplitudy drgań skrętnych poszczególnych tarcz. Po podstawieniu rozwiązań (2) do układu równań różniczkowych (1) otrzymuje się układ równań algebraicznych:

$$B\Phi_1\alpha^2 - k(\Phi_1 - \Phi_2) - k_1(\Phi_1 - \Phi_0) = 0; \quad (3)$$

$$B\Phi_2\alpha^2 - k(\Phi_2 - \Phi_3) + k(\Phi_1 - \Phi_2) = 0; \quad (4)$$

$$B\Phi_3\alpha^2 + k(\Phi_2 - \Phi_3) = 0. \quad (5)$$

Układ równań (3)–(5) jest podstawą programu obliczeń częstości drgań własnych skrętnych badanego układu. Zakłada się dowolną wartość amplitudy drgań tarczy trzeciej Φ_3 , np. $\Phi_3 = 1$ rad, i wstawiając następnie wartość α ze spodziewanego zakresu częstości, na podstawie (5) wyznacza się wartość amplitudy Φ_2 :

$$\Phi_2 = \Phi_3 - \frac{B\Phi_3\alpha^2}{k} \quad (6)$$

Wyznaczoną wartość Φ_2 uwzględnia się w równaniu (5.4) i oblicza wartość amplitudy Φ_1 :

$$\Phi_1 = \Phi_2 - \frac{B\Phi_2\alpha^2 + B\Phi_3\alpha^2}{k} \quad (7)$$

* Autor: B. Jagiełło, w: LABORATORIUM DRGAŃ MECHANICZNYCH, K. Marynowski (red), Łódź 2002

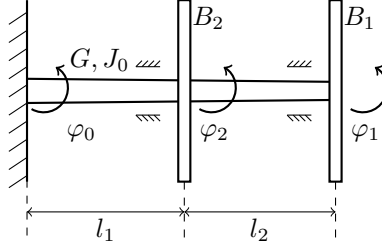
Wyznaczoną wartość Φ_1 uwzględnia się w równaniu (5.3) i oblicza się wartość amplitudy Φ_0 :

$$\Phi_0 = \Phi_1 - \frac{B\Phi_1\alpha^2 + B\Phi_2\alpha^2 + B\Phi_3\alpha^2}{k_1} \quad (8)$$

Jeśli α jest częstotliwością własną rozpatrywanego układu, musi być spełniony warunek brzegowy $\Phi_0 = 0$. Powyższy opis wskazuje, że metoda Holzera zastosowana do rozpatrywanego układu polega na poszukiwaniu miejsc zerowych funkcji (8). Dzieje się to poprzez wyznaczanie wartości tej funkcji dla kolejno przyjmowanych wartości α . Jeśli założona wartość α nie jest częstotliwością własną układu również nie będzie spełniony warunek brzegowy zerowania się amplitudy Φ_0 . Przyjmowane wartości α zagęszcza się w okolicy miejsca zerowego (zmiany znaku wartości Φ_0), aż do osiągnięcia zerującej wartości α (częstotliwości własnej) z żadaną dokładnością.

2.1 Przykład obliczeniowy

Przy użyciu metody Holzera wyznaczyć częstotliwości drgań własnych skrętnych oraz główne postacie drgań sprężystego bezmasowego wału z osadzonymi na nim dwoma krążkami o masowych momentach bezwładności B_1 i B_2 (Rys. 2).



Rysunek 2: Model wału

Dane liczbowe:

$$B_1 = B_2 = B = 10^{-5} \text{ kgm}^2; \quad J_0 = 10^{-6} \text{ m}^4; \quad l_1 = l_2 = 0,1 \text{ m}; \quad G = 8 \times 10^{10} \text{ Nm}^{-2};$$

Rozwiązanie:

Sztywność skrętną odcinków wału obliczamy ze wzoru:

$$k = \frac{GJ_0}{l} = \frac{8 \times 10^{10} \times 10^{-6}}{0,1} = 8 \times 10^5 \text{ Nm rad}^{-1} \quad (a)$$

Równania drgań skrętnych rozpatrywanego układu, którego schemat przedstawia Rys. 5.2 mają następującą postać:

$$B\ddot{\varphi}_1 = -k_1\varphi_1 + k\varphi_2 \Rightarrow B\ddot{\varphi}_1 + k(\varphi_1 - \varphi_2) = 0 \quad (b)$$

$$B\ddot{\varphi}_2 = -k\varphi_2 - k\varphi_2 + k\varphi_1 + k\varphi_0 \Rightarrow B\ddot{\varphi}_2 - k(\varphi_1 - \varphi_2) + k(\varphi_2 - \varphi_0) = 0 \quad (c)$$

Rozwiązania równań (b) i (c) przewidziano w postaci funkcji harmoniczných:

$$\varphi_1 = \Phi_1 \sin \alpha t; \quad \varphi_2 = \Phi_2 \sin \alpha t \quad (d)$$

Po podstawieniu rozwiązań (d) do równań (b) i (c) otrzymuje się układ równań algebraicznych:

$$-B\Phi_1\alpha^2 + k(\Phi_1 - \Phi_2) = 0 \quad (e)$$

$$-B\Phi_2\alpha^2 - k(\Phi_1 - \Phi_2) + k(\Phi_2 - \Phi_0) = 0 \quad (f)$$

Zakładamy wartość amplitudy $\Phi_1 = 1$ rad i wstawiamy wartość $\alpha = 1,5 \times 10^5$ rad/s ze spodziewanego zakresu częstotliwości. Na podstawie (e) wyznaczamy wartość amplitudy Φ_2 :

$$\Phi_2 = \Phi_1 - \frac{B\Phi_1\alpha^2}{k} = 1 - \frac{10^{-5} \times 1 \times 2,25 \times 10^{10}}{8 \times 10^5} = 1 - 0,28125 = 0,71875 \text{ rad} \quad (g)$$

Wyznaczoną wartość Φ_2 uwzględniamy w równaniu (f) i obliczamy Φ_0 :

$$\Phi_0 = \Phi_2 - \frac{B\Phi_1\alpha^2 + B\Phi_2\alpha^2}{k} = 0,71875 - \frac{10^{-5} \times 2,25 \times 10^{10}(1 + 0,71875)}{8 \times 10^5} = 0,235 \text{ rad} \quad (h)$$

Widać, że wstawiona wartość $\alpha = 1,5 \times 10^5$ rad/s nie jest częstotliwością własną rozpatrywanego układu, ponieważ nie jest spełniony warunek brzegowy $\Phi_0 = 0$. Resztkowa wartość amplitudy dla tej częstotliwości wynosi $\Delta\Phi = 0,235$ rad. Tabela obliczeniowa 1 przedstawia przebieg przeprowadzonych obliczeń.

Tabela 1: Tabela obliczeniowa 1 ($\alpha_1 = 1,5 \times 10^5$ rad/s, $\Delta\Phi = 0,2351$ rad)

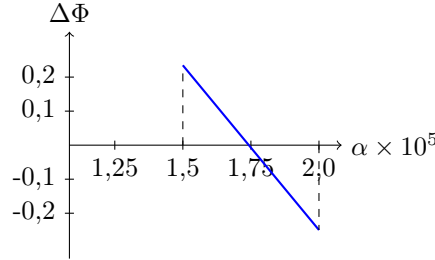
Pkt obl	B (kgm ²)	$B\alpha^2$ (Nm)	Φ (rad)	$B\alpha^2\Phi$ (Nm)	$\Sigma B\alpha^2\Phi$ (Nm)	k (Nm/rad)	$\Sigma B\alpha^2\Phi/k$ (rad)
1	10^{-5}	$2,25 \times 10^5$	1,0	$2,25 \times 10^5$	$2,25 \times 10^5$	8×10^5	0,28125
2	10^{-5}	$2,25 \times 10^5$	0,7187	$1,62 \times 10^5$	$3,87 \times 10^5$	8×10^5	0,48375

Przyjmujemy teraz następną wartość częstości $\alpha = 2 \times 10^5$ rad/s i ponawiamy obliczenia, wyniki patrz Tabela 2.

Tabela 2: Tabela obliczeniowa 2 ($\alpha_1 = 2 \times 10^5$ rad/s, $\Delta\Phi = -0,25$ rad)

Pkt obl	B (kgm ²)	$B\alpha^2$ (Nm)	Φ (rad)	$B\alpha^2\Phi$ (Nm)	$\Sigma B\alpha^2\Phi$ (Nm)	k (Nm/rad)	$\Sigma B\alpha^2\Phi/k$ (rad)
1	10^{-5}	4×10^5	1,0	4×10^5	4×10^5	8×10^5	0,5
2	10^{-5}	4×10^5	0,5	2×10^5	6×10^5	8×10^5	0,75

Na podstawie uzyskanych wyników warto określić zależność resztkowej wartości amplitudy od częstości w postaci graficznej, która ułatwi znalezienie poszukiwanej częstości własnej. Wykres na Rys. 3 wskazuje, że pierwszej częstości własnej należy poszukiwać tuż poniżej wartości 1.75×10^5 rad/s.



Rysunek 3: Zależność resztkowej wartości amplitudy od częstości

Tabela 3: Tabela obliczeniowa 3 ($\alpha_1 = 1,746 \times 10^5$ rad/s, $\Delta\Phi = 0,002$ rad)

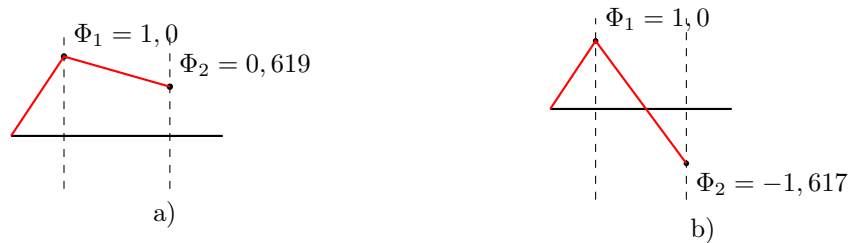
P-t obl	B (kgm ²)	$B\alpha^2$ (Nm)	Φ (rad)	$B\alpha^2\Phi$ (Nm)	$\Sigma B\alpha^2\Phi$ (Nm)	k (Nm/rad)	$\Sigma B\alpha^2\Phi/k$ (rad)
1	10^{-5}	$3,05 \times 10^5$	1,0	$3,05 \times 10^5$	$3,05 \times 10^5$	8×10^5	0,381
2	10^{-5}	$3,05 \times 10^5$	0,619	$1,89 \times 10^5$	$4,93 \times 10^5$	8×10^5	0,617

Wyniki obliczeń przedstawione w Tabeli obliczeniowej 3 wskazują, że pierwsza częstość drgań własnych skrętnych wynosi $\alpha_1 = 1.746 \times 10^5$ rad/s. Przeprowadzając analogiczny cykl obliczeń możemy wyznaczyć wartość drugiej częstości drgań własnych, która wynosi $\alpha_2 = 4.576 \times 10^5$ rad/s, patrz Tabela 4.

Tabela 4: Tabela obliczeniowa 4 ($\alpha_2 = 4,576 \times 10^5$ rad/s, $\Delta\Phi = -0,002$ rad)

P-t obl	B (kgm ²)	$B\alpha^2$ (Nm)	Φ (rad)	$B\alpha^2\Phi$ (Nm)	$\Sigma B\alpha^2\Phi$ (Nm)	k (Nm/rad)	$\Sigma B\alpha^2\Phi/k$ (rad)
1	10^{-5}	$20,94 \times 10^5$	1,0	$20,94 \times 10^5$	$20,94 \times 10^5$	8×10^5	2,617
2	10^{-5}	$20,94 \times 10^5$	-1,617	$-33,86 \times 10^5$	$-12,92 \times 10^5$	8×10^5	-1,615

Główne postacie drgań własnych skrętnych rozpatrywanego układu określają stosunki amplitud drgań odpowiadające wyznaczonym częstościom drgań własnych. Stosunki te można odczytać odpowiednio z czwartej kolumny Tabeli 3 dla pierwszej częstości drgań własnych oraz z czwartej kolumny Tabeli 4 dla drugiej częstości drgań własnych. Główne postacie drgań w postaci graficznej przedstawia Rys. 4.

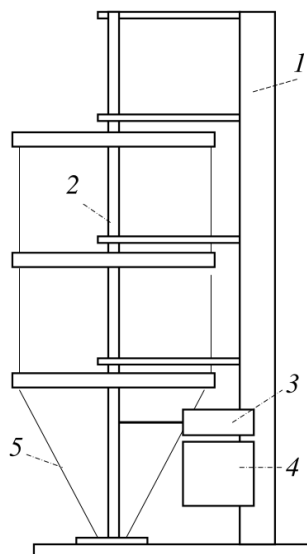


Rysunek 4: Główne postacie drgań odpowiadające: a) pierwszej oraz b) drugiej częstości drgań własnych

3 Stanowisko pomiarowe

Schemat stanowiska pomiarowego przedstawia Rys. 5. Składa się ono z pionowej kolumny 1 z podstawą oraz wału 2 o długości 0.8 m i średnicy 0.004 m z osadzonymi nań trzema tarczami. Dolny koniec wału jest utwierdzony, a

górny koniec łożyskowany w sposób umożliwiający jego swobodny obrót. Drgania skrętne układu wymuszane są kinematycznie za pośrednictwem mechanizmu dźwigniowego 3. Wartość regulowanej częstości wymuszenia odczytuje się na mierniku 4. Nitki 5 połączone z tarczami pokazują odpowiednie postacie kąta skręcenia wału.



Rysunek 5: Schemat stanowiska pomiarowego

4 Przebieg ćwiczenia

1. Metodą Holzera obliczyć wartości częstości drgań własnych skrętnych układu wykorzystując w tym celu zamieszczoną poniżej tabelę obliczeniową. Na początku obliczeń należy przyjąć kolejno wartości krańcowe α ze spodziewanego zakresu częstości, w którym należy prowadzić poszukiwania. Uzyskane w ten sposób wyniki dotyczące resztkowych wartości amplitudy $\Delta\Phi$ ułatwiają określenie dokładnej wartości α po zawężeniu obszaru poszukiwań do tych wartości częstości, przy których występuje zmiana znaku $\Delta\Phi$. Do wykonania obliczeń można wykorzystać arkusz kalkulacyjny budując tabelę z formułami wyliczającymi wartości kolejnych kątów Φ_i , $i = 2, 1, 0$, (wzory (6)–(8)) dla założonej wartości kąta $\Phi_3 = 1$ rad.

	A	B	C	D	E	F
1	f	α	Φ_3	$\Phi_2 = \Phi_3 - \frac{B\Phi_3\alpha^2}{k}$	$\Phi_1 = \Phi_2 - \frac{B\Phi_2\alpha^2 + B\Phi_3\alpha^2}{k}$	$\Phi_0 = \Phi_1 - \frac{B\Phi_1\alpha^2 + B\Phi_2\alpha^2 + B\Phi_3\alpha^2}{k_1}$
2	Hz	rad/s	rad	rad	rad	rad
3	1	6.28	1	0.9745	0.9241	0.7762
4	2	12.56	1	0.8980	0.7043	0.1732

Rysunek 6: Schemat obliczeń w arkuszu kalkulacyjnym, schemat jak na Rys. 1

Dane liczbowe:

$B = 0.0085 \text{ kgm}^2$; $k = 13.14 \text{ Nm/rad}$; $k_1 = 6.57 \text{ Nm/rad}$;

$\Delta\alpha_1 = 2 \text{ Hz} \div 2.5 \text{ Hz}$ – spodziewany zakres częstości, w którym należy poszukiwać 1. częstości własnej;

$\Delta\alpha_2 = 6.8 \text{ Hz} \div 7.2 \text{ Hz}$ – spodziewany zakres częstości, w którym należy poszukiwać 2. częstości własnej;

$\Delta\alpha_3 = 10 \text{ Hz} \div 12 \text{ Hz}$ – spodziewany zakres częstości, w którym należy poszukiwać 3. częstości własnej.

2. Uruchomić układ wzbudzający drgania skrętne tarcz i dokonać pomiaru trzech kolejnych częstości rezonansowych, przy których obserwuje się występowanie lokalnych maksimów amplitudy drgań skrętnych tarcz. Kąty skręcenia tarcz obserwuje się za pomocą nitki, które przy zmianie położenia tarcz przy częstościach rezonansowych tworzą kształty odpowiadające głównym postaciom drgań.
3. Odczytane z miernika wartości częstości rezonansowych zamieścić w tabeli pomiarowej.
4. Narysować zaobserwowane postacie drgań.
5. Dokonać porównania wyników obliczeń z rezultatami badań doświadczalnych i sformułować własne wnioski.

5 Literatura

1. Kapitaniak T.: Wstęp do teorii drgań, Wydawnictwo PŁ, Łódź 1992.
2. Parszewski Z.: Dynamika i drgania maszyn. WNT, Warszawa 1982.
3. Osiński Z.: Teoria drgań, PWN, Warszawa 1978.

LABORATORIUM
DRGAŃ
MECHANICZNYCH

Ćwiczenie 5

WYZNACZANIE CZĘSTOŚCI REZONANSOWYCH
DRGAŃ SKRĘTNYCH WAŁU

Grupa: _____
Zespół: _____

data _____

Imię i nazwisko:

1. _____
2. _____
3. _____
4. _____
5. _____
6. _____

WYNIKI

Częstości drgań skrętnych		Wyniki pomiarów				Wyniki obliczeń α		
		pomiar			Częstość średnia α_n	różnica względna	Częstość własna f	α
		1	2	3	[Hz]	[%]	[Hz]	[rad/s]
I								
II								
III								

Rysunki zaobserwowanych postaci drgań

Wnioski