

WYZNACZANIE CZĘSTOŚCI REZONANSOWYCH DRGAŃ SKRĘTNYCH WAŁU

Drgania i Dynamika Maszyn – Ćwiczenie 5*

1 Cel ćwiczenia

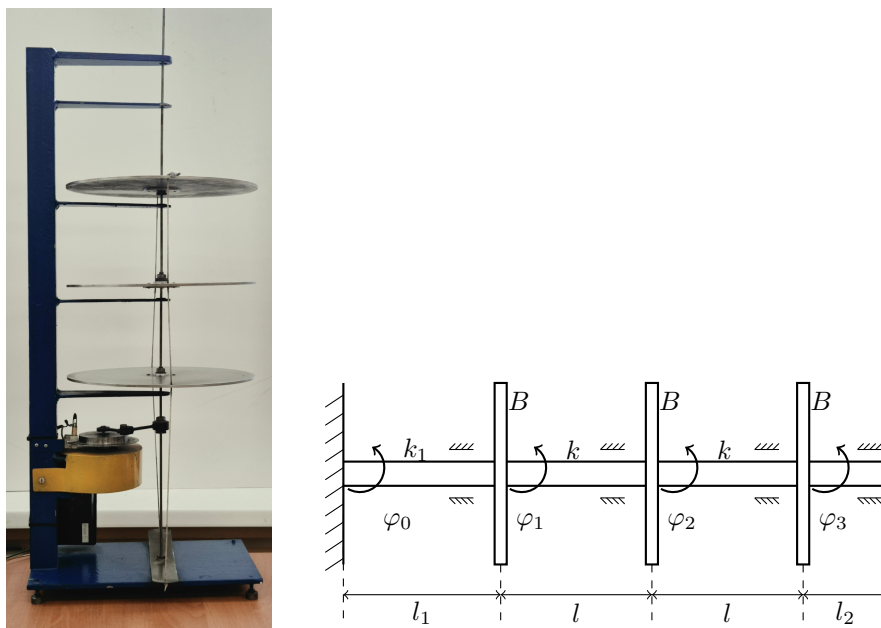
Pomiar częstości rezonansowych drgań skrętnych wału z trzema tarczami i obserwacja odpowiadających im postaci skręcenia wału oraz porównanie wartości częstości rezonansowych uzyskanych z pomiarów z częstościami drgań własnych obliczonymi analitycznie metodą Holzera.

2 Wprowadzenie teoretyczne

Metoda Holzera jest klasyczną już, iteracyjną metodą numeryczno-tabelaryczną służącą do wyznaczania częstości drgań własnych oraz postaci drgań (amplitud) przy tych częstościach dla modeli układów dyskretnych o wielu stopniach swobody, szczególnie w odniesieniu do drgań skrętnych. Najczęściej stosuje się ją do analizy złożonych układów wirnikowych, wałów napędowych, silników spalinowych czy maszyn wirnikowych, które można modelować jako zastępczy układ mas i sprężystych wałów. Ciągły układ wirujący wałów i mas (np. tłoków, koła zamachowego, śruby napędowej) sprowadza się do dyskretnego układu składającego się z mas (dysków o momentach bezwładności B_i) połączonych odcinkami wałów o sztywności skrętnej k_i .

Metoda Holzera jest wersją metody prób i błędów. Obliczenia rozpoczyna się od założenia wartości częstości kołowej drgań własnych f (lub częstość α). Dalej w sposób tabelaryczny (łatwy do zaprogramowania nawet w arkuszu kalkulacyjnym) zakłada się jednostkową amplitudę początkową (kąt skręcenia) dla pierwszego elementu, oblicza się kolejno szukane wielkości dla każdego następnego segmentu układu. Obliczenia prowadzi się od jednego końca układu do drugiego. Otrzymana na końcu wartość resztkowa (momentu lub kąta skręcenia) wskazuje, czy przyjęta częstość f była poprawna. Jeśli warunek równowagi na swobodnym lub utwierdzonym końcu nie jest spełniony (reszta nie wynosi zero), modyfikuje się wartość f i powtarza iterację aż do uzyskania zbieżności.

Zastosowanie metody ma miejsce dla modelu stanowiska eksperymentalnego dla rozpatrywanego układu drgającego przedstawia Rys. 1 będący układem o trzech stopniach swobody. Rozpatruje się drgania własne skrętne układu, gdy wał jest utwierdzony na jednym z końców. Na wale o sztywnościach k_1 i k osadzone są trzy jednakowe tarcze o momencie bezwładności B .



Rysunek 1: Stanowisko eksperymentalne po lewej i model układu drgającego po prawej

*Autor: J. Wawtzecki, w: LABORATORIUM DRGAŃ MECHANICZNYCH, K. Marynowski (red), Łódź 2002. Modyfikacje: B. Jagiełło, J. Wojewoda 2026

Równania różniczkowe ruchu mają następującą postać:

$$\begin{aligned} B\ddot{\varphi}_1 + k(\varphi_1 - \varphi_2) + k_1(\varphi_1 - \varphi_0) &= 0 \\ B\ddot{\varphi}_2 + k(\varphi_2 - \varphi_3) - k(\varphi_1 - \varphi_2) &= 0 \\ B\ddot{\varphi}_3 - k(\varphi_2 - \varphi_3) &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

W celu wyznaczenia częstości drgań własnych skrzętnych układu zastosowano metodę Holzera. Rozwiązania szczególne układu równań (1) przewiduje się w postaci funkcji harmoniczych:

$$\varphi_1 = \Phi_1 \sin \alpha t; \quad \varphi_2 = \Phi_2 \sin \alpha t; \quad \varphi_3 = \Phi_3 \sin \alpha t, \quad (2)$$

gdzie: α – poszukiwana częstość własna drgań swobodnych, Φ_1, Φ_2, Φ_3 – amplitudy drgań skrzętnych poszczególnych tarcz. Po podstawieniu rozwiązań (2) do układu równań różniczkowych (1) otrzymuje się układ równań algebraicznych:

$$B\Phi_1\alpha^2 - k(\Phi_1 - \Phi_2) - k_1(\Phi_1 - \Phi_0) = 0; \quad (3)$$

$$B\Phi_2\alpha^2 - k(\Phi_2 - \Phi_3) + k(\Phi_1 - \Phi_2) = 0; \quad (4)$$

$$B\Phi_3\alpha^2 + k(\Phi_2 - \Phi_3) = 0. \quad (5)$$

Układ równań (3)–(5) jest podstawą programu obliczeń częstości drgań własnych skrzętnych badanego układu. Zakłada się dowolną wartość amplitudy drgań tarczy trzeciej Φ_3 , np. $\Phi_3 = 1$ rad, i wstawiając następnie wartość α ze spodziewanego zakresu częstości, na podstawie (5) wyznacza się wartość amplitudy Φ_2 :

$$\Phi_2 = \Phi_3 - \frac{B\Phi_3\alpha^2}{k} \quad (6)$$

Wyznaczoną wartość Φ_2 uwzględnia się w równaniu (5.4) i oblicza wartość amplitudy Φ_1 :

$$\Phi_1 = \Phi_2 - \frac{B\Phi_2\alpha^2 + B\Phi_3\alpha^2}{k} \quad (7)$$

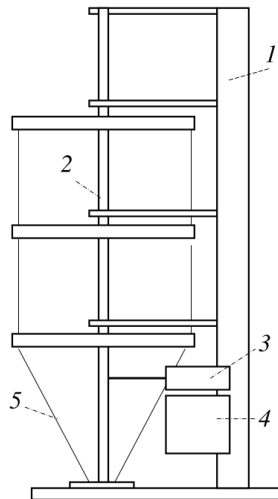
Wyznaczoną wartość Φ_1 uwzględnia się w równaniu (5.3) i oblicza się wartość amplitudy Φ_0 :

$$\Phi_0 = \Phi_1 - \frac{B\Phi_1\alpha^2 + B\Phi_2\alpha^2 + B\Phi_3\alpha^2}{k_1} \quad (8)$$

Jeśli α jest częstością własną rozpatrywanego układu, to musi być spełniony warunek brzegowy $\Phi_0 = 0$. Powyższy opis wskazuje, że **metoda Holzera zastosowana do rozpatrywanego układu polega na poszukiwaniu miejsc zerowych funkcji (8)**. Dzieje się to poprzez wyznaczanie wartości tej funkcji dla kolejno przyjmowanych wartości α . Jeśli założona wartość α nie jest częstością własną układu również nie będzie spełniony warunek brzegowy zerowania się amplitudy Φ_0 . Przyjmowane wartości α zagęszcza się w okolicy miejsca zerowego (zmiany znaku wartości Φ_0), aż do osiągnięcia zerującej wartości α (częstości własnej) z żadaną dokładnością.

3 Stanowisko pomiarowe

Schemat stanowiska pomiarowego przedstawia Rys. 2. Składa się ono z pionowej kolumny 1 z podstawą oraz wału 2 o długości $l = 0.8$ m i średnicy $d = 0.004$ m z osadzonymi nań trzema tarczami. Dolny koniec wału jest utwierdzony, a górny koniec łożyskowany w sposób umożliwiający jego swobodny obrót. Drgania skrzętne układu wymuszane są kinematycznie za pośrednictwem mechanizmu dźwigniowego 3. Wartość regulowanej częstości wymuszenia odczytuje się na mierniku 4. Nitki 5 połączone z tarczami pokazują odpowiednie postacie kąta skrzywienia wału.



Rysunek 2: Schemat stanowiska pomiarowego po lewej, urządzenie sterująco-pomiarowe ZPA 83 po prawej

Urządzenie ZPA 83 pozwala na regulację prędkości obrotowej – częstotliwości wymuszenia drgań – w zakresie od 1 do 15 Hz, gdzie można zidentyfikować trzy prędkości krytyczne.

4 Przebieg ćwiczenia

1. Metodą Holzera obliczyć wartości częstości drgań własnych skrętnych układu wykorzystując w tym celu zamieszczoną poniżej tabelę obliczeniową. Na początku obliczeń należy przyjąć kolejno wartości krańcowe α ze spodziewanego zakresu częstości (tutaj 1–15 Hz), w którym należy prowadzić poszukiwania. Uzyskane w ten sposób wyniki dotyczące resztkowych wartości amplitudy Φ_0 ułatwiają określenie dokładnej wartości α po zawężeniu obszaru poszukiwań do tych wartości częstości, przy których występuje zmiana znaku Φ_0 .

Do wykonania tych obliczeń można wykorzystać arkusz kalkulacyjny, w którym należy zbudować tabelę ze schematem zawierającym formuły wyliczające wartości kolejnych kątów Φ_i , $i = 3, 2, 1, 0$, (wzory (6)–(8)), startując z założonej wartości kąta $\Phi_3 = 1$ rad. Zakres wymuszeń f od 1 do 15 Hz, jak na Rys. 3.

	A	B	C	D	E	F
1	f	α	Φ_3	$\Phi_2 = \Phi_3 - \frac{B\Phi_3\alpha^2}{k}$	$\Phi_1 = \Phi_2 - \frac{B\Phi_2\alpha^2 + B\Phi_3\alpha^2}{k}$	$\Phi_0 = \Phi_1 - \frac{B\Phi_1\alpha^2 + B\Phi_2\alpha^2 + B\Phi_3\alpha^2}{k_1}$
2	Hz	rad/s	rad	rad	rad	rad
3	1	6.28	1	0.9745	0.9241	0.7762
4	2	12.56	1	0.8978	0.7040	0.1724

Rysunek 3: Tabela obliczeniowa w arkuszu kalkulacyjnym, schemat układu drgającego wg Rys. 1

Po zbudowaniu tabeli należy wykonać wykres wartości $\Phi_0(f)$, co pozwoli określić w przybliżeniu miejsca zerowe takiej zależności. Występują one oczywiście pomiędzy wartościami f odpowiadającymi zmianie znaku Φ_0 w ostatniej kolumnie tabeli. Dokładniej można to zrobić wykorzystując wbudowaną do arkusza kalkulacyjnego funkcję poszukiwania wyniku zbudowanej zależności: NARZĘDZIA – SZUKAJ WYNIKU. Należy znaleźć komórkę Φ_0 w okolicy jej zmiany znaku, wskazując ją jako komórkę formuły. Wartość docelowa to oczywiście 0, a jako komórkę podlegającą zmianom w procesie poszukiwania podać wartość częstości f w tym samym wierszu. Wynikiem – wartością własną – jest zmieniona przez procedurę poszukiwania wartość f .

Hz	rad/s	rad	rad	rad	rad
1	6.2832	1	0.9745	0.9240	0.7760
2	12.566	1	0.8978	0.7040	0.1724
3	18.85	1	0.7702	0.3633	-0.6174
4	25.133	1	0.591	-0.0882	-1.3113
5	31.416	1	0.361	-1.5980	-1.2214
6	37.699	1	0.080	-0.0882	-0.0882
7	43.982	1	-0.251	1.6000	3.1909
8	50.265	1	-0.634	3.4017	0.1149
9	56.549	1	-1.068	-9.8491	-9.8491
10	62.832	1	-1.553		
11	69.115	1	-2.090		
12	75.398	1	-2.677		

Rysunek 4: Pole dialogowe funkcji SZUKAJ WYNIKU

Dane liczbowe: $B = 0.0085 \text{ kgm}^2$; $k = 13.14 \text{ Nm/rad}$; $k_1 = 6.57 \text{ Nm/rad}$;

2. Uruchomić układ wzbudzający drgania skrętne tarcz i dokonać pomiaru trzech kolejnych częstości rezonansowych, przy których obserwuje się występowanie lokalnych maksimów amplitudy drgań skrętnych tarcz. Poszukiwania wykonać w pobliżu zidentyfikowanych powyżej wartości f wyznaczonych numerycznie. Kąty skreślenia tarcz (postacie drgań), obserwuje się za pomocą linii ugięcia nitki, które przy zmianie położenia tarcz przy częstościach rezonansowych tworzą kształty odpowiadające głównym postaciom drgań.
3. Odczytane z miernika wartości częstości rezonansowych zamieścić w tabeli pomiarowej.
4. Narysować zaobserwowane postacie drgań.
5. Dokonać porównania wyników obliczeń z rezultatami badań doświadczalnych i sformułować własne wnioski.

5 Literatura

1. Kapitaniak T.: Wstęp do teorii drgań, Wydawnictwo PŁ, Łódź 1992.
2. Parszewski Z.: Dynamika i drgania maszyn. WNT, Warszawa 1982.
3. Osiński Z.: Teoria drgań, PWN, Warszawa 1978.

LABORATORIUM
DRGAŃ
MECHANICZNYCH

Ćwiczenie 5

WYZNACZANIE CZĘSTOŚCI REZONANSOWYCH
DRGAŃ SKRĘTNYCH WAŁU

Grupa: _____
Zespół: _____

data _____

Imię i nazwisko:

1. _____
2. _____
3. _____
4. _____
5. _____
6. _____

WYNIKI

Częstości własne drgań skrętnych	Pomiary				Obliczenia		Różnica względna
	pomiar			średnia	cz. własna f	częstość własna α	$(f_{pom} - f_{obl})/f_{obl} \cdot 100$
	1	2	3	Hz	Hz	rad/s	%
I							
II							
III							

Rysunki zaobserwowanych postaci drgań

Wnioski