

BADANIE DYNAMICZNEGO TŁUMIKA DRGAŃ

Drgania i Dynamika Maszyn – Ćwiczenie 9*

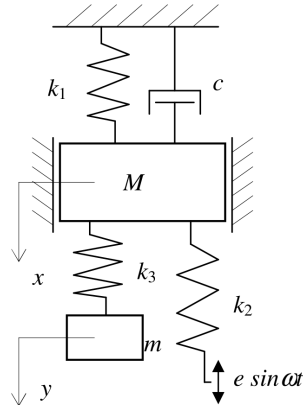
1 Cel ćwiczenia

Wy tłumienie drgań układu o jednym stopniu swobody (z ćwiczenia 2) pracującego z dużą amplitudą drgań (w swojej częstotliwości rezonansowej) za pomocą dynamicznego tłumika drgań (dodanego podukładu tworzącego drugi stopień swobody). Wyznaczenie zakresu częstotliwości wymuszenia, w którym tłumik skutecznie obniża poziom drgań układu głównego.

2 Wprowadzenie teoretyczne

Rozpatrywany jest model układu drgającego o dwóch stopniach swobody (Rys. 1). Równania różniczkowe ruchu masy głównej M i masy m tłumika dynamicznego mają następującą postać:

$$\begin{aligned} M\ddot{x} + c\dot{x} + (k_1 + k_2 + k_3)x - k_3y &= k_2e \sin \omega t \\ m\ddot{y} + k_3y - k_3x &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$



Rysunek 1: Model fizyczny układu

Po podzieleniu stronami obu równań przez masy otrzymuje się:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \frac{c}{M}\dot{x} + \frac{k_1 + k_2 + k_3}{M}x - \frac{k_3}{M}y &= \frac{k_2e}{M} \sin \omega t \\ \ddot{y} + \frac{k_3}{m}y - \frac{k_3}{m}x &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Uwzględniając w równaniach (2) oznaczenia:

$$2h = \frac{c}{M}; \quad a = \frac{k_1 + k_2 + k_3}{M}; \quad b = \frac{k_3}{M}; \quad q = \frac{k_2e}{M}; \quad r = \frac{k_3}{m}, \quad (3)$$

otrzymuje się następujący układ równań:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + 2h\dot{x} + ax - by &= q \sin \omega t \\ \ddot{y} + ry - rx &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

*W: LABORATORIUM DRGAŃ MECHANICZNYCH, K. Marynowski (red), Łódź 2002

Zakłada się, że rozwiązania szczególne układu równań (4) mają postać:

$$\begin{aligned}x &= A \sin \omega t + B \cos \omega t \\y &= C \sin \omega t + D \cos \omega t.\end{aligned}\tag{5}$$

Po wstawieniu rozwiązań do równań ruchu (4) otrzymuje się

$$\begin{aligned}&-A\omega^2 \sin \omega t - B\omega^2 \cos \omega t + 2h(A\omega \cos \omega t - B\omega \sin \omega t) + \\&+ aA \sin \omega t + aB \cos \omega t - bC \sin \omega t - bD \cos \omega t = q \sin \omega t \\&-C\omega^2 \sin \omega t - D\omega^2 \cos \omega t + rC \sin \omega t + \\&+ rD \cos \omega t - rA \sin \omega t - rB \cos \omega t = 0.\end{aligned}\tag{6}$$

Aby równania te były spełnione w każdej chwili czasu, muszą być spełnione równania powstałe przez przyrównanie składników obu stron powyższych równań, zawierających oddzielnie wyrazy z $\sin \omega t$ oraz $\cos \omega t$. Po uporządkowaniu powstaje układ 4 równań algebraicznych:

$$\begin{aligned}(a - \omega^2)A - 2h\omega B - bC + 0D &= q \\2h\omega A + (a - \omega^2)B + 0C - bD &= 0 \\-rA + 0B + (r - \omega^2)C + 0D &= 0 \\0A - rB + 0C + (r - \omega^2)D &= 0.\end{aligned}\tag{7}$$

Do wyznaczenia wartości składowych amplitud przemieszczeń A, B, C oraz D oblicza się wyznacznik główny układu równań algebraicznych (7):

$$W = \begin{vmatrix} (a - \omega^2) & -2h\omega & -b & 0 \\ 2h\omega & (a - \omega^2) & 0 & -b \\ -r & 0 & (r - \omega^2) & 0 \\ 0 & -r & 0 & (r - \omega^2) \end{vmatrix},\tag{8}$$

którego wartość określa:

$$W = [(a - \omega^2)(r - \omega^2) - br]^2 + 4h^2\omega^2(r - \omega^2)^2.\tag{9}$$

Stosując wzory Cramera oblicza się kolejne wyznaczniki:

$$W_A = \begin{vmatrix} q & -2h\omega & -b & 0 \\ 0 & (a - \omega^2) & 0 & -b \\ 0 & 0 & (r - \omega^2) & 0 \\ 0 & -r & 0 & (r - \omega^2) \end{vmatrix} = q(r - \omega^2)(a - \omega^2)(r - \omega^2) - br,\tag{10}$$

$$W_B = \begin{vmatrix} (a - \omega^2) & q & -b & 0 \\ 2h\omega & 0 & 0 & -b \\ -r & 0 & (r - \omega^2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (r - \omega^2) \end{vmatrix} = -2qh\omega(r - \omega^2)^2.\tag{11}$$

Amplitudy składowych drgań masy głównej M określają wzory:

$$A = \frac{W_A}{W}; \quad B = \frac{W_B}{W}.\tag{12}$$

Amplitudę drgań masy układu głównego otrzymuje się sumując geometrycznie stałe A i B

$$A_1 = \sqrt{A^2 + B^2} = \frac{\sqrt{W_A^2 + W_B^2}}{W}.\tag{13}$$

Po uwzględnieniu (9)–(11) we wzorze (13) mamy

$$A_1 = \frac{q\sqrt{(r - \omega^2)^2} \sqrt{[(a - \omega^2)(r - \omega^2) - br]^2 + 4h^2\omega^2(r - \omega^2)^2}}{[(a - \omega^2)(r - \omega^2) - br]^2 + 4h^2\omega^2(r - \omega^2)^2},\tag{14}$$

stąd:

$$A_1 = q \frac{|r - \omega^2|}{\sqrt{[(a - \omega^2)(r - \omega^2) - br]^2 + 4h^2\omega^2(r - \omega^2)^2}}. \quad (15)$$

Przy braku dynamicznego tłumika drgań (braku masy m i sprężyny k_3), czyli $b = r = 0$, stąd $a = (k_1 + k_2)/M = \alpha^2$, otrzymuje się znany wzór

$$A_0 = q \frac{|-\omega^2|}{\sqrt{(a - \omega^2)^2\omega^4 + 4h^2\omega^2\omega^4}} = \frac{q}{\sqrt{(\alpha^2 - \omega^2)^2 + 4h^2\omega^2}} \quad (16)$$

określający amplitudę drgań układu liniowego o jednym stopniu swobody. Kąt przesunięcia fazowego między wymuszeniem a ruchem masy M jest określony wzorem:

$$\begin{aligned} \varphi_1 = \arctan \frac{B}{A} &= \frac{-2qh\omega(r - \omega^2)^2}{q(r - \omega^2)[(a - \omega^2)(r - \omega^2) - br]} = \\ &= \frac{-2h\omega(r - \omega^2)}{(a - \omega^2)(r - \omega^2) - br}. \end{aligned} \quad (17)$$

2.1 Przykład analitycznego wyznaczenia amplitudy A_1 oraz kąta przesunięcia fazowego φ_1 dla określonych parametrów układu

Przyjmując następujące wartości bezwymiarowych parametrów rozpatrywanego układu:

$$4 \times 2h = \frac{a}{2} = b = r = q = 1, \quad (18)$$

otrzymuje się wyrażenie na amplitudę drgań masy M w postaci:

$$A_1 = \frac{|1 - \omega^2|}{\sqrt{[(2 - \omega^2)(1 - \omega^2) - 1]^2 + \frac{\omega^2}{16}(1 - \omega^2)^2}}, \quad (19)$$

oraz wzór na kąt przesunięcia fazowego:

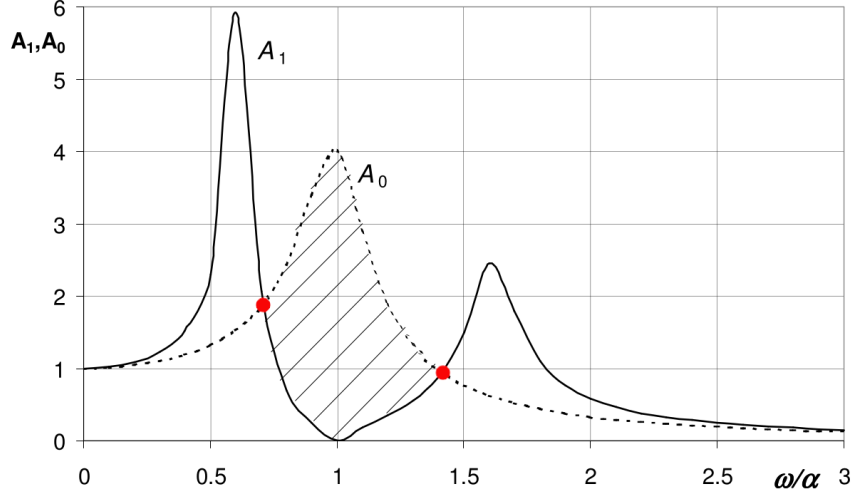
$$\varphi_1 = \arctan \frac{-\frac{\omega}{4}(1 - \omega^2)}{(2 - \omega^2)(1 - \omega^2) - 1}. \quad (20)$$

Dla układu głównego bez dynamicznego tłumika drgań jest odpowiednio:

$$A_0 = \frac{1}{\sqrt{(1 - \omega^2)^2 + \frac{\omega^2}{16}}}; \quad \varphi_0 = \arctan \frac{-\omega}{4(1 - \omega^2)}. \quad (21)$$

Zależności wartości amplitud A_1 i A_0 od częstości wymuszenia przedstawia Rys. 2. Na tym rysunku został zakreślony obszar korzystnego oddziaływania tłumika.

Z analizy wzoru na amplitudę A_1 i z Rys. 2 wynika, że dla częstości wymuszenia równej częstości drgań własnych tłumika ($\omega^2 = r$) następuje całkowite wygaszenie drgań masy głównej M . Dla urządzeń pracujących przy stałej częstości należy nastroić tłumik na tę częstość pracy. Jeżeli częstość wymuszenia nie jest równa częstości drgań własnych tłumika, tłumienie jest niepełne i poza korzystnym przedziałem częstości fakt dołączenia tłumika dynamicznego pogarsza stan dynamiczny układu.



Rysunek 2: Porównanie wykresów rezonansowych układu o 1 stopniu swobody (linia przerywana) z układem z dodanym dynamicznym tłumikiem drgań (drugi stopień swobody, linia ciągła)

Częstości wymuszenia ω , dla których amplitudy drgań układu głównego z tłumikiem oraz bez tłumika są sobie równe, obliczyć można przyrównując amplitudy A_1 oraz A_0 . Korzystając ze wzorów (15) i (16) otrzymuje się:

$$q \frac{|r - \omega^2|}{\sqrt{[(a - \omega^2)(r - \omega^2) - br]^2 + 4h^2\omega^2(r - \omega^2)^2}} = \frac{q}{\sqrt{(\alpha^2 - \omega^2)^2 + 4h^2\omega^2}}. \quad (22)$$

gdzie: $a = \frac{k_1+k_2+k_3}{M} = \frac{k_1}{M} + \frac{k_2}{M} + \frac{k_3}{M} = \alpha^2 + \frac{q}{e} + b$.

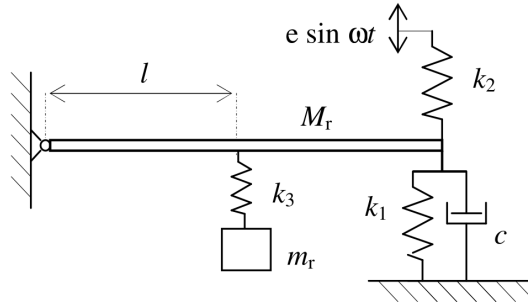
Porównanie amplitud we wzorze (22) można zapisać w następującej postaci:

$$\begin{aligned} (r - \omega^2)^2 [(\alpha^2 - \omega^2)^2 + 4h^2\omega^2] = \\ = \left[\left(\alpha^2 - \omega^2 + \frac{q}{e} + b \right) (r - \omega^2) - br \right]^2 + 4h^2\omega^2(r - \omega^2)^2. \end{aligned} \quad (23)$$

Wyznaczone z równości (23) wartości częstości wymuszenia ω określają przedział korzystnego oddziaływania dynamicznego tłumika drgań (na Rys. 2 – pomiędzy czerwonymi punktami).

3 Stanowisko pomiarowe

Budowę układu drgającego zwanego dalej układem głównym przedstawiono dokładnie w opisie stanowiska pomiarowego w Ćwiczeniu 2. Do układu głównego dołączony został tłumik dynamiczny składający się z masy m_r i sprężyny płaskiej o sztywności k_3 . Schemat układu drgającego wraz z tłumikiem przedstawia Rys. 3. Sposób pomiaru amplitud i częstości wymuszenia opisano w Ćwiczeniu 2.



Rysunek 3: Schemat stanowiska pomiarowego

4 Przebieg ćwiczenia

1. Doświadczalne wyznaczanie krzywej rezonansowej układu głównego.
 - (a) Dla kolejnych wartości prędkości kątowych zadanych w tabeli pomiarowej należy zmierzyć wartości amplitud drgań układu bez dynamicznego tłumika drgań.
 - (b) Na podstawie danych z tabeli pomiarowej sporządzić doświadczalny wykres rezonansowy dla układu bez tłumika.
 - (c) Określić współrzędne wierzchołka wykresu rezonansowego (A_m, ω_m) .
2. Obliczenia częstości drgań własnych układu głównego dokonuje się wg wzorów (10) zamieszczonych w opisie Ćwiczenia 2.
3. Dobór dynamicznego tłumika drgań dla zadanej częstości. Należy wytłumić drgania wymuszone układu głównego o częstości równej jego częstości drgań własnych α . Wtedy częstość drgań własnych dynamicznego tłumika drgań α_t musi być równa częstości drgań własnych układu głównego α . Długość l sprężyny tłumika dynamicznego musi być zatem tak dobrana, aby spełniony był warunek

$$\alpha_t = \alpha. \quad (a)$$

Należy zwrócić uwagę na fakt, że wraz ze zmianą długości sprężyny l ulegają zmianie sztywność sprężyny k_{3r} , oraz masa zredukowana m_r biorąca udział w ruchu. Obie te wielkości mają wpływ na wartość α_t . Wartości k_{3r} i m_r można otrzymać wykorzystując w obliczeniach np. metodę Rayleigh'a

$$k_{3r} = \frac{3EJ}{l^3}; \quad m_r = m + \frac{1}{5}\mu l, \quad (b)$$

gdzie:

E – moduł sprężystości podłużnej materiału sprężyny płaskiej,

J – moment bezwładności przekroju sprężyny zginanej,

$\mu = \frac{m_b}{l}$ – masa jednostkowa belki (sprężyny).

Ponieważ częstość drgań własnych dynamicznego tłumika drgań określa zależność

$$\alpha_t^2 = \frac{k_{3r}}{m_r}, \quad (c)$$

to po wstawieniu (b) do (c) oraz uwzględnieniu warunku (a), otrzymuje się po przekształceniach

$$\frac{1}{5}\alpha^2\mu l^4 + \alpha^2 m l^3 - 3EJ = 0. \quad (d)$$

Równanie (d) jest równaniem czwartego stopnia z niewiadomą l i w trakcie wykonywania ćwiczenia rozwiązywane jest metodą numeryczną. W wyniku otrzymujemy poszukiwaną długość l sprężyny płaskiej dynamicznego tłumika drgań.

Do rozwiązania można wykorzystać arkusz kalkulacyjny i wbudowaną wewnątrz funkcję poszukiwania celu. Wystarczy w kolejnych komórkach wprowadzić wartości parametrów użytych w równaniu (d) – μ , m , E , J . Wartość komórki l z dowolną wartością początkową, np. 0.5 (metra) to komórka, którą rzeczona funkcja będzie zmieniać (wykorzystywać) do poszukiwania wartości zerowej w ostatniej komórce, która zawierać będzie formułę wyrażenia (d). Wynik działania poszukiwania wartości zerowej tej komórki będzie rozwiązaniem równania (d), a zatem wartością l sugerowaną do ustawienia długości sprężyny.

Materiałem, z którego wykonano sprężynę będącą tłumikiem dynamicznym, jest brąz krzemowy, którego wartość modułu Younga E należy znaleźć w tablicach inżynierskich. Sposobem na weryfikację tak założonej wartości może być znalezienie eksperymentalne takiej długości l_{min} , dla której drgania masy głównej są minimalne i wykorzystanie tej wartości jako parametru do kontroli za pomocą funkcji wyszukiwania celu przy ustawieniu jako zmiennej wartości parametru E .

4. Doświadczalne wyznaczenie krzywej rezonansowej dla układu głównego z dynamicznym tłumikiem drgań. Przeprowadza się analogicznie jak pomiary dla uzyskania krzywej rezonansowej bez dynamicznego tłumika (punkt 1).
5. Z porównania obu wykresów rezonansowych odczytuje się wartości częstości wymuszenia ω_1 i ω_2 , dla których amplitudy drgań układu głównego z tłumikiem dynamicznym i bez niego są sobie równe. Należy sprawdzić zgodność otrzymanych wyników ze wzorem (3.23).

5 Literatura

1. Kaliski S.: Drgania i fale. PWN, Warszawa 1966.
2. Parszewski Z.: Dynamika i drgania maszyn. WNT, Warszawa 1982.
3. Kapitaniak T.: Wstęp do teorii drgań, Wydawnictwo PŁ, Łódź 1992.

LABORATORIUM
DRGAŃ
MECHANICZNYCH

Ćwiczenie 9
BADANIE DYNAMICZNEGO TŁUMIKA DRGAŃ

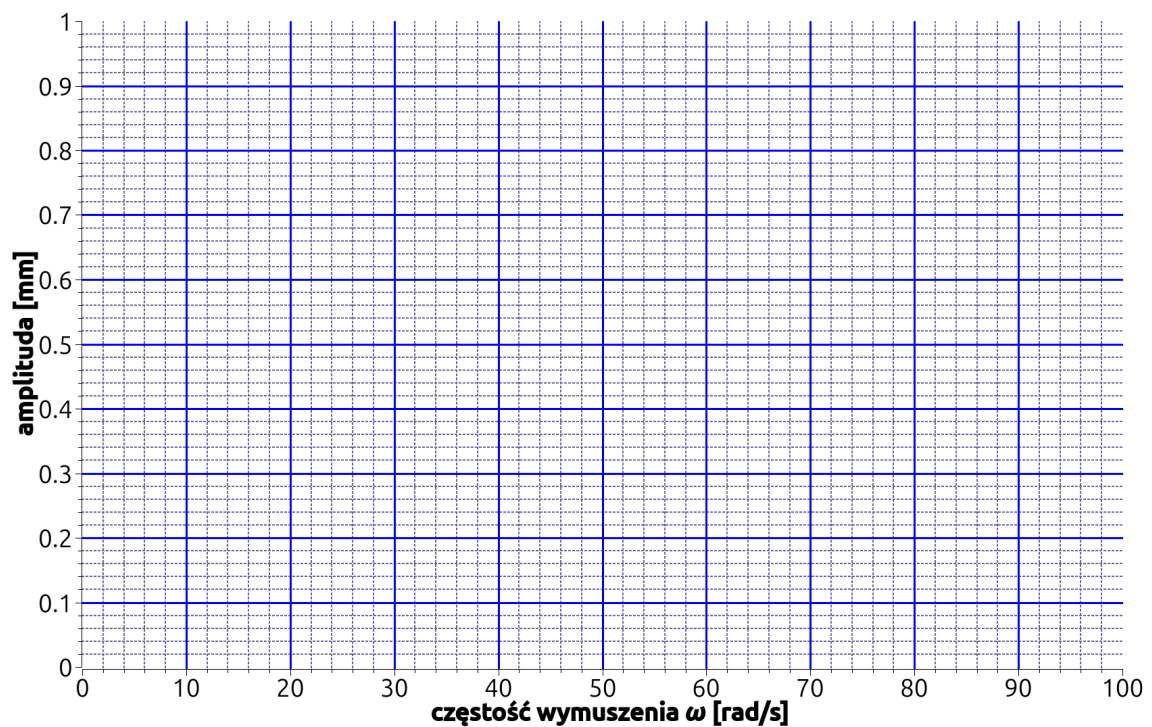
Grupa: _____ data _____ Imię i
Zespół: _____

nazwisko:

1. _____
2. _____
3. _____
4. _____
5. _____
6. _____

Wyniki pomiarów

Częstości drgań		Układ bez tłumika	Układ z tłumikiem
Nr pomiaru i	Prędkość kątowna silnika ω_i [rd/s]	Amplituda drgań A_0	Amplituda drgań A_1
0			
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			
11			
12			



Częstość drgań własnych układu głównego wg wzoru (13) (Ćw. 2):

$$\alpha^2 = \frac{\omega_m^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{x_0}{A_m}\right)^2}} = \text{_____} \text{ [rad/s]}$$

Obliczenie czynnej długości l sprężyny płaskiej tłumika: $l = \text{_____}$ [m]

Zakres częstości skuteczności tłumika:

$$\omega_1 = \text{_____} \quad \omega_2 = \text{_____} \quad \Delta\omega = \text{_____}$$