

IZOLACJA FUNDAMENTU OD DRGAŃ MASZYNY

Drgania i Dynamika Maszyn – Ćwiczenie 6*

1 Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest zmniejszenie amplitudy drgań fundamentu, wywołanych drganiami zamocowanego na tym fundamencie układu drgającego o jednym stopniu swobody.

2 Wprowadzenie teoretyczne

Maszyny wirujące z niewyważeniem są typowymi źródłami drgań. Jeśli urządzenia te są zamontowane sztywno na swoim podłożu, drgania będą przenosić się do otoczenia. Przenoszone drgania mogą powodować hałas, szkodliwy wpływ na organizm ludzki lub przeciążenie przyrządów znajdujących się w pobliżu. Izolacja drgań może zminimalizować takie niepożądane oddziaływania. Zazwyczaj między drgającą maszyną a jej podłożem umieszcza się elementy lepko-sprężyste. Jest to tak zwana **izolacja aktywna** lub izolacja wymuszona, gdy chcemy zapobiec przenoszeniu siły na podłoże. W przypadku, gdy chcemy odizolować urządzenie od drgającego podłoża, mówimy, że jest to **izolacja pasywna** lub izolacja przemieszczeniowa.

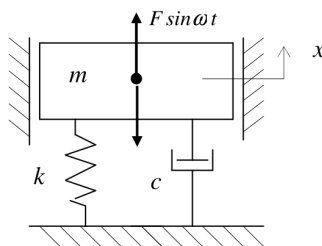
2.1 Dopuszczalne drgania działające na organizm ludzki

Aby zapewnić odpowiednie warunki osobom pracującym w pobliżu maszyn, przeprowadza się m.in. izolację drgań maszyn. Normy techniczne opisują zasady pomiarów drgań mechanicznych w celu oszacowania ich wpływu na organizm ludzki. W normach tych przedstawiono również dopuszczalne wartości parametrów drgań. Parametrami tymi są dopuszczalne przyspieszenia drgań ogólnych (działających na całe ciało), drgań miejscowych (działających na ręce) oraz dopuszczalny czas pracy w przypadku przekroczenia tych limitów.

Dla celów izolacji bardzo ważne są właściwości tłumienia drgań przez gumę. Powodują one pochłanianie energii drgań i ułatwiają łagodne przejście przez rezonans. W zależności od rodzaju gumy, wartość bezwymiarowego współczynnika tłumienia h/α mieści się w zakresie od 0.04 do 0.1 (gdzie: h – współczynnik tłumienia lepko-sprężystego odniesiony do masy w [rad/s], α – częstotliwość drgań własnych w [rad/s]). W przeciwieństwie do stali, guma nie koroduje i ma wysoką odporność zmęczeniową. Nie dotyczy to niskich temperatur, ponieważ podkładki gumowe mogą być stosowane w temperaturach od -30° do $+75^\circ\text{C}$.

2.2 Współczynnik przenoszenia

Rozpatrywany jest układ drgający o jednym stopniu swobody. Harmonijna siła wymuszająca $F \sin \omega t$ działa na masę m (Rys. 1). Między masą drgającą a jej podłożem znajduje się sprężyna o współczynniku sztywności k oraz tłumik lepki o współczynniku tłumienia c .



Rysunek 1

Równanie ruchu rozpatrywanego modelu można zapisać w następującej postaci:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F \sin \omega t. \quad (1)$$

Po przekształceniach równanie ruchu przyjmuje postać:

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega_n^2 x = q \sin \omega t, \quad (2)$$

*W: LABORATORIUM DRGAŃ MECHANICZNYCH, K. Marynowski (red), Łódź 2002

gdzie:

$$\frac{c}{m} = 2h; \quad \frac{k}{m} = \alpha^2; \quad \frac{F}{m} = q. \quad (3)$$

Rozwiązania szczególnego równania można oczekiwać w postaci:

$$x = A \sin(\omega t - \phi), \quad (4)$$

gdzie amplituda przemieszczenia A wyraża się wzorem:

$$A = \frac{q}{\sqrt{(\alpha^2 - \omega^2)^2 + 4h^2\omega^2}}, \quad (5)$$

a kąt przesunięcia fazowego ϕ pomiędzy wymuszeniem a przemieszczeniem określany jest przez następującą zależność:

$$\phi = \arctg \frac{2h\omega}{\alpha^2 - \omega^2}. \quad (6)$$

Siła działająca na podłoże składa się z siły w sprężynie i siły w tłumiku. Siła w sprężynie wynosi:

$$S = kx = kA \sin(\omega t - \phi). \quad (7)$$

Siła w tłumiku jest równa:

$$R = c\dot{x} = cA\omega \cos(\omega t - \phi). \quad (8)$$

Maksymalna całkowita siła działająca na podłoże wyraża się jako:

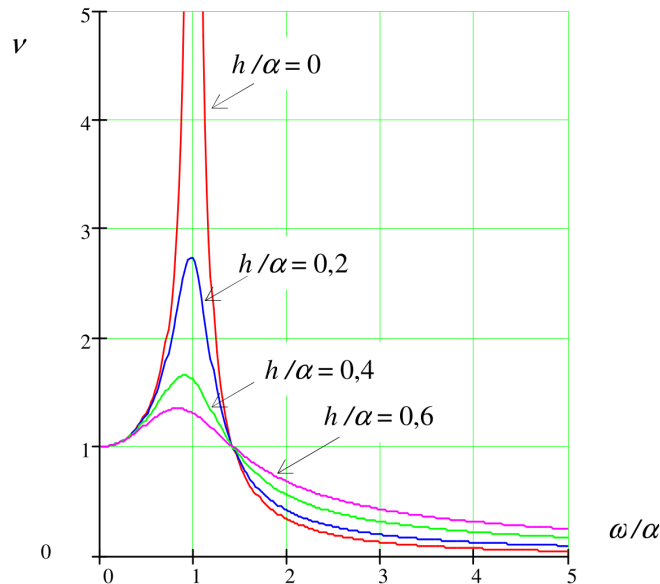
$$P_{\max} = \sqrt{S_{\max}^2 + R_{\max}^2} = \sqrt{(kA)^2 + (c\omega A)^2}. \quad (9)$$

Podstawiając zależności i przekształcając, otrzymujemy:

$$P_{\max} = \frac{F \sqrt{1 + 4 \frac{h^2}{\alpha^2} \frac{\omega^2}{\alpha^2}}}{\sqrt{(1 - \frac{\omega^2}{\alpha^2})^2 + 4 \frac{h^2}{\alpha^2} \frac{\omega^2}{\alpha^2}}}. \quad (10)$$

Stosunek maksymalnej całkowitej siły działającej na podłoże $P_{\max}$ do amplitudy siły wymuszającej F nazywany jest współczynnikiem przenoszenia i w dalszych rozważaniach będzie oznaczany przez ν . Współczynnik przenoszenia można wyznaczyć w postaci:

$$\nu = \frac{P_{\max}}{F} = \frac{\sqrt{1 + 4 \frac{h^2}{\alpha^2} \frac{\omega^2}{\alpha^2}}}{\sqrt{(1 - \frac{\omega^2}{\alpha^2})^2 + 4 \frac{h^2}{\alpha^2} \frac{\omega^2}{\alpha^2}}}. \quad (11)$$



Rysunek 2: Przebiegi wartości współczynnika przenoszenia ν dla różnych wartości tłumienia

Rysunek 2 przedstawia wykresy współczynnika przenoszenia ν w funkcji częstotliwości wymuszenia $\gamma = \omega/\alpha$ (stosunek wymiarowej częstotliwości wymuszenia ω do częstotliwości drgań własnych α) dla różnych wartości bezwymiarowego współczynnika tłumienia h/α .

W zależności od rodzaju gumy, wartość bezwymiarowego współczynnika tłumienia h/α mieści się w zakresie od 0.04 do 0.1. Aby na podstawie Rys. 2 uzyskać wartość współczynnika przenoszenia na poziomie około 0.1 dla tych wartości tłumienia, bezwymiarowa częstotliwość wymuszenia $\gamma = \omega/\alpha$ powinna być wyższa niż 3.

2.3 Przykład doboru izolatora dla wibroizolacji aktywnej na podstawie jego charakterystyki statycznej

W tym przykładzie liczbowym rozpatrywany jest układ składający się z wentylatora i silnika napędowego. Całkowita masa układu wynosi $m_1 = 200$ kg. Prędkość obrotowa silnika wynosi $n = 1450$ obr/min. Układ jest zamontowany na konstrukcji wsporczej o masie $m_2 = 100$ kg. Podłoże powinno być odizolowane od pionowych drgań układu za pomocą czterech izolatorów gumowych. Po izolacji wartość współczynnika przenoszenia nie powinna być wyższa niż $\nu = 0.1$.

Rozwiązanie

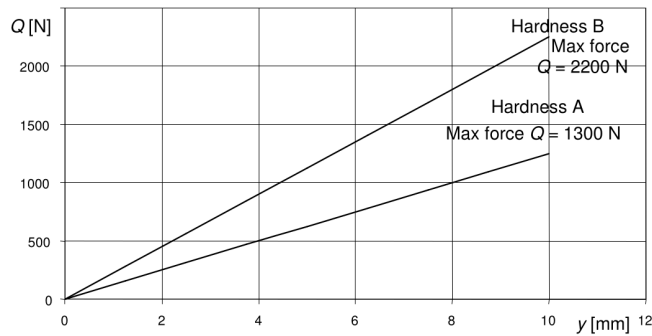
Częstotliwość wymuszająca jest równa:

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} = 152.05 \quad [\text{rad/s}] \quad (\text{a})$$

Siła grawitacji działająca na jeden izolator wynosi:

$$Q = \frac{m_1 + m_2}{4} g = 735.75 \quad [\text{N}] \quad (\text{b})$$

Zakłada się, że izolatory gumowe będą pracować z liniową charakterystyką statyczną. Do izolacji podłoża układu wybrano dwa rodzaje izolatorów, oznaczone jako A i B, w zależności od ich twardości. Charakterystyki statyczne izolatorów typu M200 przedstawiono na Rys. 3.



Rysunek 3: Charakterystyki statyczne izolatorów typu M200

Z krzywej charakterystyki izolatora typu M200 o twardości A można odczytać ugięcie statyczne pod obciążeniem Q . Ugięcie to wynosi $y_{st} = 5.89$ mm. Następnie można wyznaczyć wartość częstości własnej takiego izolatora:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{mg}{y_{st}m}} = \sqrt{\frac{g}{y_{st}}} = \sqrt{\frac{9.81}{5.89 \cdot 10^{-3}}} = 40.81 \quad [\text{rad/s}] \quad (\text{c})$$

Stosunek częstości wymuszenia ω do częstości własnej α wynosi:

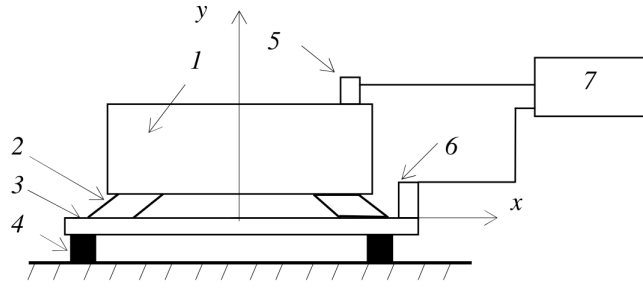
$$\gamma = \frac{\omega}{\alpha} = \frac{152.05}{40.81} = 3.72 \quad (\text{d})$$

Mimo to, należy sprawdzić wartość współczynnika przenoszenia dla granicznej (lim) wartości stosunku h/α izolatorów gumowych:

$$\nu = \frac{\sqrt{1 + 4 \left(\frac{h}{\alpha}\right)_{\text{lim}}^2 \frac{\omega^2}{\alpha^2}}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\alpha^2}\right)^2 + 4 \left(\frac{h}{\alpha}\right)_{\text{lim}}^2 \frac{\omega^2}{\alpha^2}}} = \frac{\sqrt{1 + 4 \cdot 0.1^2 \cdot 3.72^2}}{\sqrt{(1 - 3.72^2)^2 + 4 \cdot 0.1^2 \cdot 3.72^2}} = 0.097 < 0.1 \quad (\text{e})$$

3 Stanowisko pomiarowe

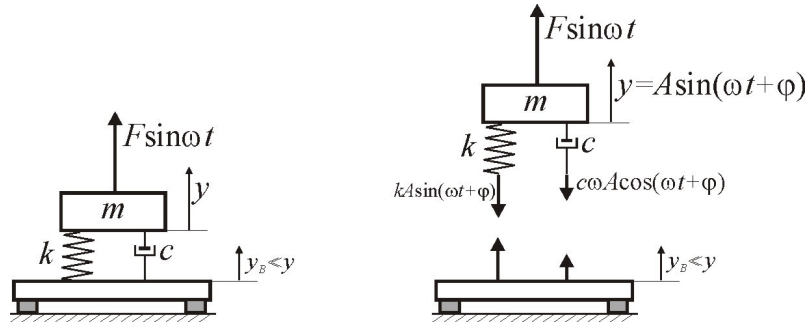
Schemat urządzenia pomiarowego przedstawiono na Rys. 4. Wzbudnik (urządzenie głośnikowe dostarczające energię) 1 jest zamontowane na swoim podłożu, które reprezentuje sztywna płyta 3. Należy odizolować podłoże od pionowych drgań urządzenia głośnikowego za pomocą czterech izolatorów gumowych 2. Płyta 3 jest połączona z konstrukcją budynku za pomocą czterech podkładek wsporczych 4 o znanej sztywności. Drgania wzbudnika 1 oraz płyty 3 są mierzone za pomocą czujnika piezoelektrycznego – akcelerometru w pozycjach 5 lub 6. Czujnik jest połączony z zestawem mierników drgań i oscyloskopem 7.



Rysunek 4

3.1 Model fizyczny

Na Rysunku 5 przedstawiono model fizyczny układu z Rys. 4. Na element będący wzбудnikiem o masie m działa harmoniczna siła wymuszająca jego drgania w kierunku y . Sam wzбудnik połączony jest z fundamentem za pomocą izolatora drgań, który da się opisać matematycznie jako kombinacja liniowa sprężyny o współczynniku sztywności k oraz liniowego tłumika o współczynniku tłumienia c .



Rysunek 5

Wskutek drgań wzбудnika w sprężynie i tłumiku powstają siły, które przenoszone są na fundament, powodując jego ruch w kierunku y_B . Widoczny układ ma dwa stopnie swobody; potraktujemy go jednak jako dwa podukłady, każdy o jednym stopniu swobody, a to dla uproszczenia rozumowania (i wzorów).

Jeżeli założyć, że amplituda drgań fundamentu jest mała w porównaniu do amplitudy drgań wzбудnika, to model matematyczny opisujący ruch wzбудnika można zapisać następująco:

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = F \sin \omega t \quad (12)$$

Rozwiązanie szczególne tego równania przewiduje się w postaci

$$y = A_s \sin \omega t + A_c \cos \omega t \quad (13)$$

Po podstawieniu (13) do (12), i dokonaniu prostych przekształceń, otrzymuje się

$$A_s = \frac{F(k - \omega^2 m)}{(k - \omega^2 m)^2 + \omega^2 c^2}, \quad A_c = \frac{-F\omega c}{(k - \omega^2 m)^2 + \omega^2 c^2} \quad (14)$$

Zapisując rozwiązanie szczególne (13) w postaci

$$y = A \sin(\omega t + \beta) \quad (15)$$

można stwierdzić, że amplituda drgań wzбудnika wyraża się wzorem

$$A = \sqrt{A_s^2 + A_c^2} = \frac{F}{\sqrt{(k - \omega^2 m)^2 + \omega^2 c^2}} \quad (16)$$

Siła przenoszona przez sprężynę k na fundament, określona jest wzorem

$$R_k \sin(\omega t + \beta) = ky = kA \sin(\omega t + \beta) \quad (17)$$

Siła przenoszona przez tłumik c na fundament, określona jest wzorem

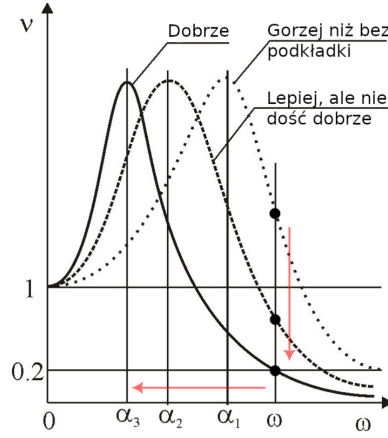
$$R_c \cos(\omega t + \beta) = c\dot{y} = \omega c A \cos(\omega t + \beta) \quad (18)$$

Z powyższych wzorów wynika, że całkowita siła przenoszona na fundament przez sprężynę i przez tłumik, wyraża się wzorem:

$$R \sin(\omega t + \gamma) = \sqrt{R_k^2 + R_c^2} \sin(\omega t + \gamma) = \sqrt{k^2 A^2 + \omega^2 c^2 A^2} \sin(\omega t + \gamma) = F \sqrt{\frac{k^2 + \omega^2 c^2}{(k - \omega^2 m)^2 + \omega^2 c^2}} \sin(\omega t + \gamma) \quad (19)$$

Jakość izolacji fundamentu od drgań wzbudnika ocenia się określając tzw. współczynnik przeniesienia, czyli stosunek amplitudy siły wymuszającej drgania fundamentu R do amplitudy siły generowanej przez wzbudnik F . Jak wynika ze wzoru (19) jest on równy

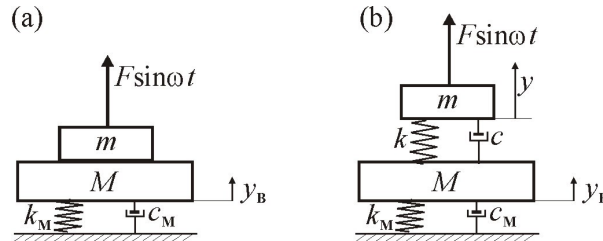
$$\nu = \frac{R}{F} = \sqrt{\frac{k^2 + \omega^2 c^2}{(k - \omega^2 m)^2 + \omega^2 c^2}} \quad (20)$$



Rysunek 6

Rysunek 6 przedstawia przebieg wartości współczynnika przeniesienia ν w funkcji częstości kołowej siły wymuszającej ω dla trzech różnych wartości częstości kołowej drgań swobodnych wzbudnika α , określonej przybliżonym (z uwagi na istnienie tłumienia) wzorem $\alpha = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

Analiza Rys. 6 wskazuje, że zmniejszenie wartości współczynnika przeniesienia do akceptowalnie niskiej wartości $\nu = 0.2$, wymaga zmniejszenia częstości kołowej α do odpowiednio niskiej wartości α_3 . A to z kolei wymaga zastosowania do podparcia wzbudnika innej struktury – sprężyny – o dostatecznie niskiej wartości współczynnika sztywności k . Wyznaczenie współczynnika przeniesienia na podstawie wzoru (9) nie jest możliwe, gdy nie są znane parametry k , m , c . Można go określić doświadczalnie, na podstawie pomiarów amplitud przemieszczenia lub przyspieszenia fundamentu, przeprowadzonych z zastosowaniem izolatora oraz bez izolatora, Rys. 7.



Rysunek 7

3.2 Pomiar I

Założmy, że masa wzbudnika jest wielokrotnie mniejsza niż masa fundamentu. Oznacza to, że po przymocowaniu wzbudnika do fundamentu bez izolatora drgań (jak na Rys. 3a), siła $F \sin \omega t$ generowana przez wzbudnik będzie działała bezpośrednio na fundament. Model matematyczny opisujący ruch fundamentu można zapisać następująco:

$$M\ddot{y}_B + c_B\dot{y}_B + k_B y_B = F \sin \omega t \quad (21)$$

W sposób pokazany wyżej, można stwierdzić, że amplituda drgań fundamentu wyraża się wzorem:

$$A_F = \frac{F}{\sqrt{(k_B - \omega^2 M)^2 + \omega^2 c_B^2}}. \quad (22)$$

3.3 Pomiar II

W celu zmniejszenia amplitudy siły działającej na fundament, pomiędzy wzbudnik a fundament wprowadza się izolator, jak na rysunku 2b). W konsekwencji, fundament na elastycznych podporach można potraktować jako

układ o jednym stopniu swobody, na który działa siła $R \sin(\omega t + \gamma)$ określona równaniem (8). Model matematyczny opisujący ruch fundamentu można zapisać następująco:

$$M\ddot{y}_B + c_B\dot{y}_B + k_By_B = R \sin(\omega t + \gamma) \quad (23)$$

Amplituda drgań fundamentu wyraża się teraz wzorem:

$$A_R = \frac{R}{\sqrt{(k_B - \omega^2 M)^2 + \omega^2 c_B^2}}. \quad (24)$$

Łatwo zauważyć, że współczynnik przeniesienia

$$\nu = \frac{R}{F} = \frac{A_R}{A_F} = \frac{\omega^2 A_R}{\omega^2 A_F}. \quad (25)$$

Jest on zatem równy stosunkowi amplitud drgań, a także stosunkowi amplitud przyspieszeń, które można mierzyć za pomocą akcelometru na stanowisku eksperymentalnym.

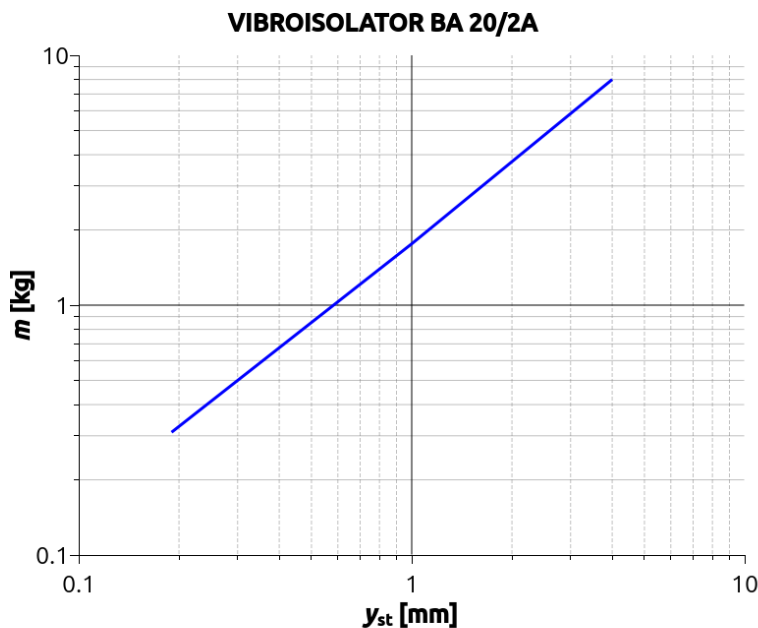
3.4 Przebieg ćwiczenia:

1. Przymocować żółty wzbudnik (z głośnikiem wewnątrz, wzbudzany generatorem funkcji poprzez wzmacniacz) do fundamentu **bez żadnej podkładki amortyzującej**. W tym układzie zakładamy, że wsp. przeniesienia wynosi $\nu = 1$. Zmierzyć amplitudę drgań fundamentu, równą amplitudzie drgań wzbudnika A_F .
2. Ustawić wzbudnik na fundamencie, stosując podkładkę amortyzującą z **korka**. Zmierzyć amplitudę drgań fundamentu A_{R1} . Zmieniając częstotliwość wymuszenia, ustalić wartość częstotliwości rezonansowej α_1 .
3. Ustawić wzbudnik na fundamencie, stosując podkładkę amortyzującą z **gumy**. Zmierzyć amplitudę drgań fundamentu A_{R2} . Zmieniając częstotliwość wymuszenia, ustalić wartość częstotliwości rezonansowej α_2 .
4. Przymocować wzbudnik do fundamentu, stosując 4 **wibroizolatory** (amortyzatory). Zmierzyć amplitudę drgań fundamentu A_{R3} . Zmieniając częstotliwość wymuszenia, ustalić wartość częstotliwości rezonansowej α_3 .
5. Obliczyć wartości współczynnika przeniesienia ν przy trzech rodzajach izolacji.

Dane do wyliczeń

Masa modelu maszyny $m = 3.58$ kg. Zakładamy bezwymiarowy współczynnik tłumienia dla gumy o wartości $\xi = 0.05$ do wyliczenia wartości tłumienia h , c_{kr} – tłumienie krytyczne. Tor pomiarowy odczytu na oscyloskopie RIGOL DS1102: czułość akcelometru B&K 4396: $1 \text{ mV} = 0.101 \text{ m/s}^2$. Współczynnik wzmocnienia sygnału akcelometru $k = 10$ [-].

$$\xi = \frac{c}{c_{kr}}$$



Rysunek 8: Wibroizolator BA 20/2A – charakterystyka producenta

**LABORATORIUM
DRGAŃ
MECHANICZNYCH**

Ćwiczenie 6

IZOLACJA FUNDAMENTU OD DRGAŃ MASZYN

Grupa: _____
Zespół: _____

data _____

Imię i nazwisko:

1. _____
2. _____
3. _____
4. _____
5. _____
6. _____

Tabela 1: Wyniki pomiarów

Rodzaj amortyzacji	Amplituda drgań podstawy	Częstość rezonansowa α	Współczynnik przeniesienia ν
Bez amortyzacji	$A_F =$	Teoretycznie nieskończenie duża	$\nu = A_F/A_F = 1$
Podkładka korkowa	$A_{R1} =$	$\alpha_1 =$	$\nu = A_{R1}/A_F =$
Podkładka gumowa	$A_{R2} =$	$\alpha_2 =$	$\nu = A_{R2}/A_F =$
Wibroizolatory	$A_{R3} =$	$\alpha_3 =$	$\nu = A_{R3}/A_F =$

Obliczenia pomocnicze

Siła obciążająca 1 wibroizolator:

$$Q = \text{_____} [\text{N}]$$

Ugięcie statyczne wg wykresu charakterystyki producenta

$$y_{st} = \text{_____} [\text{N}]$$

Częstość własna układu z wibroizolatorami:

$$\alpha = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{mg}{y_{st}}} \frac{1}{m} = \sqrt{\frac{g}{y_{st}}} = \text{_____} [\text{rad/s}]$$

Stosunek częstości wymuszenia do częstości drgań swobodnych:

$$\gamma = \frac{\omega}{\alpha} = \text{_____} [-]$$