

# WYZNACZANIE MINIMALNEGO OKRESU DRGAŃ SWOBODNYCH WAHADŁA FIZYCZNEGO

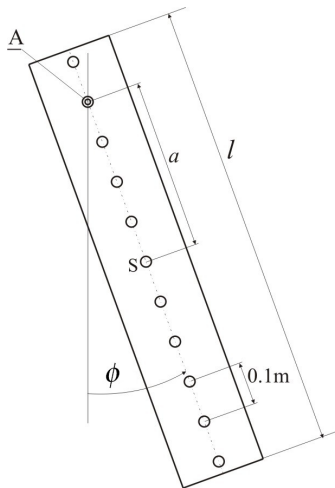
Drgania i Dynamika Maszyn – Ćwiczenie 1B\*

## Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest określenie takiego położenia osi obrotu wahadła fizycznego, dla którego okres drgań swobodnych tego wahadła jest najkrótszy.

## Opis stanowiska

Przedmiotem rozważań jest wahadło fizyczne mające postać jednorodnego pręta o długości  $l = 1.03$  m, mogące wykonywać ruch wahliwy wokół osi obrotu A. Wahadło zostało przedstawione na rys. 1.



Rysunek 1

Na podstawie dynamicznego równania ruchu obrotowego bryły (równania równowagi momentów sił względem osi obrotu, z uwzględnieniem momentu siły bezwładności) można sformułować następujące równanie ruchu wahadła:

$$B_A \ddot{\phi} + mga\phi = 0 \quad (1)$$

gdzie:

- $B_A$  – moment bezwładności względem osi obrotu,
- $m$  – masa,
- $g$  – przyspieszenie ziemskie,
- $a$  – odległość pomiędzy osią przechodzącą przez środek masy  $S$  a osią obrotu,

---

\*W: LABORATORIUM DRGAŃ MECHANICZNYCH, K. Marynowski (red), Łódź 2002

- $\phi$  – kąt obrotu.

Okres drgań swobodnych takiego wahadła wynosi:

$$T_A = 2\pi \sqrt{\frac{B_A}{mga}} \quad (2)$$

Czy wiesz jak rozwiązać równanie (1) i wyprowadzić wzór (2)?

## Analiza teoretyczna

W myśl twierdzenia Steinera o momentach bezwładności bryły względem osi równoległych

$$B_A = B_S + ma^2 \quad (3)$$

gdzie  $B_S$  – moment bezwładności względem osi przechodzącej przez środek masy.

Moment  $B_S$  jest stały i w przypadku analizowanego wahadła, mającego postać jednorodnego pręta, wyraża się wzorem

$$B_S = \frac{ml^2}{12} \quad (4)$$

Podstawiając równanie (3) do (2) otrzymuje się następujący wzór na okres drgań wahadła:

$$T_A(a) = 2\pi \sqrt{\frac{B_S + ma^2}{mga}} = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{l^2}{12} + a^2}{ga}} \quad (5)$$

Jak zaznaczono, okresowi drgań można nadać postać funkcji, której argumentem jest odległość  $a$  pomiędzy osią obrotu a osią przechodzącą przez środek masy.

Łatwo stwierdzić, że gdy odległość  $a$  maleje do zera (oś obrotu zbliża się do środka masy), okres drgań rośnie do nieskończoności: licznik wyrażenia pod pierwiastkiem dąży do stałej wartości  $B_S$  a mianownik dąży do zera.

Podobnie łatwo stwierdzić, że gdy odległość  $a$  rośnie do nieskończoności (oś obrotu oddala się do środka masy na nieograniczoną odległość wielokrotnie większą niż  $l$ ), okres drgań także rośnie do nieskończoności: pochodna licznika wyrażenia pod pierwiastkiem ( $2ma$ ) dąży do nieskończoności a pochodna mianownika jest stała ( $mg$ ). Powstaje pytanie, dla jakiej wartości argumentu  $a$  funkcja (5) osiąga wartość ekstremalną i ile ta wartość wynosi. Dla znalezienia odpowiedzi należy zróżniczkować (5) po zmiennej  $a$ , otrzymując:

$$\frac{dT_A(a)}{da} = \frac{2\pi}{2\sqrt{\frac{B_S+ma^2}{mga}}} \frac{2m^2a^2g - (B_S + ma^2)mg}{m^2g^2a^2} = \frac{\pi \left(a^2 - \frac{l^2}{12}\right)}{\sqrt{\frac{gl^2a^3}{12} + ga^5}} \quad (6)$$

Łatwo zauważyć, że funkcja ta osiąga wartość zero dla

$$\frac{dT_A(a)}{da} = 0 \quad \rightarrow \quad a = \frac{l}{\sqrt{12}} \quad (7)$$

i jest to jedyne ekstremum – logika podpowiada, że to minimum. Okres drgań  $T_A$  jest najkrótszy dla odległości  $a$  równej długości wahadła podzielonej przez pierwiastek z liczby 12. Podstawiając tę wartość do (5), można obliczyć

$$T_{Amin} = 2\pi \sqrt{\frac{ml^2 + \frac{l^2}{12}}{mg \frac{l}{\sqrt{12}}}} = 2\pi \sqrt{\frac{\sqrt{12}l}{6g}} \quad (8)$$

Należy sprawdzić, czy istotnie dla wartości  $a$  wyrażonej przez (7), funkcja (5) osiąga ekstremum minimum a nie maksimum. W tym celu, różniczkując (6) określmy drugą pochodną okresu  $T_A$  po odległości  $a$ :

$$\frac{d^2 T_A(a)}{da^2} = \pi \frac{2a\sqrt{\frac{gl^2 a^3}{12} + ga^5} - \left(a^2 - \frac{l^2}{12}\right) \frac{5ga^4 + \frac{3gl^2 a^2}{12}}{2\sqrt{\frac{gl^2 a^3}{12} + ga^5}}}{\frac{gl^2 a^3}{12} + ga^5} \quad (9)$$

Wzór wygląda PRZERAŻAJĄCO – każdy to widzi; ale: dla  $a = \frac{l}{\sqrt{12}}$  wyrażenie w nawiasie w liczniku jest równe zeru, zatem drugi składnik licznika jest równy zeru. Pierwszy składnik jest dodatni, mianownik jest dodatni, czyli dla

$$a = \frac{l}{\sqrt{12}} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{d^2 T_A(a)}{da^2} > 0. \quad (10)$$

zatem istotnie dla tej wartości  $a$  okres jest minimalny.

## Przebieg ćwiczenia

- Określić czas trwania 20 okresów ruchu wahadła zawieszonego kolejno za pomocą pięciu otworów odległych od środka masy o 0.50, 0.40, 0.30, 0.20 i 0.10 metra. Dzieląc ten czas przez 20 określić okresy drgań  $T_A$  w funkcji  $a$ .
- Za pomocą wzoru (5) obliczyć  $T_A$  dla różnych wartości  $a$  podanych w tabeli.
- Narysować teoretyczny wykres  $T_A(a)$ . Nanieść wyniki pomiarów.



# LABORATORIUM DRGAŃ MECHANICZNYCH

## Ćwiczenie 1B

### WYZNACZANIE MINIMALNEGO OKRESU DRGAŃ SWOBODNYCH WAHADŁA FIZYCZNEGO

Grupa: \_\_\_\_\_

Zespół: \_\_\_\_\_

data \_\_\_\_\_

Imię i nazwisko:

1. \_\_\_\_\_

2. \_\_\_\_\_

3. \_\_\_\_\_

4. \_\_\_\_\_

5. \_\_\_\_\_

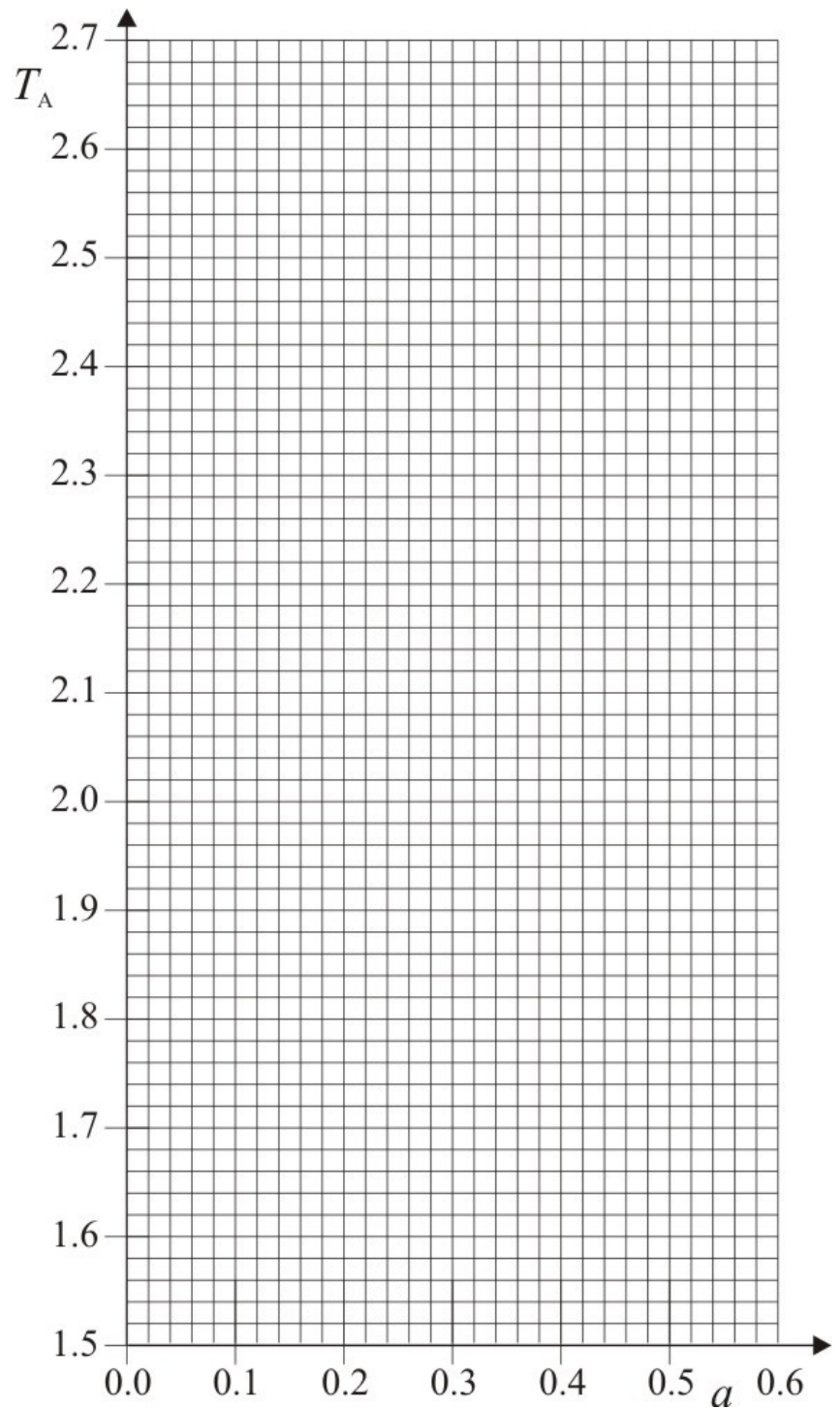
6. \_\_\_\_\_

**Wyniki pomiarów:**

| $a$ [m] | $20T_A$ [s] | $T_A$ [s] |
|---------|-------------|-----------|
| 0.10    |             |           |
| 0.20    |             |           |
| 0.30    |             |           |
| 0.40    |             |           |
| 0.50    |             |           |

**Wyniki obliczeń:**

| $a$ [m] | $T_A$ [s] |
|---------|-----------|
| 0.05    |           |
| 0.10    |           |
| 0.15    |           |
| 0.20    |           |
| 0.25    |           |
| 0.30    |           |
| 0.35    |           |
| 0.40    |           |
| 0.45    |           |
| 0.50    |           |
| 0.55    |           |
| 0.60    |           |



**Wzór do obliczania okresu drgań:**

$$T_A(a) = 2\pi \sqrt{\frac{l^2}{12} + a^2}, \quad l = 1.03 \text{ m}, \quad g = 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

(11)