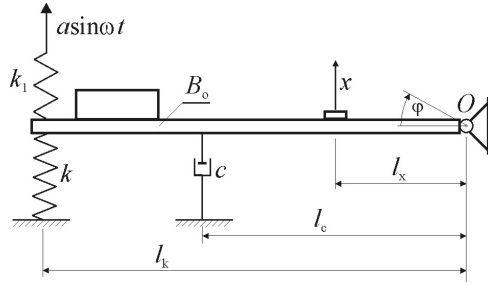


IDENTYFIKACJA PARAMETRÓW UKŁADU DRGAJĄCEGO O JEDNYM STOPNIU SWOBODY

Drgania i Dynamika Maszyn – Ćwiczenie 3*

1 Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest określenie wartości współczynnika tłumienia, współczynnika sztywności oraz amplitudy wymuszenia układu drgającego o jednym stopniu swobody.



Rysunek 1: Schemat układu drgającego

Na rys. 1 przedstawiono układ drgający złożony z następujących elementów:

- sztywna belka połączona z ością węzłem obrotowym O ,
- zespół sprężyn o współczynniku sztywności k ,
- tłumik olejowy o współczynniku tłumienia c ,
- zespół sprężyn o współczynniku sztywności k_1 .

Zespół sprężyn o współczynniku sztywności k_1 połączony jest z mimośrodem na wale silnika napędowego; obracanie się wału silnika stanowi kinematyczne wymuszenie ruchu górnych końców tych sprężyn, opisane jako $a \sin \omega t$. Wskutek wymuszenia, belka wychyla się z położenia równowagi o kąt ϕ . Wychylenie belki mierzone jest czujnikiem przemieszczenia liniowego, określającego przemieszczenie x punktu belki oddalonego o l_x od osi obrotu. Równanie ruchu liniowego modelu fizycznego badanego układu jest następujące:

$$B_0 \ddot{\phi} + cl_c^2 \dot{\phi} + (k + k_1) \phi = k_1 l_k a \sin \omega t \quad (1)$$

gdzie: B_0 - moment bezwładności belki względem osi obrotu. Dzieląc równanie (1) przez B_0 i mnożąc przez l_x otrzymuje się:

$$l_x \ddot{\phi} + \frac{cl_c^2}{B_0} l_x \dot{\phi} + \frac{k + k_1}{B_0} l_x \phi = \frac{k_1 l_k a l_x}{B_0} \sin \omega t \quad (2)$$

Oznaczając:

$$l_x \ddot{\phi} = \ddot{x}, \quad \frac{cl_c^2}{B_0} = 2h, \quad \frac{k + k_1}{B_0} = \alpha^2, \quad l_x \phi = x, \quad \frac{k_1 l_k a l_x}{B_0} = q \quad (3)$$

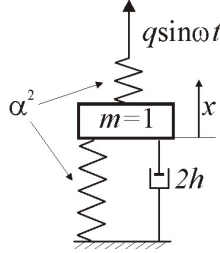
*W: LABORATORIUM DRGAŃ MECHANICZNYCH, K. Marynowski (red), Łódź 2002

można zapisać równanie (1) w postaci:

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \alpha^2 x = q \sin \omega t \quad (4)$$

gdzie:

$2h$ – tłumienie,
 α^2 – częstość kołowa swobodnych drgań układu,
 q – wymuszenie kinematyczne.



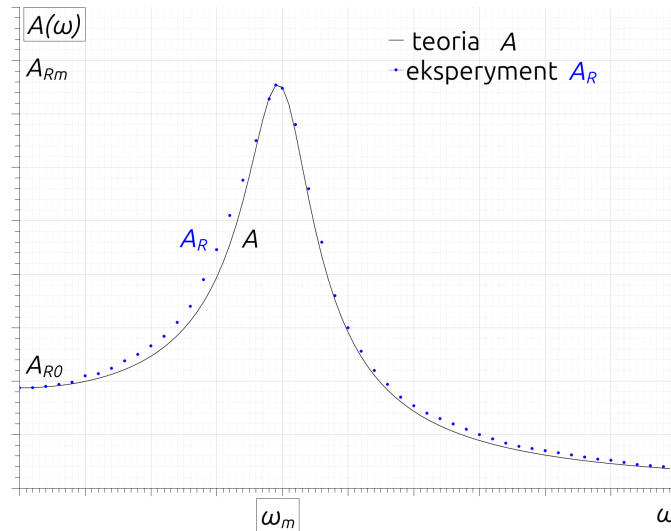
Rysunek 2: Model fizyczny układu

Rozwiązaniem szczególnym równania różniczkowego (4), opisującym drgania wymuszone modelu fizycznego badanego układu, pokazanego na rys. 2, jest funkcja:

$$x(t) = A \sin(\omega t + \beta), \quad (5)$$

gdzie A jest amplitudą drgań wymuszonych a β kątem fazowym pomiędzy przebiegiem wymuszenia kinematycznego a przebiegiem drgań modelu fizycznego. Amplituda A jako funkcja częstości wymuszenia ω wyrażona jest wzorem:

$$A(\omega) = \frac{q}{\sqrt{(\alpha^2 - \omega^2)^2 + 4h^2\omega^2}} \quad (6)$$



Rysunek 3: Wykresy rezonansowe

a jej wykres ma kształt krzywej rezonansowej pokazanej linią ciągłą na rys. 3. Wyznaczenie wartości parametrów α , h , q w równaniu (6), to zadanie, które można rozwiązać w sposób opisany poniżej.

Dokonując pomiaru amplitudy drgań układu rzeczywistego przy różnych wartościach częstości kołowej wymuszenia, otrzymuje się rzeczywisty wykres rezonansowy $A_R(\omega)$, przedstawiony na rys. 3 w postaci (niebieskich) punktów. Wartość amplitudy drgań układu rzeczywistego dla małej (praktycznie równej zero) wartości częstości kołowej ω , oznaczono jako A_{R0} . Amplituda osiąga wartość maksymalną A_{Rm} przy częstości rezonansowej ω_m . Teoretyczny wykres rezonansowy, przedstawiony na rys. 3 linią ciągłą wynika z obliczeń wartości amplitudy drgań $A(\omega)$ za pomocą wzoru (6).

Zakłada się, że oba wykresy rezonansowe muszą spełniać trzy warunki:

1. Dla częstości kołowej ω bliskiej zero, amplitudy A i A_R są takie same:

$$A(0) = \frac{q}{\sqrt{(\alpha^2 - 0^2)^2 + 4h^2 \cdot 0^2}} = \frac{q}{\alpha^2} = A_{R0} \quad (7)$$

2. Dla częstości kołowej rezonansowej ω_m , amplitudy A i A_R są także takie same:

$$A(\omega_m) = \frac{q}{\sqrt{(\alpha^2 - \omega_m^2)^2 + 4h^2\omega_m^2}} = A_{Rm} \quad (8)$$

3. Dla częstości ω_m , amplituda A osiąga wartość maksymalną (podobnie jak A_R), zatem:

$$\frac{\partial A}{\partial \omega}(\omega = \omega_m) = \frac{q[-4\omega(\alpha^2 - \omega^2) + 8h^2\omega]}{2\sqrt{((\alpha^2 - \omega_m^2)^2 + 4h^2\omega_m^2)^3}} = 0 \quad (9)$$

Układ równań (7), (8), (9) można łatwo przekształcić do postaci:

$$q = \frac{\omega_m^2 A_{R0}}{\xi}, \quad \alpha^2 = \frac{\omega_m^2}{\xi}, \quad 2h = \omega_m \sqrt{\frac{1}{2\xi} - 1} \quad (10)$$

gdzie:

$$\xi = \sqrt{1 - \frac{A_{R0}^2}{A_{Rm}^2}} \quad (11)$$

co pozwala na obliczenie nieznanymi wartości parametrów α, h, q . Znajomość tych wartości pozwala na identyfikację **parametrów układu rzeczywistego** na podstawie wzorów:

$$c = \frac{2hB_0}{l_c^2}, \quad k_1 = \frac{qB_0}{al_k l_x}, \quad k = B_0\alpha^2 - k_1 \quad (12)$$

Pomiary i obliczenia wykonane wcześniej pozwoliły ustalić wartości pozostałych potrzebnych parametrów:

$$B_0 = 1.38 \text{ kgm}^2, \quad l_c = 0.541 \text{ m}, \quad l_k = 0.54 \text{ m}, \quad l_x = 0.24 \text{ m}. \quad (13)$$

Przebieg ćwiczenia:

1. Zmierzyć amplitudę drgań A_R dla różnych wartości prędkości kątowej ω ; liczba pomiarów około 15. Ustalić wartość ω_m , dla której amplituda drgań osiąga wartość maksymalną A_{Rm} . Ustalić wartość amplitudy A_{R0} przy bliskiej zero prędkości kątowej. Wyniki wpisać do tabeli.
2. Obliczyć wartości parametrów α, h, q , korzystając ze wzorów (10).
3. Obliczyć wartości amplitudy A teoretycznego wykresu rezonansowego, korzystając ze wzoru (6), dla tych wartości ω , dla których dokonano pomiaru A_R .
4. Narysować rzeczywisty i teoretyczny wykres rezonansowy.
5. Obliczyć wartości parametrów układu rzeczywistego k, c, k_1 , korzystając ze wzorów (11) i wartości parametrów podanych we wzorze (12).

LABORATORIUM DRGAŃ MECHANICZNYCH

Ćwiczenie 3

IDENTYFIKACJA PARAMETRÓW UKŁADU DRGAJĄCEGO O JEDNYM STOPNIU SWOBODY

Grupa: _____

Zespół: _____

data _____

Imię i nazwisko:

1. _____

2. _____

3. _____

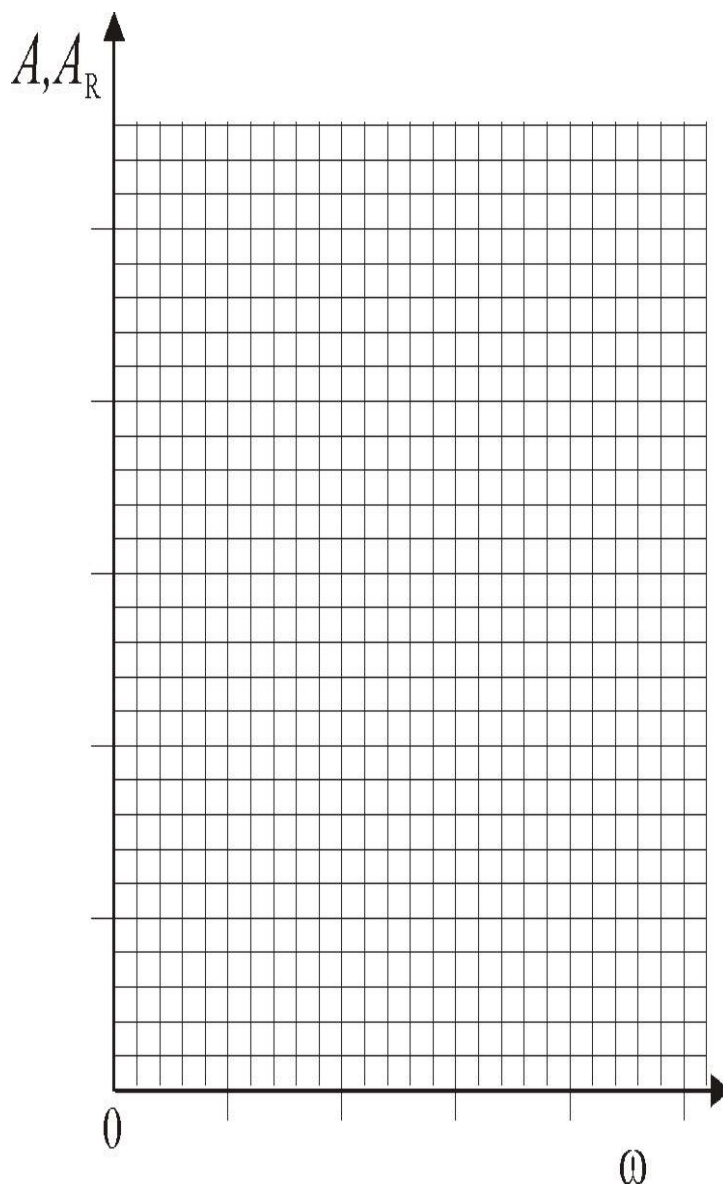
4. _____

5. _____

6. _____

Wyniki pomiarów:

ω	A_R	A



Wyniki pomiarów:

$$\omega_m = \text{_____} \text{ [rad/s]} \quad A_{Rm} = \text{_____} \text{ [m]} \quad A_{R0} = \text{_____} \text{ [m]}$$

Parametry modelu fizycznego:

$$\xi = \sqrt{1 - \frac{A_{R0}^2}{A_{Rm}^2}} = \text{_____} [\quad] \quad q = \frac{\omega_m^2 A_{R0}}{\xi} = \text{_____} [\quad]$$

$$\alpha^2 = \frac{\omega_m^2}{\xi} = \text{_____} [\quad] \quad 2h = \omega_m \sqrt{\frac{1}{2\xi} - 1} = \text{_____} [\quad]$$

Amplituda drgań modelu fizycznego

$$A = \frac{q}{\sqrt{(\alpha^2 - \omega^2)^2 + 4h^2\omega^2}} = \text{_____} \text{ [m]}$$

Parametry układu rzeczywistego:

$$c = \frac{2hB_0}{l_c^2} = \text{_____} \text{ [rad/s]} \quad k_1 = \frac{qB_0}{al_k l_x} = \text{_____} \text{ [N/m]} \quad k = B_0\alpha^2 - k_1 = \text{_____} \text{ [N/m]}$$