

WYZNACZANIE PRĘDKOŚCI KRYTYCZNYCH WAŁÓW

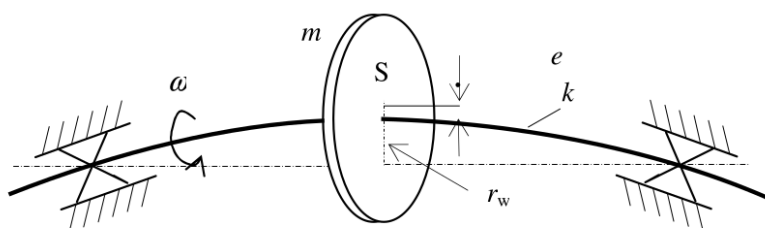
Drgania i Dynamika Maszyn – Ćwiczenie 6*

1 Cel ćwiczenia

Określenie i pomiar trzech kolejnych prędkości krytycznych i obserwacja odpowiadających im linii ugięcia wału oraz porównanie wartości prędkości krytycznych obliczonych analitycznie z wartościami pomierzonymi.

2 Wprowadzenie teoretyczne

Prędkość krytyczna jest to pojęcie związane z maszynami wirnikowymi, używane dla określenia prędkości kątowej wału, przy której nadmiernie wzrastają amplitudy ugięć wirnika i związane z tym drgania korpusu maszyny.



Rysunek 1: Schemat wirnika z podatnym, bezmasowym wałem i ciężką tarczą

Rozpatrzmy najprostszy wirnik jaki stanowi krążek o masie m , umocowany w środku rozpiętości nieważkiego wału o sztywności k (Rys. 1). Przyjmujemy przy tym, iż środek masy krążka S nie pokrywa się z osią wału i jest oddalony od niego o pewną wartość e , którą nazywamy mimośrodowością lub niewyważeniem. Mimośrodowość ta jest wywołana niejednorodnością krążka lub nieosiowym jego osadzeniem na wał. Zakładamy, że płaszczyzna krążka jest prostopadła do osi wału. Jeżeli wirnik obraca się ze stałą prędkością kątową ω , to wał ugina się i wiruje w postaci ugiętej. Przy dowolnej prędkości obrotowej wału, siły działające na krążek muszą być w równowadze. Siła sprężystości wału równoważy siłę odśrodkową, czyli:

$$kr_w = (r_w + e)m\omega^2. \quad (1)$$

Po przekształceniu tego związku otrzymuje się zależność

$$r_w = e \frac{\omega^2}{\frac{k}{m} - \omega^2}, \quad (2)$$

z której wynika, że promień wału r_w będzie coraz większy i teoretycznie stanie się nieskończenie duży, gdy mianownik prawej strony równania (2) przyjmie wartość równą zero. Może to nastąpić, gdy prędkość kątowa wału osiągnie wartość:

$$\omega = \omega_{kr} = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (3)$$

Prędkość ω_{kr} nazywamy prędkością krytyczną, ponieważ jest ona niebezpieczna dla pracy maszyny. Przy uwzględnieniu tłumienia, ugięcia wału r_w będą ograniczone, jednakże ich wartość może być i tak na tyle duża, że doprowadzi to bądź do odkształceń plastycznych wirnika, bądź do zatarcia wirnika np. o uzwojenie stojana silnika elektrycznego.

Łatwo zauważyć, że zależność jaką otrzymaliśmy dla prędkości krytycznej jest identyczna ze związkiem określającym częstość kołową drgań własnych układu o jednym stopniu swobody. W omawianym przypadku wartości prędkości krytycznej wirującego wału z osadzonym na nim krążkiem, jest równa częstości własnej drgań poprzecznych układu krążek-wirnik.

Układy o wielu stopniach swobody (np. wał z kilkoma osadzonymi nań tarczami lub wał o masie rozłożonej w sposób ciągły) posiadają większą liczbę częstości drgań własnych i większą liczbę prędkości krytycznych.

*W: LABORATORIUM DRGAŃ MECHANICZNYCH, K. Marynowski (red), Łódź 2002

2.1 Wirnik jako układ o jednym stopniu swobody

Okazuje się, że jeżeli w rozważanym układzie pominąć wpływ efektu żyroskopowego, to wartości kolejnych prędkości krytycznych są równe wartościom kolejnych częstości poprzecznych drgań własnych. Obliczenie prędkości krytycznych sprowadza się więc w większości przypadków do obliczania częstości drgań własnych. Jednym z najłatwiejszych sposobów wyznaczenia podstawowej częstości drgań jest wykorzystanie zależności określającej częstość kołową drgań własnych układu o jednym stopniu swobody

$$\alpha = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad (4)$$

przy czym w miejsce k i m należy podstawić wielkości zastępcze k_z i m_z

$$\alpha_1 = \sqrt{\frac{k_z}{m_z}}. \quad (5)$$

W przypadku rozpatrywanego wirnika modelowego, czyli belki o stałym przekroju podpartej przegubowo w obu końcach jest

$$k_z = \frac{48 \times EJ}{l^3}. \quad (6)$$

Masę zastępczą określa związek, który otrzymuje się po zastosowaniu metody energetycznej Rayleigha

$$m_z = \frac{17}{35} m. \quad (7)$$

Podstawiając powyższe wielkości do (5) otrzymuje się

$$\alpha_1 = \sqrt{\frac{48 \times 35 \times EJ}{17 \times m \times l^3}}, \quad (8)$$

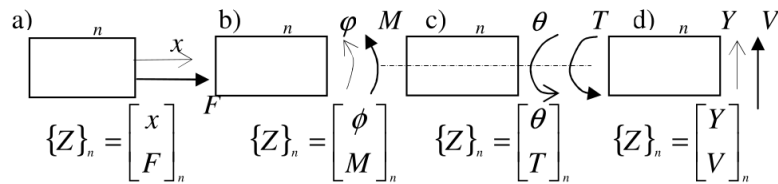
a wyrażając masę belki przez długość l i masę jednostkową μ ($m = \mu l$), wyrażenie na częstość drgań własnych, a tym samym na (jedyną w takim podejściu) prędkość krytyczną ma postać

$$\omega_{krI} = \alpha_1 = \frac{9.941}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{\mu}}. \quad (9)$$

2.2 Wirnik jako układ o skończonej liczbie stopni swobody. Metoda Myklestada

2.2.1 Wektor stanu i macierz przeniesienia

Złożony lub ciągły układ może być podzielony na segmenty zwane też elementami skończonymi. Jest to jeden ze sposobów aproksymacji układów z ciągłym rozkładem masy przez równoważny układ dyskretny. W celu przeprowadzenia opisu procesu dyskretyzacji wprowadza się pojęcia wektora stanu i macierzy przeniesienia. Wektor stanu stanowi kolumna liczb, z których każda wyraża wartość zmiennej w danym miejscu rozpatrywanego układu. Każda składowa wektora stanu jest nazywana zmienną stanu. Przykłady wektorów stanu przedstawia Rys. 2.

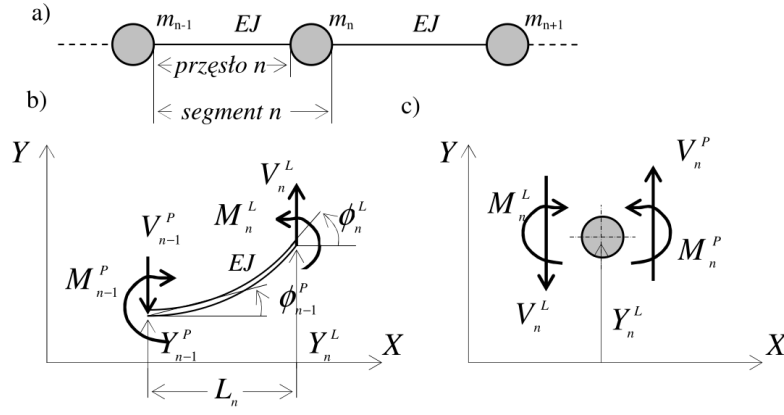


Rysunek 2: Wektory stanu dla różnych stanów obciążenia: a) rozciąganie, b) zginanie, c) skręcanie, d) ścinanie

Kolejność składowych wektora stanu jest dowolna. Przy złożonym stanie obciążenia, np. przy zginaniu i ścinaniu wektor stanu ma postać

$$\{Z\}_n = \begin{bmatrix} Y \\ \phi \\ M \\ V \end{bmatrix}_n = [Y \quad \phi \quad M \quad V]_n^T. \quad (10)$$

Macierz przeniesienia służy do wyznaczenia wektora stanu w określonym miejscu układu przy wykorzystaniu wektora stanu w innym miejscu układu. Przykładowy podział układu poddanego zginaniu na segmenty belkowe (elementy skończone) przedstawia Rys. 3.



Rysunek 3: Podział układu poddanego zginaniu na segmenty belkowe

Pojedynczy n -ty segment składa się z bezmasowego przęsła, które reprezentuje sprężyna o sztywności EJ oraz z masy skupionej m_n . Górne indeksy L i P w oznaczeniach na Rys. 3 określają odpowiednio lewą i prawą stronę masy m_n . Z uwagi na taką budowę segmentu macierz przeniesienia tego elementu składa się z dwóch części:

1. macierzy bezmasowej części sprężystej segmentu,
2. macierzy części masowej.

Macierz bezmasowej części sprężystej wiąże wektory stanu $\{Z\}_{n-1}^P$ oraz $\{Z\}_n^L$ na początku i na końcu n -tego przęsła. Na podstawie Rys. 3b) można zapisać dla stanu równowagi

$$V_n^L = V_{n-1}^P, \quad M_n^L = M_{n-1}^P - L_n V_{n-1}^P, \quad (11)$$

gdzie: M – moment gnący, V – siła tnąca.

Zgodnie z Rys. 3a) zmianę kąta ugięcia określa zależność

$$\phi_n^L = \phi_{n-1}^P + M_{n-1}^P \left(\frac{L}{EJ} \right)_n + V_{n-1}^P \left(\frac{L^2}{2EJ} \right)_n. \quad (12)$$

Podstawiając (11) do (12) otrzymuje się

$$\phi_n^L = \phi_{n-1}^P + M_{n-1}^P \left(\frac{L}{EJ} \right)_n - V_{n-1}^P \left(\frac{L^2}{2EJ} \right)_n. \quad (13)$$

Zmianę ugięcia przęsła określa zależność

$$Y_n^L = Y_{n-1}^P + L_n \phi_{n-1}^P + M_{n-1}^P \left(\frac{L^2}{2EJ} \right)_n + V_{n-1}^P \left(\frac{L^3}{6EJ} \right)_n. \quad (14)$$

Podstawiając (11) do (14) jest

$$Y_n^L = Y_{n-1}^P + L_n \phi_{n-1}^P + M_{n-1}^P \left(\frac{L^2}{2EJ} \right)_n + V_{n-1}^P \left(\frac{L^3}{6EJ} \right)_n. \quad (15)$$

Macierz części sprężystej otrzymuje się zapisując (11), (13) i (15) w postaci macierzowej

$$\begin{bmatrix} Y \\ \phi \\ M \\ V \end{bmatrix}_n^L = \begin{bmatrix} 1 & L & \frac{L^2}{2EJ} & -\frac{L^3}{6EJ} \\ 0 & 1 & \frac{L}{EJ} & -\frac{L^2}{2EJ} \\ 0 & 0 & 1 & -L \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_n \begin{bmatrix} Y \\ \phi \\ M \\ V \end{bmatrix}_{n-1}^P. \quad (16)$$

W celu wyznaczenia macierzy części masowej n -tego elementu belkowego rozpatruje się masę m_n uwolnioną z więzów (Rys. 3c). Z równania sił i momentów działających na element belkowy wykonujący ruch harmoniczny z częstością α uzyskuje się zależności

$$V_n^P = V_n^L - \alpha^2 m_n Y_n^L \quad \text{oraz} \quad M_n^P = M_n^L - \alpha^2 J_0 \phi_n^L. \quad (17)$$

Przy ruchu m_n jako ciała sztywnego spełnione są równości

$$\phi_n^L = \phi_n^P, \quad Y_n^L = Y_n^P. \quad (18)$$

Macierz części masowej wyznacza się na podstawie (17) oraz (18)

$$\begin{bmatrix} Y \\ \phi \\ M \\ V \end{bmatrix}_n^P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha^2 J_0 & 1 & 0 \\ -\alpha^2 m & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_n \begin{bmatrix} Y \\ \phi \\ M \\ V \end{bmatrix}_{n-1}^P. \quad (19)$$

Macierz przeniesienia n -tego segmentu belkowego określa się po wstawieniu wektora (16) do (19)

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} Y \\ \phi \\ M \\ V \end{bmatrix}_n^P &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha^2 J_0 & 1 & 0 \\ -\alpha^2 m & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & L & \frac{L^2}{2EJ} & -\frac{L^3}{6EJ} \\ 0 & 1 & \frac{L}{EJ} & -\frac{2EJ}{L^2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2EJ}{L} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_n \begin{bmatrix} Y \\ \phi \\ M \\ V \end{bmatrix}_{n-1}^P = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & L & \frac{L^2}{2EJ} & -\frac{L^3}{6EJ} \\ 0 & 1 & \frac{L}{EJ} & -\frac{2EJ}{L^2} \\ 0 & -\alpha^2 J_0 & 1 - \alpha^2 J_0 \frac{L}{EJ} & -L + \alpha^2 J_0 \frac{L^2}{2EJ} \\ -\alpha^2 m & -\alpha^2 mL & -\alpha^2 m \frac{L^2}{2EJ} & 1 + \alpha^2 m \frac{L^3}{6EJ} \end{bmatrix}_n \begin{bmatrix} Y \\ \phi \\ M \\ V \end{bmatrix}_{n-1}^P. \end{aligned} \quad (20)$$

W skróconym zapisie równanie (20) ma następującą postać:

$$\{Z\}_n^P = H_n \{Z\}_{n-1}^P, \quad (21)$$

gdzie H_n jest macierzą przeniesienia n -tego elementu. Wektor stanu n -tego elementu jest związany z wektorem stanu $\{Z\}_0^P$ na brzegu układu następującą zależnością:

$$\{Z\}_n^P = \{H_n H_{n-1} \dots H_2 H_1\} \{Z\}_0^P. \quad (22)$$

2.2.2 Metoda Myklestada wyznaczania częstości własnych układów

Rozpatrywana jest struktura belkowa, którą dzieli się na skończoną liczbę segmentów. Zakłada się, że masy segmentów skupione są na ich końcach.

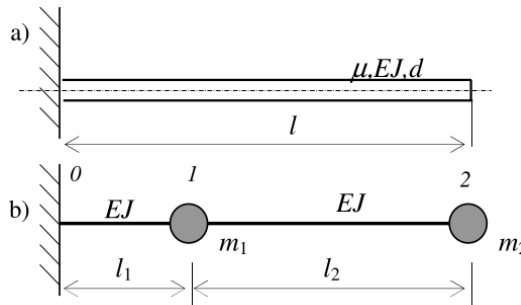
Równanie (22) przedstawiające zależność wiążącą wektor stanu n -tego elementu z wektorem stanu na brzegu układu ilustruje formułę obliczeń rozpatrywanego układu belkowego. Warunki brzegowe dla najczęściej spotykanych sposobów podparcia w przypadku układów belkowych przedstawia Tabela 1.

Tabela 1:

	Y	ϕ	M	V
Proste podparcie	0	ϕ	0	V
Swobodny koniec	Y	ϕ	0	0
Zamurowanie	0	0	M	V

Wynika z powyższego, że w początkowym punkcie (miejscu 0) belki mamy do czynienia z dwoma niezerowymi warunkami początkowymi uzależnionymi od rodzaju podparcia. Podobnie dzieje się na drugim końcu belki. Procedura obliczeń częstości własnych w metodzie Myklestada, polega na założeniu wartości α i przeprowadzeniu obliczeń z zastosowaniem macierzy przeniesienia. Wartość częstości α , która spełnia jednocześnie warunki brzegowe na obu końcach układu jest poszukiwaną częstością drgań własnych.

Przykład. Stosując metodę Myklestada wyznaczyć częstości drgań własnych giętnych belki wspornikowej przedstawionej na Rys. 4a.



Rysunek 4: Belka wspornikowa i model drgający

Dane:

- $m = 0.222$ kg (masa belki);
- $l = 1$ m (długość belki);
- $d = 0.006$ m (średnica belki);
- $J = \pi d^4/64 = 63.6 \times 10^{-12}$ m⁴;
- $E = 2.1 \times 10^{11}$ N/m²;
- $\mu = m/l = 0.222$ kg/m.

Rozwiązanie

Belka została podzielona na dwa segmenty o długości odpowiednio $l_1 = 0.25$ m oraz $l_2 = 0.75$ m (Rys. 4b). Masę 1-go segmentu skupiono na jego prawym końcu, zaś masę 2-go segmentu podzielono na dwie równe części i umieszczono je na obu końcach. Określone w ten sposób masy skupione wynoszą $m_1 = 0.13875$ kg oraz $m_2 = 0.08325$ kg. Następnie określa się macierze przeniesienia segmentów, a następnie wykorzystuje się zależność (22) wiążącą wektor stanu 2-go segmentu z wektorem stanu na brzegu układu.

$$\{Z\}_2^P = H_2 H_1 \{Z\}_0^P, \quad (a)$$

gdzie:

$$\{Z\}_0^P = [Y \quad \phi \quad M \quad V]_0^T = [0 \quad 0 \quad M_0 \quad V_0]^T. \quad (b)$$

Podstawiając dane liczbowe do (20) określa się macierze przeniesienia dla obu segmentów

$$\begin{bmatrix} Y \\ \phi \\ M \\ V \end{bmatrix}_1^P = \begin{bmatrix} 1 & 0.25 & 2.34 \times 10^{-3} & -1.95 \times 10^{-4} \\ 0 & 1 & 1.87 \times 10^{-2} & -2.34 \times 10^{-3} \\ 0 & 0 & 1 & -0.25 \\ -0.138\alpha^2 & -3.47 \times 10^{-2}\alpha^2 & -3.245 \times 10^{-4}\alpha^2 & 1 + 2.704 \times 10^{-5}\alpha^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_0 \\ V_0 \end{bmatrix}, \quad (c)$$

$$\begin{bmatrix} Y \\ \phi \\ M \\ V \end{bmatrix}_2^P = \begin{bmatrix} 1 & 0.75 & 2.1 \times 10^{-2} & -5.26 \times 10^{-3} \\ 0 & 1 & 5.61 \times 10^{-2} & -2.1 \times 10^{-2} \\ 0 & 0 & 1 & -0.75 \\ -8.32 \times 10^{-2}\alpha^2 & -6.24 \times 10^{-2}\alpha^2 & -1.75 \times 10^{-3}\alpha^2 & 1 + 4.38 \times 10^{-5}\alpha^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y \\ \phi \\ M \\ V \end{bmatrix}_1^P. \quad (d)$$

Po uwzględnieniu (c) i (d) w (a) przy zastosowaniu zapisu ogólnego mamy

$$\{Z\}_2^P = H_2 H_1 \{Z\}_0^P = [H] \{Z\}_0^P \Rightarrow \begin{bmatrix} Y \\ \phi \\ M \\ V \end{bmatrix}_2^P = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} & H_{14} \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} & H_{24} \\ H_{31} & H_{32} & H_{33} & H_{34} \\ H_{41} & H_{42} & H_{43} & H_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_0 \\ V_0 \end{bmatrix}. \quad (e)$$

Moment gnący i siła tnąca na swobodnym końcu muszą się zerować (Tabela 1). Wykorzystując oznaczenia zastosowane w (e) warunek ten można zapisać w następującej postaci

$$\begin{aligned} M_2^P &= H_{33}M_0 + H_{34}V_0 = 0, \\ V_2^P &= H_{43}M_0 + H_{44}V_0 = 0. \end{aligned} \quad (f)$$

Warunkiem istnienia nietrywialnych rozwiązań układu równań jednorodnych (f) jest zerowanie się jego wyznacznika charakterystycznego, stąd

$$\begin{vmatrix} H_{33} & H_{34} \\ H_{43} & H_{44} \end{vmatrix} = 0. \quad (g)$$

Jest to równanie pozwalające na wyznaczenie poszukiwanych częstości drgań własnych. Po podstawieniu danych liczbowych równanie (g) ma następującą postać

$$\begin{vmatrix} 1 + 2.434 \times 10^{-4}\alpha^2 & -1 - 2.028 \times 10^{-5}\alpha^2 \\ -3.44 \times 10^{-5}\alpha^2 - 1.42 \times 10^{-7}\alpha^4 & 1 + 1.06 \times 10^{-7}\alpha^2 + 1.18 \times 10^{-8}\alpha^4 \end{vmatrix} = 0. \quad (h)$$

W postaci rozwiniętej równanie (h) można zapisać

$$\alpha^4 - 35.97 \times 10^3 \alpha^2 + 1.69 \times 10^7 = 0. \quad (i)$$

Rozwiązanie równania (i) pozwala na wyznaczenie poszukiwanych częstości własnych

$$\alpha_1 = 21.8 \text{ [rd/s]} \Rightarrow f_1 = 3.47 \text{ [Hz]}, \quad (j)$$

$$\alpha_2 = 188.4 \text{ [rd/s]} \Rightarrow f_2 = 30 \text{ [Hz]}. \quad (23)$$

2.3 Budowa równań wielkości wytrzymałościowych w belkach zginanych

Zacznijmy od przypomnienia pewnych faktów z dziedziny wytrzymałości materiałów. Na rysunku 5a przedstawiono belkę wspornikową o sztywności EI i długości l , obciążoną na swobodnym końcu siłą poprzeczną F . Potrafimy napisać równanie różniczkowe opisujące zależność pomiędzy drugą pochodną ugięcia belki a momentem gnącym:

$$EIy''(x) = F(l - x) \quad (a)$$

Liniową zależność y'' od współrzędnej x pokazuje rysunek 5c. Po scałkowaniu równania (a) otrzymuje się funkcję określającą kąt ugięcia belki y' :

$$EIy'(x) = F \left(lx - \frac{x^2}{2} \right). \quad (b)$$

Paraboliczną zależność y' od współrzędnej x pokazuje rysunek 5b. Po scałkowaniu równania (b) otrzymuje się funkcję określającą ugięcie belki y :

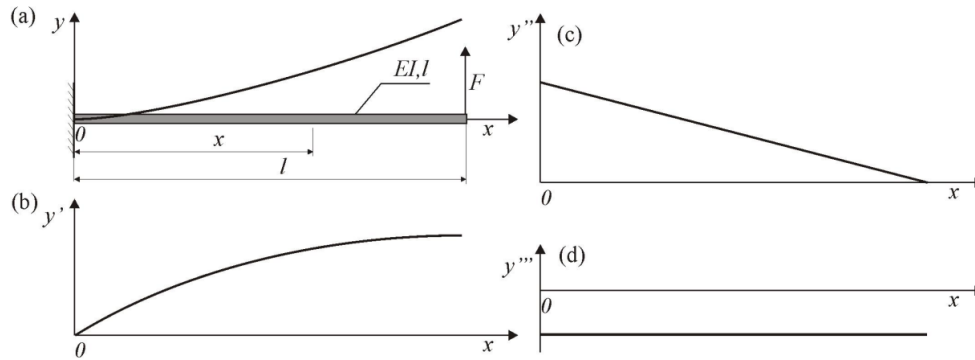
$$EIy(x) = F \left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right). \quad (c)$$

Zależność (krzywa trzeciego stopnia) y od współrzędnej x pokazuje rysunek 5a. To są podstawowe wiadomości znane z wytrzymałości materiałów. Wróćmy do równania (a). Po zróżniczkowaniu równania (a) otrzymuje się funkcję określającą siłę tnącą w belce:

$$EIy'''(x) = -F. \quad (d)$$

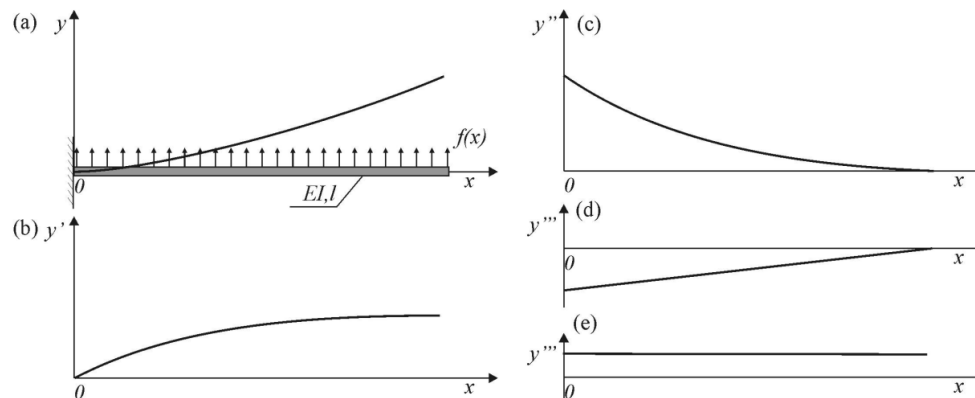
Siła tnąca pokazana jest na rysunku 5d.

Należy zauważyć, że zapisanie równań (a)–(d) możliwe było dzięki temu, że obciążenie belki jest znane, a w szczególności, że jest niezależne od ugięcia belki $y(x)$.



Rysunek 5: Belka wspornikowa zginana siłą skupioną

Kolejny przykład:



Rysunek 6: Belka wspornikowa zginana siłą rozłożoną w sposób ciągły

Na rysunku 6a przedstawiono belkę wspornikową o sztywności EI i długości l , obciążoną na całej długości stałym obciążeniem ciągłym o intensywności $f(x)$ (N/m). Potrafimy napisać równanie różniczkowe opisujące zależność pomiędzy drugą pochodną ugięcia belki a momentem gnącym:

$$EIy''(x) = f(x) \frac{(l - x)^2}{2} \quad (e)$$

Paraboliczną zależność y'' od współrzędnej x pokazuje rysunek 6c. Po scałkowaniu równania (e) otrzymuje się funkcję określającą kąt ugięcia belki y' :

$$EIy'(x) = f(x) \left(\frac{l^2 x}{2} - \frac{lx^2}{2} + \frac{x^3}{6} \right). \quad (f)$$

Zależność y' od współrzędnej x pokazuje rysunek 6b. Po scałkowaniu równania (f) otrzymuje się funkcję określającą ugięcie belki y :

$$EIy(x) = f(x) \left(\frac{l^2 x^2}{4} - \frac{lx^3}{6} + \frac{x^4}{24} \right). \quad (g)$$

Zależność (krzywa czwartego stopnia) y od współrzędnej x pokazuje rysunek 6a. To są także podstawowe wiadomości znane z wytrzymałości materiałów.

Wróćmy do równania (e). Po jego zróżniczkowaniu otrzymuje się funkcję określającą siłę tnącą w belce:

$$EIy'''(x) = -f(x)(l - x) \quad (h)$$

Siła tnąca przedstawiona jest na rysunku 6d.

Wreszcie, po zróżniczkowaniu równania (h), otrzymuje się funkcję określającą intensywność obciążenia ciągłego:

$$EIy''''(x) = f(x) \quad (i)$$

Należy zauważyć, że zapisanie równań (e)–(h) możliwe było także tylko dzięki temu, że obciążenie belki jest znane, a w szczególności, że jest niezależne od ugięcia belki $y(x)$.

Układ, który jest przedmiotem ćwiczenia, to wirująca belka przęsłowa, pokazana na rys. 7.



Rysunek 7: Model belki odpowiadający zgiętemu wałowi

Wobec faktu, że belka przemieszcza się, funkcja y jest funkcją dwóch argumentów: położenia przekroju belki x oraz czasu t . Ponadto, obciążeniem ciągłym jest siła odśrodkowa bezwładności, której wartość zależy od przyspieszenia poszczególnych przekrojów belki. Nieznajomość funkcji $y(x, t)$ uniemożliwia zapisanie równania analogicznego do równania (e). Możliwe jest za to zapisanie równania analogicznego do (i), postaci:

$$EIy''''(x, t) = -\frac{m}{l}\ddot{y}(x, t) \quad (j)$$

gdzie: m – masa belki, l – długość belki.

Zależność intensywności obciążenia od przyspieszenia przekrojów belki uniemożliwia scałkowanie tego równania „wprost”. Rozwiązując się je następująco, po zapisaniu równania w postaci

$$\ddot{y}(x, t) + q^2 y''''(x, t) = 0, \quad q^2 = \frac{EI}{m} \quad (k)$$

Przewiduje się jego rozwiązanie w postaci funkcji

$$y(x, t) = Y(x)T(t), \quad T(t) = a \cos \alpha t + b \sin \alpha t. \quad (l)$$

Tym samym zakłada się, że drgania są harmoniczne, lub są kombinacją liniową drgań harmonicznych (gdy jest wiele wartości α , dla których funkcja (l) spełnia równanie (k)). Z (l) wynika

$$\begin{aligned} \ddot{y}(x, t) &= Y(x)\ddot{T}(t) = -\alpha^2 Y(x)T(t) \\ y''''(x, t) &= Y''''(x)T(t) \end{aligned} \quad (m)$$

Po podstawieniu (m) do (k), otrzymuje się

$$(-\alpha^2 Y(x) + q^2 Y''''(x))T(t) = 0 \quad (n)$$

skąd, wobec $T(t) \neq 0$

$$Y''''(x) = \eta^4 Y(x), \quad \eta^4 = \frac{\alpha^2}{q^2} = \frac{\alpha^2 m}{EI} \quad (o)$$

Równanie (15) jest spełnione przez następujące rozwiązania szczególne:

$$\begin{aligned} Y_1(x) &= A \cos \eta x, \\ Y_2(x) &= B \sin \eta x, \\ Y_3(x) &= C \cosh \eta x, \\ Y_4(x) &= D \sinh \eta x. \end{aligned} \quad (p)$$

Wobec warunków brzegowych

$$Y(0) = 0, \quad Y''(0) = 0, \quad Y(l) = 0, \quad Y''(l) = 0, \quad (q)$$

Otrzymuje się $A = C = D = 0$ oraz $B \sin \eta l = 0$. Stąd, wobec oczywistego warunku $B \neq 0$, wynika

$$\sin \eta l = 0 \quad (r)$$

a stąd:

$$\eta l = i\pi, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad \eta^4 l^4 = i^4 \pi^4 = \frac{\alpha^2 m l^4}{EI} \quad (s)$$

Z ostatniego równania otrzymuje się wzór określający wartości kolejnych częstości kołowych drgań swobodnych belki przęsłowej, poddanej działaniu odśrodkowej siły bezwładności:

$$\alpha_i = \frac{i^2 \pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (t)$$

Drgania harmoniczne zachodzące z poszczególnymi częstościami kołowymi, mają postać funkcji:

$$y(x, t) = B \sin\left(\frac{i\pi}{l}x\right) (a \cos(\alpha_i t) + b \sin(\alpha_i t)) \quad (u)$$

2.4 Wirnik jako układ z ciągłym rozkładem masy

W celu wyznaczenia dokładnej wartości pierwszej częstości drgań własnych, jak również obliczenia wyższych częstości w przypadku belki o stałym przekroju, posłużyć się można technicznym równaniem drgań poprzecznych belki, które ma postać

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0, \quad (24)$$

gdzie:

$$a^2 = \frac{\mu}{EJ}. \quad (25)$$

Rozwiązanie równania (23) poszukuje się w postaci iloczynu funkcji współrzędnej x oraz funkcji czasu t

$$y(x, t) = U(x)T(t). \quad (26)$$

Po podstawieniu (25) do (23) jest

$$U^{IV}(x)T(t) + a^2 U(x)\ddot{T}(t) = 0, \quad (27)$$

stąd

$$\frac{U^{IV}(x)}{U(x)} = -a^2 \frac{\ddot{T}(t)}{T(t)}. \quad (28)$$

Spełnienie równania (27) dla dowolnych wartości x i t wymaga aby obie strony tego równania były równe stałej, którą oznaczono k^4

$$\frac{U^{IV}(x)}{U(x)} = -a^2 \frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = k^4. \quad (29)$$

Stąd rozwiązanie problemu drgań poprzecznych belki sprowadza się do rozwiązania dwóch niezależnych równań różniczkowych zwyczajnych

$$U^{IV}(x) - k^4 U(x) = 0, \quad (4.29)$$

$$\ddot{T}(t) + \alpha^2 T(t) = 0, \quad (4.30)$$

gdzie:

$$\alpha^2 = \frac{k^4}{a^2}. \quad (30)$$

Rozwiązanie ogólne równania (29) ma następującą postać:

$$U(x) = A \sin kx + B \cos kx + C \sinh kx + D \cosh kx, \quad (31)$$

gdzie: A, B, C, D – stałe, wyznaczone z warunków brzegowych. W przypadku podparcia przegubowego na końcach, jak w układzie badanym, warunki brzegowe mają postać

$$\begin{aligned} y(0, t) &= 0, & y(l, t) &= 0, \\ \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} \Big|_{x=0} &= 0, & \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} \Big|_{x=l} &= 0. \end{aligned} \quad (32)$$

Podstawiając rozwiązanie (32) do (33) otrzymuje się ostatecznie ciąg funkcji własnych, określających postacie ugięcia belki przegubowo podpartej na końcach

$$U_n(x) = \sin k_n x = \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (33)$$

Rozwiązanie równania różniczkowego (30) ma następującą postać:

$$T_n(t) = K_n \cos \alpha_n t + L_n \sin \alpha_n t, \quad (34)$$

gdzie: K_n i L_n są stałymi wyznaczanymi z warunków początkowych. Wartości częstości drgań własnych α_n , odpowiadające kolejnym funkcjom własnym belki, na podstawie (31) oraz (34) określa wzór

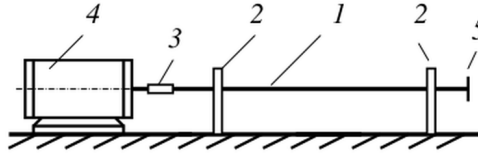
$$\alpha_n = \frac{k_n^2}{a} = \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{\mu}}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (35)$$

Ostatecznie rozwiązanie technicznego równania drgań poprzecznych belki, która jest przegubowo podparta na końcach, jest postaci

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (K_n \cos \alpha_n t + L_n \sin \alpha_n t) \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (36)$$

3 Stanowisko pomiarowe

Schemat urządzenia pomiarowego jest przedstawiony na Rys. 5. Jest to stoisko modelowe pozwalające na obserwację i pomiar trzech kolejnych prędkości krytycznych wału.



Rysunek 8: Schemat stanowiska pomiarowego

Wał 1 ułożyskowany w wahliwych łożyskach kulkowych, osadzonych w obudowach łożyskowych 2, jest napędzany poprzez sprzęgło podatne 3 silnikiem prądu stałego 4. Silnik i obudowy łożysk są mocowane na wspólnej podstawie. Na końcu wału jest zamocowana mała tarcza 5 umożliwiającą pomiar prędkości obrotowej wału. Układ zasilania umożliwia zmianę prędkości obrotowej silnika. Wymiary wału zostały dobrane w taki sposób, aby w zakresie prędkości obrotowych silnika ($0 \div 6000$ obr/min) można było obserwować trzy kolejne prędkości krytyczne. Wał ma formę pręta stalowego o długości $l = 1$ m i średnicy $d = 6$ mm i masę $m = 0.222$ kg.

4 Przebieg ćwiczenia

Dysponując danymi dotyczącymi wymiarów i masy wału znajdującego się w stoisku pomiarowym należy dokonać obliczeń jego trzech najniższych prędkości krytycznych. Obliczenia te należy przeprowadzić traktując wirnik kolejno jako układ o jednym stopniu swobody, jako układ z ciągłym rozkładem masy oraz jako układ dyskretny o skończonej liczbie stopni swobody.

Traktując wirnik jako układ o jednym stopniu swobody, na podstawie wzoru (9) lub wzoru (36) dla $n = 1$, można obliczyć wartość pierwszej prędkości krytycznej. Wartości wyższych prędkości krytycznych (drugiej i trzeciej) można również obliczyć ze wzoru (36) dla kolejnych wartości n , traktując wirnik jako układ z ciągłym rozkładem masy. Obliczone wartości należy zapisać w tabeli umieszczonej w sprawozdaniu.

Następnie należy przeprowadzić obliczenia prędkości krytycznych wału znajdującego się w stoisku pomiarowym, traktowanego jako układ dyskretny o skończonej liczbie stopni swobody.

Ze względu na skomplikowaną budowę maszyn wirnikowych przy obliczeniach ich prędkości krytycznych w praktyce inżynierskiej najczęściej przeprowadza się dyskretyzację badanego układu, a następnie prowadzi obliczenia układu zdyskretyzowanego. Sposób dyskretyzacji układu (podziału na elementy), ma bezpośredni wpływ na dokładność otrzymywanych wyników.

Do obliczeń prędkości krytycznych badanego wału traktowanego jako układ dyskretny w ćwiczeniu zastosowano metodę Myklestada. Przy użyciu programu obliczeń numerycznych należy wyznaczyć wartości prędkości krytycznych odpowiadających różnym podziałom na elementy. Obliczone wartości prędkości krytycznych należy porównać z wynikami uzyskanymi przy użyciu pozostałych modeli obliczeniowych.

W części doświadczalnej ćwiczenia należy przeprowadzić obserwację i pomiar prędkości krytycznych badanego wału znajdującego się w stoisku pomiarowym.

Dla obserwacji prędkości krytycznych wirnika, uruchamia się silnik i zwiększa się powoli prędkość obrotową wału. Należy dokonać pomiaru prędkości obrotowej, przy której wartości ugięcie wału osiąga maksimum. Pomiaru należy dokonać trzykrotnie. W przypadku, gdy ugięcia wału są zbyt duże i następuje uderzanie wału o ograniczniki, liczbę pomiarów ogranicza się do dwóch i dokonuje się ich odpowiednio przy prędkości niższej od krytycznej i wyższej od krytycznej, przy których nie następuje uderzenie wału o ograniczniki. Wyniki pomiarów zapisuje się w tabeli pomiarowej i oblicza wartość średnią. Dla łatwiejszego przejścia przez prędkość krytyczną (bez nadmiernych ugięć wału i uderzania o ograniczniki) należy zmniejszyć prędkość obrotową silnika i przechodzić przez rezonans z większym przyspieszeniem. Należy wykonać rysunki zaobserwowanych postaci ugięcia wału odpowiadających poszczególnym prędkościom krytycznym.

Po przeprowadzeniu wszystkich pomiarów należy porównać wartości zmierzonych prędkości krytycznych z wartościami obliczonymi analitycznie przy użyciu różnych metod obliczeniowych. Sformułować wnioski wynikające z porównania otrzymanych wyników.

5 Literatura

1. Parszewski Z.: *Drgania i dynamika maszyn*. PWN, Warszawa 1982.
2. Kapitaniak T.: *Wstęp do teorii drgań*. Wydawnictwo Politechniki Łódzkiej, Łódź 1992.
3. Tse F. S., Morse I. E., Hinkle R. T.: *Mechanical Vibrations – Theory and Applications*, Allyn and Bacon Inc., Boston London Sydney Toronto, 1978.

LABORATORIUM
DRGAŃ
MECHANICZNYCH

Ćwiczenie 4

WYZNACZANIE PRĘDKOŚCI KRYTYCZNYCH
WAŁÓW

Grupa: _____
Zespół: _____

data _____

Imię i nazwisko:

1. _____
2. _____
3. _____
4. _____
5. _____
6. _____

Wyniki

Wał: pręt stalowy o długości $l = 1$ m i średnicy $d = 6$ mm i masie $m = 0.222$ kg.

Obliczenia prędkości krytycznych wału rozważanego jako układ o jednym stopniu swobody [rad/s]:

$$\alpha_1 = \sqrt{\frac{48 \times 35 \times EJ}{17 \times m \times l^3}} \approx \omega_{kr} = \frac{9.941}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{\mu}} =$$

Obliczenia prędkości krytycznych wału rozważanego jako układ ciągły [rad/s]:

$$\omega_1 = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{\mu}} = \quad , \quad \omega_2 = \frac{4\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{\mu}} = \quad , \quad \omega_3 = \frac{9\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{\mu}} =$$

	pomiar	obliczenia					
pr. kryt.	ω_{pom} [rad/s]	ω_{obl1} [rad/s]	$\frac{\omega_{\text{obl1}}}{\omega_{\text{pom}}} [\%]$	ω_{obl2} [rad/s]	$\frac{\omega_{\text{obl2}}}{\omega_{\text{pom}}} [\%]$	ω_{obl3} [rad/s]	$\frac{\omega_{\text{obl3}}}{\omega_{\text{pom}}} [\%]$
I							
II							
III							

Tabela pomiarów i wyników obliczeń

Rysunki linii ugięcia wału odpowiadające trzem kolejnym prędkościom krytycznym:

Wnioski: