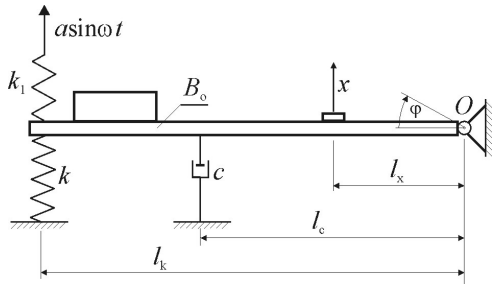
IDENTYFIKACJA PARAMETRÓW UKŁADU DRGAJĄCEGO O JEDNYM STOPNIU SWOBODY

Drgania i Dynamika Maszyn – Ćwiczenie 3*

1 Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest określenie wartości współczynnika tłumienia, współczynnika sztywności oraz amplitudy wymuszenia układu drgającego o jednym stopniu swobody.



Rysunek 1: Schemat układu drgającego

Na rys. 1 przedstawiono układ drgający złożony z następujących elementów:

- sztywna belka połączona z ostoją węzłem obrotowym O,
- zespół sprężyn o współczynniku sztywności k,
- tłumik olejowy o współczynniku tłumienia c,
- zespół sprężyn o współczynniku sztywności k_1.

Zespół sprężyn o współczynniku sztywności k_1 połączony jest z mimośrodem na wale silnika napędowego; obracanie się wału silnika stanowi kinematyczne wymuszenie ruchu górnych końców tych sprężyn, opisane jako $a \sin \omega t$. Wskutek wymuszenia, belka wychyla się z położenia równowagi o kąt ϕ. Wychylenie belki mierzone jest czujnikiem przemieszczenia liniowego, określającego przemieszczenie x punktu belki oddalonego o l_x od osi obrotu. Równanie ruchu liniowego modelu fizycznego badanego układu jest następujące:

$$B_0\ddot{\phi} + cl_c^2\dot{\phi} + (k + k_1)\phi = k_1 l_k a \sin \omega t \tag{1}$$

gdzie: B_0 - moment bezwładności belki względem osi obrotu. Dzieląc równanie (1) przez B_0 i mnożąc przez l_x otrzymuje się:

$$l_x\ddot{\phi} + \frac{cl_c^2}{B_0} l_x\dot{\phi} + \frac{k + k_1}{B_0} l_x\phi = \frac{k_1 l_k a l_x}{B_0} \sin \omega t \tag{2}$$

Oznaczając:

$$l_x\ddot{\phi} = \ddot{x}, \quad \frac{cl_c^2}{B_o} = 2h, \quad \frac{k + k_1}{B_o} = \alpha^2, \quad l_x\phi = x, \quad \frac{k_1 l_k a l_x}{B_0} = q \tag{3}$$

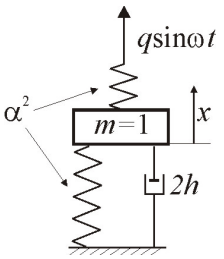
*W: Laboratorium Drgań Mechanicznych, K. Marynowski (red), Łódź 2002

można zapisać równanie (1) w postaci:

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \alpha^2 x = q \sin \omega t \tag{4}$$

gdzie:

$2h$ – tłumienie,
α^2 – częstość kołowa swobodnych drgań układu,
q – wymuszenie kinematyczne.



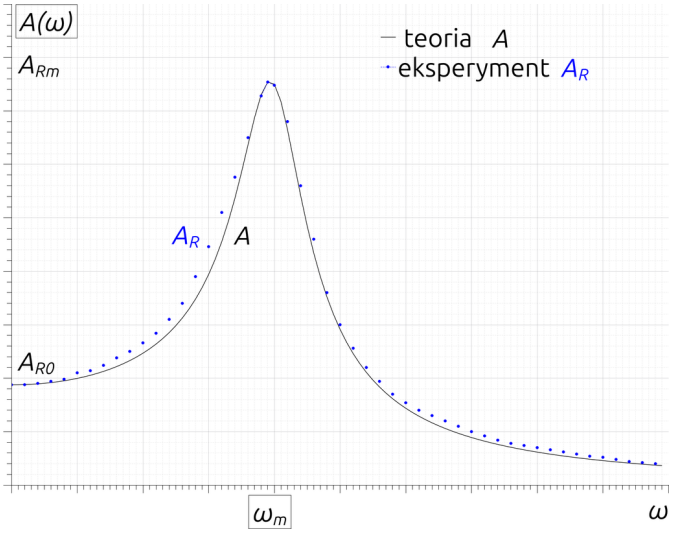
Rysunek 2: Model fizyczny układu

Rozwiązaniem szczególnym równania różniczkowego (4), opisującym drgania wymuszone modelu fizycznego badanego układu, pokazanego na rys. 2, jest funkcja:

$$x(t) = A \sin(\omega t + \beta), \tag{5}$$

gdzie A jest amplitudą drgań wymuszonych a β kątem fazowym pomiędzy przebiegiem wymuszenia kinematycznego a przebiegiem drgań modelu fizycznego. Amplituda A jako funkcja częstości wymuszenia ω wyrażona jest wzorem:

$$A(\omega) = \frac{q}{\sqrt{(\alpha^2 - \omega^2)^2 + 4h^2\omega^2}} \tag{6}$$



Rysunek 3: Wykresy rezonansowe

a jej wykres ma kształt krzywej rezonansowej pokazanej linią ciągłą na rys. 3. Wyznaczenie wartości parametrów α, h, q w równaniu (6), to zadanie, które można rozwiązać w sposób opisany poniżej.

Dokonując pomiaru amplitudy drgań układu rzeczywistego przy różnych wartościach częstości kołowej wymuszenia, otrzymuje się rzeczywisty wykres rezonansowy $A_R(\omega)$, przedstawiony na rys. 3 w postaci (niebieskich) punktów. Wartość amplitudy drgań układu rzeczywistego dla małej (praktycznie równej zeru) wartości częstości kołowej ω, oznaczono jako A_{R0}. Amplituda osiąga wartość maksymalną A_{Rm} przy częstości rezonansowej ω_m. Teoretyczny wykres rezonansowy, przedstawiony na rys. 3 linią ciągłą wynika z obliczeń wartości amplitudy drgań $A(\omega)$ za pomocą wzoru (6).
Zakłada się, że oba wykresy rezonansowe muszą spełniać trzy warunki:

1. Dla częstości kołowej ω bliskiej zeru, amplitudy A i A_R są takie same:
$$A(0) = \frac{q}{\sqrt{(\alpha^2 - 0^2)^2 + 4h^2 \cdot 0^2}} = \frac{q}{\alpha^2} = A_{R0} \tag{7}$$

2. Dla częstości kołowej rezonansowej ω_m, amplitudy A i A_R są także takie same:
$$A(\omega_m) = \frac{q}{\sqrt{(\alpha^2 - \omega_m^2)^2 + 4h^2\omega_m^2}} = A_{Rm} \tag{8}$$

3. Dla częstości ω_m, amplituda A osiąga wartość maksymalną (podobnie jak A_R), zatem:
$$\frac{\partial A}{\partial \omega}(\omega = \omega_m) = \frac{q[-4\omega(\alpha^2 - \omega^2) + 8h^2\omega]}{2\sqrt{((\alpha^2 - \omega_m^2)^2 + 4h^2\omega^2)^3}} = 0 \tag{9}$$

Układ równań (7), (8), (9) można łatwo przekształcić do postaci:
$$q = \frac{\omega_m^2 A_{R0}}{\xi}, \quad \alpha^2 = \frac{\omega_m^2}{\xi}, \quad 2h = \omega_m\sqrt{\frac{1}{2\xi} - 1} \tag{10}$$
gdzie:
$$\xi = \sqrt{1 - \frac{A_{R0}^2}{A_{Rm}^2}} \tag{11}$$
co pozwala na obliczenie nieznanych wartości parametrów α, h, q. Znajomość tych wartości pozwala na identyfikację **parametrów układu rzeczywistego** na podstawie wzorów:
$$c = \frac{2hB_0}{l_c^2}, \quad k_1 = \frac{qB_0}{al_k l_x}, \quad k = B_0\alpha^2 - k_1 \tag{12}$$
Pomiary i obliczenia wykonane wcześniej pozwoliły ustalić wartości pozostałych potrzebnych parametrów:
$$B_0 = 1.38 \text{ kgm}^2, \quad a = 0.003 \text{ m}, \quad l_c = 0.541 \text{ m}, \quad l_k = 0.54 \text{ m}, \quad l_x = 0.24 \text{ m}\,. \tag{13}$$

Przebieg ćwiczenia:

1. Zmierzyć amplitudę drgań A_R dla różnych wartości prędkości kątowej ω; liczba pomiarów około 15. Ustalić wartość ω_m, dla której amplituda drgań osiąga wartość maksymalną A_{Rm}. Ustalić wartość amplitudy A_{R0} przy bliskiej zeru prędkości kątowej. Wyniki wpisać do tabeli.

2. Obliczyć wartości parametrów α, h, q, korzystając ze wzorów (10).

3. Obliczyć wartości amplitudy A teoretycznego wykresu rezonansowego, korzystając ze wzoru (6), dla tych wartości ω, dla których dokonano pomiaru A_R.

4. Narysować rzeczywisty i teoretyczny wykres rezonansowy.

5. Obliczyć wartości parametrów układu rzeczywistego k, c, k_1, korzystając ze wzorów (12) i wartości parametrów podanych we wzorze (13).

LABORATORIUM DRGAŃ MECHANICZNYCH

Ćwiczenie 3

IDENTYFIKACJA PARAMETRÓW UKŁADU DRGAJĄCEGO O JEDNYM STOPNIU SWOBODY

Grupa: _____
Zespół: _____

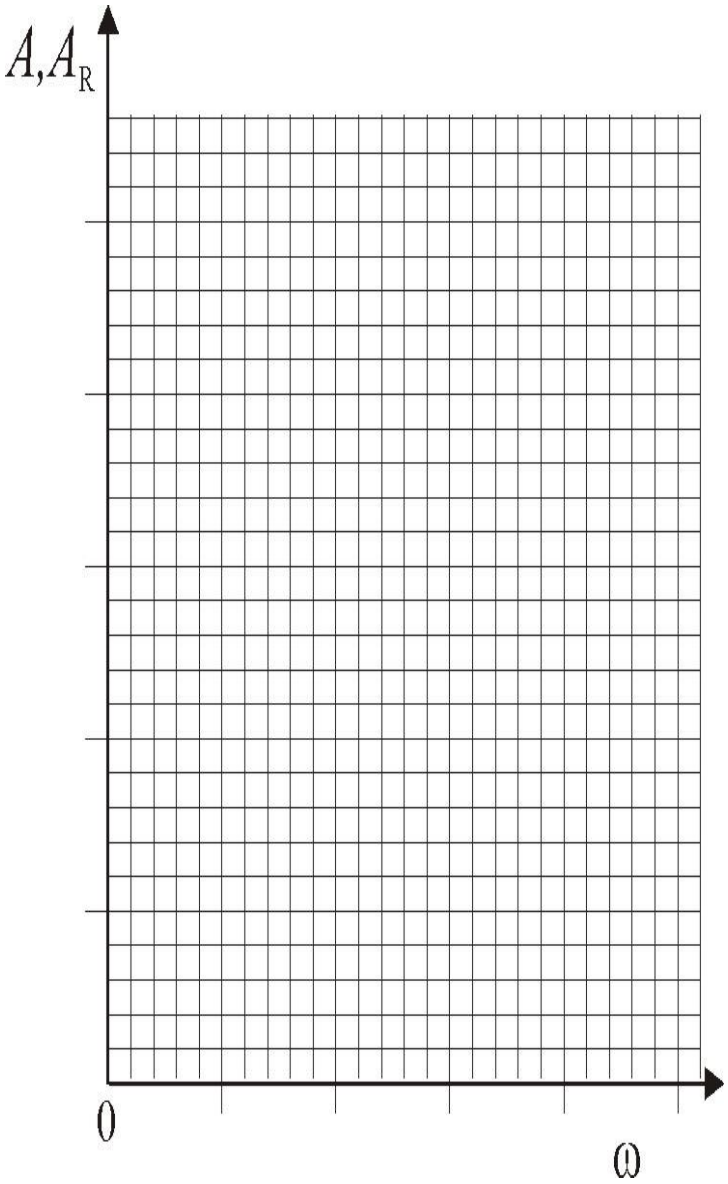
data _____

Imię i nazwisko:

1. _____
2. _____
3. _____
4. _____
5. _____
6. _____

Wyniki pomiarów:

ω	A_R	A



Wyniki pomiarów:

$\omega_m =$ _____ [rad/s] $A_{Rm} =$ _____ [m] $A_{R0} =$ _____ [m]

Parametry modelu fizycznego:

$\xi = \sqrt{1 - \frac{A_{R0}^2}{A_{Rm}^2}} =$ _____ [ ] $q = \frac{\omega_m^2 A_{R0}}{\xi} =$ _____ [ ]

$\alpha^2 = \frac{\omega_m^2}{\xi} =$ _____ [ ] $2h = \omega_m \sqrt{\frac{1}{2\xi} - 1} =$ _____ [ ]

Amplituda drgań modelu fizycznego

$A = \frac{q}{\sqrt{(\alpha^2 - \omega^2)^2 + 4h^2\omega^2}} =$ _____ [m]

Parametry układu rzeczywistego:

$c = \frac{2hB_0}{l_c^2} =$ _____ [rad/s] $k_1 = \frac{qB_0}{al_k l_x} =$ _____ [N/m] $k = B_0\alpha^2 - k_1 =$ _____ [N/m]