



Ćwiczenie 3

WYZNACZANIE ZREDUKOWANEGO MOMENTU BEZWŁADNOŚCI UKŁADU MECHANICZNEGO I MASOWYCH MOMENTÓW BEZWŁADNOŚCI TARCZ KOŁOWYCH

3.1. Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest doświadczalne wyznaczenie zredukowanego momentu bezwładności ruchomych elementów wciągarki oraz doświadczalne określenie momentów bezwładności kołowych tarcz.

3.2. Wprowadzenie

W obliczeniach dynamiki maszyn analizując ruch ciała sztywnego należy znać rozkład mas w ciele. Rozkład masy określa się za pomocą wielkości charakterystycznych dla danego ciała takich jak: położenie środka masy, momenty bezwładności, momenty dewiacyjne.

Równania ruchu złożonego układu mechanicznego tworzone są najczęściej metodą Newtona-Eulera. Polega ona na podziale układu na podukłady i napisaniu równań ruchu dla każdego podukładu. Dodatkowe równania wynikają z zależności kinematycznych. Otrzymana w ten sposób liczba równań jest zazwyczaj znacznie większa niż liczba stopni swobody rozpatrywanego układu.

Proces zmniejszania liczby równań, poprzez rugowanie kolejnych niewiadomych przyspieszeń, nazywa się redukcją układu. Redukcję można prowadzić aż do otrzymania takiej liczby równań ruchu, jaka jest liczba stopni swobody układu (minimalna liczba równań opisujących ruch układu mechanicznego jest równa liczbie stopni swobody układu.) Współczynniki występujące przy przyspieszeniach w równaniach ruchu (po przeprowadzeniu redukcji) nazywa się masami zredukowanymi i zredukowanymi momentami bezwładności. Masa zredukowana (m_{red}) jest współczynnikiem, który jest mnożony przez przyspieszenie (p_i), a zredukowany moment bezwładności (J_{kred}) występuje przy przyspieszeniu kątowym (e_k).

Układ o jednym stopniu swobody można zredukować do jednego równania, w którym wystąpi tylko jedno przyspieszenie (p) i masa zredukowana lub przyspieszenie kątowe (e) i zredukowany moment bezwładności.

Stanowiskiem badawczym do eksperymentalnego określenia zredukowanego momentu bezwładności oraz momentów bezwładności wybranych ciał jest model wciągarki o jednym stopniu swobody.

Bilans energii kinetycznej ruchomych elementów wciągarki i analiza kinematyczna układu, pozwala na określenie zredukowanego momentu bezwładności ruchomych elementów do osi obrotu jednego z ciał. Wykorzystuje się go również do wyznaczenia momentów bezwładności tarcz kołowych. Określone doświadczalnie wartości momentów bezwładności tarcz porównywane są z wartościami obliczonymi teoretycznie.

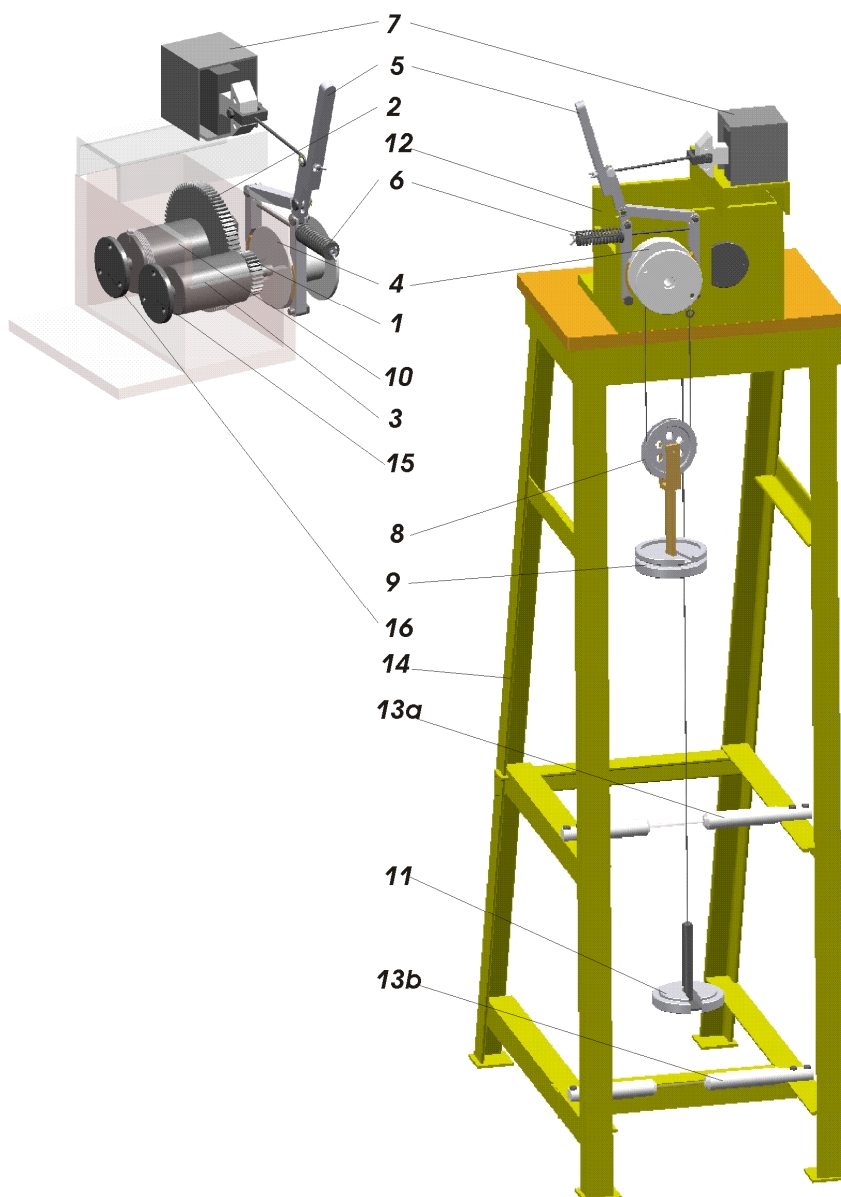
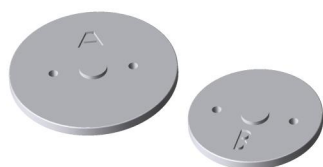
3.3. Opis stanowiska badawczego

3.3.1. Budowa modelu wciągarki

Ogólny widok modelu wciągarki jest przedstawiony na rysunku 3.1. W metalowej odbudowie wciągarki (12) umieszczono dwa wałki oznaczone jako I i II. Na wałku I (15) osadzone jest małe koło zębate (1), stalowy walec (3) i koło hamulca (4). Do czola koła hamulcowego mocowane są tarcze kołowe A i B o masach m_A i m_B , których mo-

menty bezwładności mają być wyznaczone doświadczalnie. Tarcze przedstawiono na rys.3.2. Na koło hamulca nawinięta jest linka opasująca ruchomy krążek (8) z obciążnikiem (9) o masie m_1 . Na wałku II (16) osadzone jest duże koło zębate (2) i rowkowany bęben (10), na który nawinięta jest linka obciążona ciałem (11) o masie m_2 .

- 1 – koło zębate małe,
- 2 – koło zębate duże,
- 3 – walec,
- 4 – koło hamulca,
- 5 – dźwignie hamulca
- szczękowego,
- 6 – sprężyna hamulca,
- 7 – luzownik
- elektromagnetyczny,
- 8 – ruchomy krążek,
- 9 – obciążnik o masie m_1 ,
- 10 – bęben linowy,
- 11 – obciążnik o masie m_2 ,
- 12 – obudowa wciągarki,
- 13 – czujniki optyczne:
- a) górny, b) dolny,
- 14 – stojak,
- 15 – wałek I,
- 16 – wałek II



Rys. 3.2. Tarcza A i tarcza B

Rys. 3.1. Stanowisko badawcze - model wciągarki

3.3.2. Opis ruchu elementów modelu i zasada pomiarów

Ciało o masie m_1 poruszając się w dół przebywa drogę s_1 , a ciało o masie m_2 w tym samym czasie przebywa w górę drogę s_2 . Wciągarka umieszczona została na stojaku (14), do którego przymocowano dwa czujniki optyczne (13). Odległość między czujnikami stanowi drogę s_2 . Ciało o masie m_2 przechodząc pomiędzy czujnikami dolnymi i górnymi zasłania strumień świetlny i tym samym wytwarza impulsy przekazywane przez fototranzystory na układ wyzwalający, który steruje luzownikiem elektromagnetycznym hamulca szczękowego i miernikiem czasu. Na mierniku jest odczytywany czas, w jakim ciało o masie m_2 przebywa tę drogę. Sygnał z górnego czujnika zwalnia luzownik elektromagnetyczny (7) hamulca szczękowego (5) zatrzymującego cały układ. Przycisk znajdujący się na stole przy stoisku badawczym służy do zwalniania hamulca poprzez luzownik.

3.4. Podstawowe zależności teoretyczne

3.4.1. Pojęcie zredukowanego momentu bezwładności

Zredukowanym momentem bezwładności układu mechanicznego o jednym stopniu swobody do członu napędowego (poruszającego się z prędkością kątową ω w określonej chwili t), nazywa się moment bezwładności takiego fikcyjnego ciała, które posiadałoby energię kinetyczną równą sumie energii kinetycznych wszystkich elementów układu w tej samej chwili t .

Wykorzystanie pojęcia momentu zredukowanego (J_{red}) pozwala na przedstawienie energii kinetycznej układu o jednym stopniu swobody jako

$$E = \frac{1}{2} J_{red} \omega_1^2 \quad (3.1)$$

oraz dynamicznego równania ruchu układu w postaci

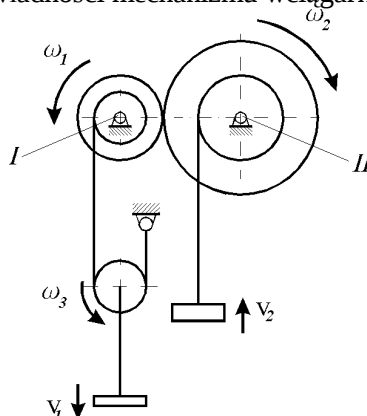
$$J_{red} e_I = M_{red}, \quad (3.2)$$

gdzie:

- J_{red} – zredukowany moment bezwładności,
- ω_1 – prędkości członu napędowego,
- e_I – przyspieszenia członu napędowego,
- M_{red} – zredukowany moment napędowy.

3.4.2. Wyznaczenie zredukowanego momentu bezwładności układu na podstawie energii kinetycznej

Przeprowadźmy redukcję momentu bezwładności mechanizmu wciągarki do osi obrotu wałka I (rys. 3.3).

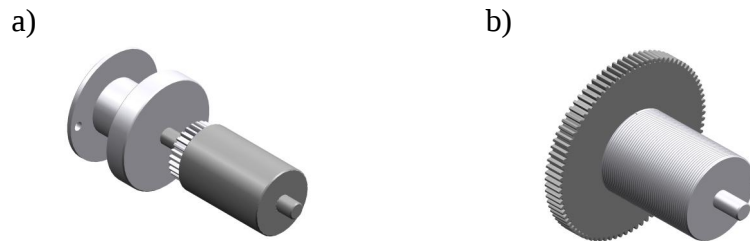


Rys. 3.3. Schemat kinematyczny modelu wciągarki

Przyjmijmy, że wałek I posiada w chwili t prędkość kątową ω_1 . Energia kinetyczna mechanizmu wciągarki jest sumą energii wszystkich poruszających się ciał. Energia kinetyczna ciał osadzonych na wale I (rys.3.4-a) wynosi

$$E_1 = \frac{1}{2} (J_1 + J_2 + J_3 + J_4) \omega_1^2, \quad (3.3)$$

- gdzie: J_1 – moment bezwładności koła zębatego (1),
 J_2 – moment bezwładności walca (3),
 J_3 – moment bezwładności koła hamulca (4),
 J_4 – moment bezwładności wałka I (15),
 (wszystkie momenty bezwładności wyznaczone są względem osi I).



Rys. 3.4. Wałki wciągarki wraz z osadzonymi na nich elementami
a) wałek I, b) wałek II

Energia kinetyczna ciał osadzonych na wale II (rys.3.4-b) wynosi:

$$E_2 = \frac{1}{2} (J_5 + J_6 + J_7) w_2^2, \quad (3.4)$$

gdzie: w_2 – prędkość kątowna wałka II,

J_5 – moment bezwładności koła zębatego (2),

J_6 – moment bezwładności bębna linowego (10),

J_7 – moment bezwładności wałka II (16),

(wszystkie momenty bezwładności wyznaczane są względem osi II).

Miedzy prędkościami kątowymi w_2 i w_1 istnieje następująca zależność

$$w_2 = w_1 \frac{z_1}{z_2},$$

gdzie z_1 i z_2 - liczba zębów odpowiednio koła zębatego (1) i (2).

Po podstawieniu tej zależności do (3.3) otrzymuje się

$$E_2 = \frac{1}{2} w_1^2 \left(\frac{z_1}{z_2} \right)^2 (J_5 + J_6 + J_7). \quad (3.5)$$

Energia kinetyczna ciała o masie m_2 i talerzyka o masie m_{t2} wynosi:

$$E_3 = \frac{1}{2} m_{t2} v_2^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2, \quad (3.6)$$

gdzie v_2 – prędkość ciała o masie m_2 , przy czym

$$v_2 = w_2 r_6 = w_1 \frac{z_1}{z_2} r_b,$$

w którym r_b – promień bębna linowego.

Zatem

$$E_3 = \frac{1}{2} w_1^2 r_b^2 \left(\frac{z_1}{z_2} \right)^2 (m_{t2} + m_2). \quad (3.7)$$

Energia kinetyczna krążka ruchomego (8), ciała o masie m_1 i talerzyka o masie m_{t1} wynosi

$$E_4 = \frac{1}{2} m_{kr} v_1^2 + \frac{1}{2} J_8 w_3^2 + \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_{t1} v_1^2, \quad (3.8)$$

gdzie: v_1 – prędkość środka masy krążka ruchomego,

w_3 – prędkość kątowna krążka ruchomego,

m_{kr} – masa krążka ruchomego,

J_8 – moment bezwładności krążka ruchomego względem jego osi obrotu.

Prędkość kątową krążka ruchomego i prędkość środka masy tego krążka określają zależności:

$$\omega_3 = \frac{\omega_1 r_3}{2 r_{kr}},$$

$$v_1 = \omega_3 r_{kr} = \frac{\omega_1 r_3}{2},$$

w których: r_3 - promień koła hamulca,

r_{kr} - promień krążka ruchomego.

Po uwzględnieniu powyższych zależności w (3.8) otrzymuje się

$$E_4 = \frac{1}{8} \omega_1^2 r_3^2 \left(m_{kr} + \frac{J_8}{r_{kr}^2} + m_1 + m_{t1} \right). \quad (3.9)$$

Energia kinetyczna wciągarki ($E_1 + E_2 + E_3 + E_4$) w funkcji ω_1 wyraża się więc następująco:

$$E = \frac{1}{2} \omega_1^2 \left[J_1 + J_2 + J_3 + J_4 + \left(\frac{z_1}{z_2} \right)^2 (J_5 + J_6 + J_7) + \right. \\ \left. + r_b^2 \left(\frac{z_1}{z_2} \right)^2 (m_{t2} + m_2) + \frac{1}{4} r_3^2 \left(m_{kr} + \frac{J_8}{r_{kr}^2} + m_1 + m_{t1} \right) \right]. \quad (3.10)$$

Aby energia kinetyczna fikcyjnego ciała, umieszczonego na osi wałka I była równa energii rzeczywistego układu opisanego wzorem (3.10), wartość momentu bezwładności ciała powinno być równa wartości obliczonej ze wzoru:

$$J_{red} = J_1 + J_2 + J_3 + J_4 + \left(\frac{z_1}{z_2} \right)^2 (J_5 + J_6 + J_7) + \\ + r_b^2 \left(\frac{z_1}{z_2} \right)^2 (m_{t2} + m_2) + \frac{1}{4} r_3^2 \left(m_{kr} + \frac{J_8}{r_{kr}^2} + m_1 + m_{t1} \right). \quad (3.11)$$

Wzór (3.11) określa zredukowany moment bezwładności (do wałka I) ruchomych elementów wciągarki.

3.4.3. Wyznaczanie zredukowanego momentu bezwładności wciągarki

W celu doświadczalnego określenia zredukowanego momentu bezwładności J_{red} ruchomych elementów wciągarki, posłużymy się zależnością (3.1)

$$J_{red} e = M_{red}.$$

Dla modelu wciągarki M_{red} jest momentem sił zewnętrznych, zredukowanych do osi wałka I oznaczonym jako M_I , zaś e przyspieszeniem kątowym wałka I oznaczonym jako e_1 , zatem

$$J_{red} e_1 = M_I. \quad (3.12)$$

Moment sił zewnętrznych jest równy sumie algebraicznej: momentów sił ciężkości ciał o masach m_1 i m_2 wraz z talerzykami o masach m_{t1} i m_{t2} , momentowi siły ciężkości krążka ruchomego o masie m_{kr} oraz momentowi oporów mechanizmu

$$M_I = \frac{(m_1 + m_{t1} + m_{kr})g}{2} r_3 - (m_2 + m_{t2})g r_b \frac{z_1}{z_2} - M_t, \quad (3.13)$$

gdzie: M_t – moment oporów mechanizmu, który jest wyznaczany doświadczalnie, w sposób omówiony w punkcie 3.5.1,
 g – przyspieszenie ziemskie.

Celem wyznaczenia przyspieszenia e_1 w doświadczeniu mierzony jest czas t_2 w jakim ciało o masie m_2 przebywa drogę s_2 . Przy założeniu ruchu jednostajnie przyspieszonego bez prędkości początkowej istnieją wobec tego następujące zależności

$$s_2 = \frac{p_2 t_2^2}{2} = \frac{e_2 r_b t_2^2}{2} = \frac{e_1 r_b t_2^2}{2} \frac{z_1}{z_2},$$

gdzie: p_2 - przyspieszenie ciała o masie m_2 ,

e_2 - przyspieszenie kątowe wałka II,

a stąd:

$$e_1 = \frac{2 s_2 z_2}{r_b t_2^2 z_1}. \quad (3.14)$$

Wykorzystując wzory (3.13) i (3.14) w zależności (3.12) otrzymuje się

$$J_{red} = \left[\frac{(m_1 + m_{t1} + m_{kr}) g r_3 r_b \left(\frac{z_1}{z_2} \right)}{4 s_2} - \frac{(m_2 + m_{t2}) g r_b^2 \left(\frac{z_1}{z_2} \right)^2}{2 s_2} - M_t \frac{r_b}{2 s_2} \left(\frac{z_1}{z_2} \right) \right] t_2^2. \quad (3.15)$$

Zredukowany do osi wałka I moment bezwładności J_{red} poruszających się ciał można zatem wyznaczyć doświadczalnie mierząc czas t_2 dla różnych wartości masy m_1 i ustalonej wartości masy m_2 (przyjmując za znane wszystkie pozostałe wielkości występujące we wzorze 3.15).

3.4.4. Wyznaczenie momentów bezwładności tarcz kołowych

Wzór (3.11) określa zredukowany moment bezwładności ruchomych elementów wciągarki bez dodatkowych tarcz A i B. Jeżeli na wałku I wciągarki (na który dokonujemy redukcji) zamocuje się tarczę **A** lub **B** to moment zredukowany bezwładności takiego układu będzie wynosił:

$$\begin{aligned} J_{redA} &= J_{red} + J_A, \\ J_{redB} &= J_{red} + J_B, \end{aligned} \quad (3.16)$$

gdzie:

J_A - moment bezwładności tarczy A względem osi centralnej prostopadłej do płaszczyzny tarczy,

J_B - moment bezwładności tarczy B względem osi centralnej prostopadłej do płaszczyzny tarczy.

Zatem momenty bezwładności tarcz można wyznaczyć z zależności:

$$\begin{aligned} J_A &= J_{redA} - J_{red}, \\ J_B &= J_{redB} - J_{red}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Wielkości J_{redA} , J_{redB} podobnie jak i J_{red} określa się doświadczalnie bazując na zależności (3.15).

3.5. Przebieg pomiarów

3.5.1. Wyznaczenie momentu oporów mechanizmu wciągarki

W celu wyznaczenia momentu M_t oporów mechanizmu należy wykonać następujące czynności:

1. Założyć na talerzyku (9) krążka ruchomego ciężarki wskazane przez osobę nadzorującą.
2. Zwolnić hamulec naciskając na dźwignię hamulca (5); układ powinien pozostawać w spoczynku mimo zwolnienia hamulca.

3. Odejmując stopniowo ciężarki z talerzyka doprowadzić do wystąpienia jego ruchu do góry.
4. Puścić dźwignię hamulca, aby zatrzymać układ; zanotować w tabeli 3.1 wartość masy $(m_0)_{min}$ ciężarków znajdujących się na talerzyku krążka ruchomego w chwili wystąpienia ruchu.
5. Ponownie założyć na talerzyku krążka ruchomego ciężarki wskazane przez osobę nadzorującą.
6. Zwolnić hamulec ręczną dźwignią; cały układ powinien pozostawać w spoczynku.
7. Dodając stopniowo ciężarki doprowadzić do wystąpienia ruchu układu w stronę przeciwną aniżeli poprzednio tj. obciążony talerzyk winien poruszać się w dół.
8. Puścić dźwignię hamulca, aby zatrzymać układ; zanotować w tablicy 3.1 wartość masy $(m_0)_{max}$ ciężarków umieszczonych na talerzyku krążka ruchomego w chwili wystąpienia ruchu.
9. Pomiary $(m_0)_{max}$ i $(m_0)_{min}$ powtórzyć trzykrotnie.
10. Obliczyć średnie wartości obydwu mas, uruchomić program CW3.EXE, a następnie wprowadzić dane do programu (można też skorzystać ze wzoru z tabeli 3.1) i zanotować obliczoną wartość momentu oporów.

3.5.2. Wyznaczanie zredukowanego momentu bezwładności ruchomych elementów wciągarki

1. Pod nadzorem osoby prowadzącej ćwiczenie włączyć zasilacz czujników i miernik czasu.
2. Wkręcić śruby do mocowania tarczy w koło hamulca.
3. Założyć na talerzyku (9) krążka ruchomego zestaw obciążników zapewniający uzyskanie pierwszej - ze wskazanych w dokumentacji stoiska - wartości masy m_1 .
4. Ustawić talerzyk (11) (z nałożonym ciężarkiem o masie $m_2 = 1,45$ kg - ten w *czarnym kolorze*) trochę poniżej linii optycznej górnej fotokomórki.
5. Włączyć zasilacz luzownika (*czarna obudowa*).
6. Pokręcając kołem wciągarki (przy zwolnionym hamulcu) ustawić talerzyk (11) (z nałożonym ciężarkiem o masie $m_2 = 1,45$ kg - ten w *czarnym kolorze*) tuż pod linią optyczną dolnej fotokomórki (na wskaźniku zapala się wówczas zielona dioda).
7. Kiedy na wyświetlaczu miernika czasu ukaże się komunikat *Rozpocznij pomiar* nacisnąć przycisk ENTER - na wyświetlaczu pojawi się komunikat: *CZEKAM NA START*.
8. Po upewnieniu się, że talerzyki są nieruchome nacisnąć i *natychmiast zwolnić* przycisk luzownika elektromagnetycznego (*pomarańczowy w białej obudowie*).
9. Zapisać wskazanie miernika czasu w tabeli 3.2.
10. Powtórzyć kroki 6, 7, 8 i 9 trzykrotnie.
11. Opisać wyżej czynności wykonać dla dwóch następnych (zadanych) wartości mas m_1 .

3.5.3. Wyznaczanie momentów bezwładności tarcz A i B

1. Zamocować dwoma śrubami na kole hamulca (4) tarczę A i wykonać czynności opisane w punkcie 3.5.2.
 2. Odkręcić tarczę A, zamocować tarczę B i wykonać czynności opisane w punkcie 3.5.2.
- Po zakończeniu wszystkich pomiarów należy odkręcić tarczę, zdjąć obciążniki z talerzyka krążka ruchomego, wyłączyć miernik czasu i zasilacze oraz *uporządkować stoisko*.

3.6. Opracowanie wyników pomiarów i sprawozdanie

3.6.1. Obliczenia pomocnicze

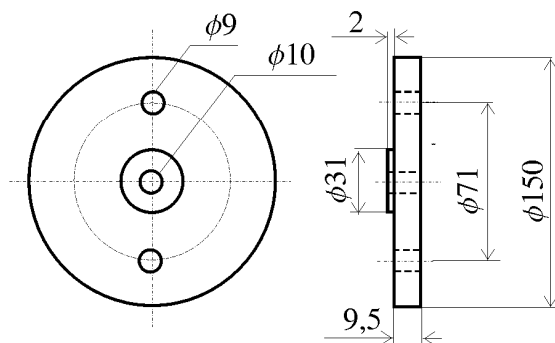
Obliczyć wartości średnie czasu t_2 i celem wyznaczenia momentu zredukowanego wprowadzić dane do programu komputerowego, albo użyć poniższego wzoru (dla $m_2 = 1,45$ kg, wynik w $kg\ m^2$):

$$J_{red} = (0,002053 m_1 [kg] - 0,0017042 - 0,013954 M_t [Nm]) t_2^2 [s].$$

Wpisać wyliczone wartości do tabeli 3.2. i wykorzystując otrzymane wyniki wyznaczyć momenty bezwładności tarcz **A** i **B**. Obliczyć następnie teoretyczne wartości (w sposób przybliżony i dokładny) momentów bezwładności tych tarcz. Wymiary i parametry obydwu tarcz są następujące.

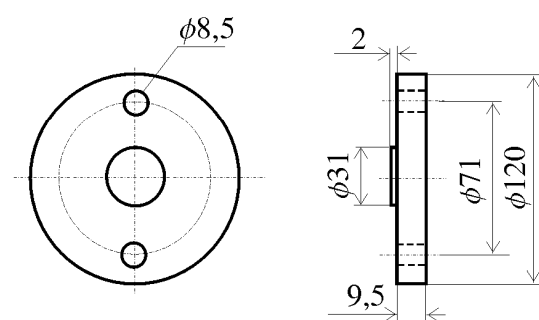
Tarcza A

gęstość materiału: $\rho = 7028 \text{ kg/m}^3$
masa tarczy: $m = 1,175 \text{ kg}$



Tarcza B

gęstość materiału: $\rho = 7877 \text{ kg/m}^3$
masa tarczy: $m = 0,849 \text{ kg}$



Na koniec wyznaczyć także różnice względne wartości eksperymentalnych i teoretycznych momentów bezwładności tarcz.

3.6.2. Sprawozdanie

W sprawozdaniu z ćwiczenia należy zamieścić:

- temat i cel ćwiczenia,
- zestawienie wyników pomiarów i obliczeń w tabelach 3.1 i 3.2,
- obliczenia różnic względnych wartości eksperymentalnych i teoretycznych momentów bezwładności tarcz,
- obserwacje i wnioski z przeprowadzonego ćwiczenia.

3.7. Pytania sprawdzające

- Podaj definicje masowych momentów bezwładności ciała względem: osi, płaszczyzny i punktu.
- Sformułuj twierdzenie Steinera dotyczące masowych momentów bezwładności.
- Co to jest zredukowany moment bezwładności?
- Naszkicuj schemat kinematyczny modelu wciągarki i określ rodzaje występujących ruchów; dla elementu poruszającego się ruchem płaskim wskaż położenie chwilowego środka obrotu.

Tabela 3.1. Moment oporów mechanizmu wciągarki

L. p.	Masa minimalna (m_0) _{min}	Masa maksymalna (m_0) _{max}	Moment oporów mechanizmu M_t
	kg	kg	N m
1			$M_t = 0,07358[(m_0)_{\max} - (m_0)_{\min}]$
2			
3			
Wartości średnie			

Tabela 3.2. Masowe momenty bezwładności

Masa	Czas			Zredukowany moment bezwładności		Momenty bezwładności tarcz A i B						
m_1	t_2			$J_{red} \cdot 10^3$			$J_A \cdot 10^3$			$J_B \cdot 10^3$		
kg	s			kg m ²			kg m ²			kg m ²		
	bez tarcz	z tarczą A	z tarczą B	bez tarczy	z tarczą A	z tarczą B	eksperyment (wzór 3.17)		teoria	eksperyment (wzór 3.17)		teoria
							kolejne pomiary	wartość średnia		kolejne pomiary	wartość średnia	
									przybliżona			przybliżone
średni czas												
									dokładna			dokładna
średni czas												
średni czas												

Dane liczbowe

Masy talerzyków i krążka ruchomego: $m_{t1} = 0,34 \text{ kg}$, $m_{t2} = 0,54 \text{ kg}$, $m_{kr} = 0,385 \text{ kg}$.

Promienie bębna, koła hamulca i krążka: $r_b = 36 \text{ mm}$, $r_3 = 30 \text{ mm}$, $r_{kr} = 40 \text{ mm}$.

Momenty bezwładności bębna, wałków, kół zębatach i hamulca oraz krążków: $J_1 = 0,613 \cdot 10^{-4} \text{ kg m}^2$,

$J_2 = 1,661 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$, $J_3 = 1,378 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$, $J_4 = 0,317 \cdot 10^{-4} \text{ kg m}^2$,

$J_5 = 2,988 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$, $J_6 = 2,268 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$, $J_7 = 0,293 \cdot 10^{-4} \text{ kg m}^2$,

$J_8 = 4,019 \cdot 10^{-4} \text{ kg m}^2$.

Liczby zębów kół: $z_1 = 28$, $z_2 = 86$ oraz droga talerzyka: $s_2 = 0,42 \text{ m}$.