



Ćwiczenie 5

WYZNACZANIE OKRESU MAŁYCH I DUŻYCH WAHAŃ WAHADŁA FIZYCZNEGO

5.1. Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest pomiar okresu wahań wahadła fizycznego i porównanie wyników uzyskanych z doświadczenia z rezultatami obliczeń teoretycznych. Obliczenia przeprowadzane są kilkoma sposobami – na podstawie rozwiązania równania opisującego dowolnie duże ruchy wahadła (za pomocą całek eliptycznych), poprzez numeryczne całkowanie równań ruchu, jak również przy wykorzystaniu przybliżonego równania ruchu opisującego małe wahania.

5.2. Wprowadzenie

Wahadłem fizycznym nazywa się ciało sztywne obracające się wokół nieruchomej poziomej osi w jednorodnym polu sił ciężkości¹. Oś obrotu nie może przechodzić przez środek ciężkości wahadła. Analiza ruchu wahadła fizycznego jest klasycznym zadaniem z mechaniki. Wahadło może być przykładem z zakresu dynamiki ciała poruszającego się ruchem obrotowym. Dobrze ilustruje ono zastosowanie twierdzenia o ruchu środka masy do wyznaczania reakcji łożysk dla ciał poruszających się ruchem obrotowym. Wykorzystywane jest także jako przykład ruchu harmonicznego, drgań harmonicznym.

Mając na uwadze dynamiczne równania ruchu ciała można – na przykładzie wahadła – w krótkim czasie pokazać jak wyprowadza się równania ruchu układu przy wykorzystaniu równań Lagrange’a, a także, na czym polega linearyzacja² modelu matematycznego.

Uwzględnienie oporów ruchu (tarcie w łożyskach, opór powietrza) komplikuje równania ruchu, ale pozwala zilustrować szereg innych zjawisk (wygasanie wahań, ruch quasi-okresowy).

Pomiar okresu wahań ciała wokół określonej osi pozwala na doświadczalne wyznaczenie momentu bezwładności ciała względem tej osi (jest to prosta i dokładna metoda wyznaczania momentu bezwładności ciał o skomplikowanych kształtach).

W analizie dynamiki maszyn wahadło fizyczne jest używane do modelowania ruchu zawieszonego ładunku (np. w obliczeniach suwnic).

5.3. Podstawowe zależności teoretyczne

Rozpatrywany jest model wahadła (rys. 5.1) obracającego się wokół osi y . Jego położenie jest opisane za pomocą kąta φ .

Do oznaczenia parametrów ciała użyte zostały następujące symbole:

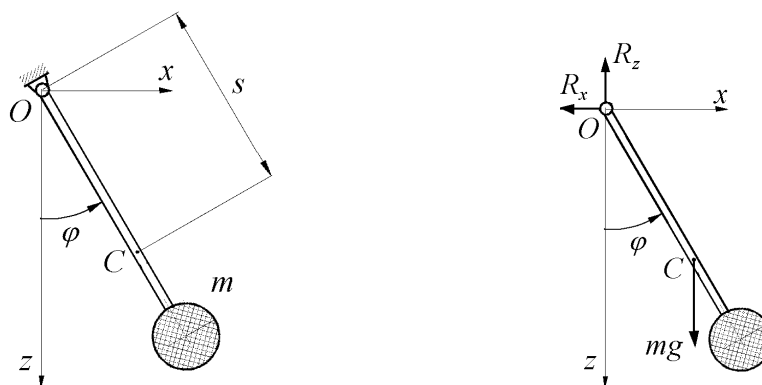
J_y – masowy moment bezwładności względem osi wahań (y),

m – całkowita masa wahadła,

s – odległość środka ciężkości (punktu C) wahadła od osi wahań.

¹ Bryła sztywna, na którą nałożone są więzy geometryczne pozwalające na obrót ciała wokół jednego punktu nosi nazwę *wahadła sferycznego*. Interesujące są też różne inne rodzaje układów nazywanych wahadłami – jak na przykład *wahadło Foucaulta* (w równaniach ruchu wahadła jest uwzględnione przyspieszenie Coriolisa wynikające z ruchu obrotowego Ziemi), *wahadło eliptyczne* (to jest takie, którego punkt zawieszenia porusza się ruchem harmonicznym), czy też *wahadła sympatyczne* (dwa jednakowe wahadła matematyczne połączone sprężyną).

² Chodzi tu o zastąpienie nieliniowych równań ruchu równaniami liniowymi.



Rys. 5.1. Wahadło fizyczne

5.3.1. Równania ruchu wahadła fizycznego

Równanie ruchu wahadła fizycznego (rys. 5.1) ma postać

$$J_y \ddot{\varphi} = -mgs \sin \varphi \quad (5.1)$$

Równanie (5.1) można przedstawić jako

$$\ddot{\varphi} + \frac{mgs}{J_y} \sin \varphi = 0 \quad (5.2)$$

Równanie o postaci (5.4) lub (5.5) jest nieliniowym równaniem różniczkowym. Analityczne rozwiązanie takiego równania można wyznaczyć używając całek eliptycznych. Taki sposób rozwiązania jest omawiany w punkcie 5.3.3. Równanie to może być też rozwiązywane – dla zadanych parametrów wahadła – na drodze numerycznej.

Przyjmując, że dla małych kątów φ funkcję $\sin \varphi$ można zastąpić kątem φ wyrażonym w mierze łukowej ($\sin \varphi \cong \varphi$), równanie ruchu wahadła (5.5) można przedstawić w formie

$$\ddot{\varphi} + \frac{mgs}{J_y} \varphi = 0 \quad (5.3)$$

Jest to liniowe równanie różniczkowe, które opisuje ruch wahadła przy małych wychyleniach (to znaczy nieprzekraczających kilku stopni) od położenia równowagi. Rozwiązaniem ogólnym tego równania jest funkcja harmoniczna o postaci

$$\varphi = a \sin(\omega_0 t + \alpha_0) \quad (5.4)$$

5.3.2. Okres małych wahań wahadła fizycznego

Funkcja (5.7) jest funkcją okresową, o okresie (T) równym $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$, przy czym

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgs}{J_y}} \quad (5.5)$$

Okres wahań wahadła fizycznego dla małych kątów wychylenia jest określony zależnością

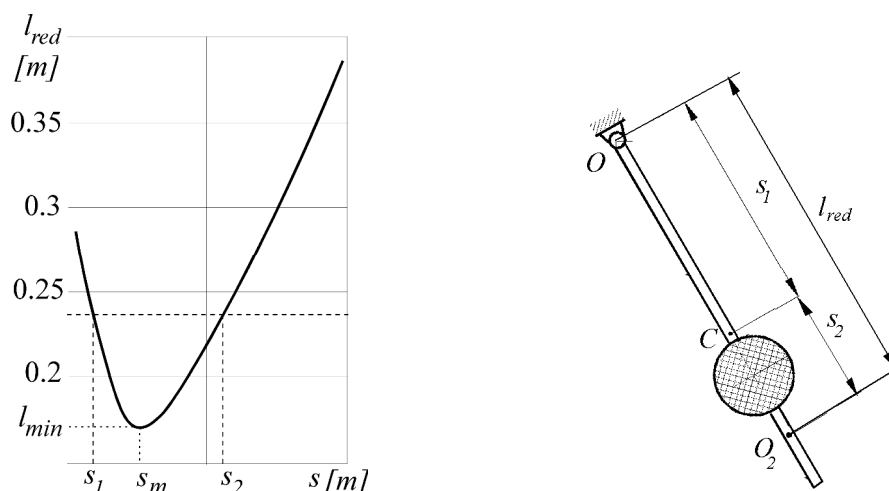
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J_y}{mgs}} = 2\pi \sqrt{\frac{l_{red}}{g}} \quad (5.6)$$

gdzie: l_{red} - jest nazywane **długością zredukowaną wahadła** $\left(l_{red} = \frac{J_y}{ms} \right)$.

Długość zredukowana wahadła fizycznego może być przedstawiona w postaci

$$l_{red} = \frac{J_y}{ms} = \frac{J_{yC} + ms^2}{ms} = \frac{J_{yC}}{ms} + s, \quad (5.7)$$

gdzie J_{yC} oznacza moment bezwładności ciała względem osi centralnej (przechodzącej przez środek ciężkości C). Przykładowy przebieg funkcji $l_{red}(s)$ jest przedstawiony na rysunku 5.2 (dla danych wartości J_{yC} i m). Funkcja ta ma minimum lokalne, a więc dla każdego wahadła fizycznego można wyznaczyć takie wzajemne położenie osi obrotu i środka ciężkości, dla którego okres drgań T osiąga minimum.



Rys. 5.2. Przebieg zmian długości zredukowanej wahadła (l_{red}) w funkcji odległości środka ciężkości wahadła od osi obrotu (s)

Z analizy przebiegu funkcji $l_{red}=f(s)$ wynikają następujące wnioski:

- **Minimalny okres wahań** wahadła fizycznego jest określony zależnością

$$T_{min} = 2\pi \sqrt{\frac{2\sqrt{\frac{J_{yC}}{m}}}{g}}.$$

- Minimalnemu okresowi wahań odpowiada **minimalna długość zredukowana** wahadła

$$(l_{red})_{min} = 2\sqrt{\frac{J_{yC}}{m}}.$$

- Minimalny okres wahań wahadła ma miejsce wtedy, gdy **odległość środka ciężkości** ciała od osi obrotu wynosi

$$s_m = \frac{1}{2}(l_{red})_{min} = \sqrt{\frac{J_{yC}}{m}}.$$

Jeśli odległość s jest różna od s_m ($s \neq s_m$), to każdej długości zredukowanej ($l_{red} > (l_{red})_{min}$) odpowiadają dwie wartości odległości s ($s = s_1$ i $s = s_2$, przy czym $s_1 + s_2 = l_{red}$), dla których okres wahań jest jednakowy.

Zatem ciało zawieszone na osi przechodzącej przez punkt O_2 ma ten sam okres wahań jak w przypadku osi przechodzącej przez punkt O i nosi nazwę **wahadła odwróconego** albo **rewersyjnego**.

5.3.3. Okres dużych wahań wahadła fizycznego – rozwiązanie analityczne

Równanie ruchu wahadła przy dowolnie dużych wychyleniach ma postać podaną równaniem (5.4), to znaczy

$$J_y \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -m g s \sin \varphi . \quad (5.8)$$

Wprowadzając długość zredukowaną wahadła fizycznego $l_{red} = \frac{J_y}{m s}$ równanie ruchu można przedstawić w formie

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -\frac{g}{l_{red}} \sin \varphi . \quad (5.9)$$

Wykorzystując poniższą zależność³

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\omega}{d\varphi} \omega = \frac{1}{2} \frac{d}{d\varphi} (\omega^2) \quad (5.10)$$

równanie (5.12) można przedstawić jako

$$\frac{d}{d\varphi} (\omega^2) = -\frac{2g}{l_{red}} \sin \varphi . \quad (5.11)$$

Rozdzielając zmienne

$$d(\omega^2) = -\frac{2g}{l_{red}} \sin \varphi d\varphi \quad (5.12)$$

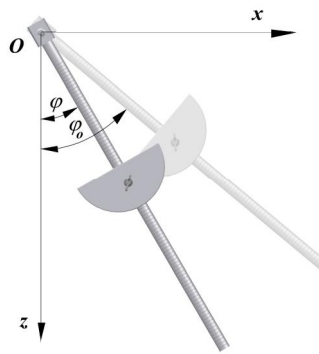
i całkując obie strony równania otrzymuje się

$$\omega^2 = \frac{2g}{l_{red}} \cos \varphi + 2h , \quad (5.13)$$

gdzie stała całkowania została oznaczona jako $2h$ ($2h = \text{const}$).

Zakładając warunki początkowe (dla $t = 0$) o postaci: $(\omega)_{t=0} = 0$, $(\varphi)_{t=0} = \varphi_0$ (rys. 5.3.) i wyznaczając dla tych warunków stałą całkowania otrzymuje się

$$2h = -\frac{2g}{l_{red}} \cos \varphi_0 . \quad (5.14)$$



Rys. 5.3. Położenie początkowe (φ_0) i dowolne położenie (φ) wahadła

Równanie określające kwadrat prędkości kątowej wahadła ma zatem postać

$$\omega^2 = \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = \frac{2g}{l_{red}} (\cos \varphi - \cos \varphi_0) . \quad (5.15)$$

³ Mniejszą czcionką jest przedstawione rozwiązanie nieliniowego równania ruchu (5.12). Zapoznanie się z tym rozwiązaniem pozwala zorientować się, jakie trudności stwarza analiza ruchu wahadła przy dużych wychyleniach.

Dla wyznaczenia okresu dużych wahań wahadła konieczne jest rozwiązanie równania

$$\frac{d\varphi}{dt} = \pm \sqrt{\frac{g}{l_{red}}} \sqrt{2(\cos \varphi - \cos \varphi_0)} . \quad (5.16)$$

Równanie to jest również rozwiązywane metodą rozdzielania zmiennych – stąd

$$dt = \pm \sqrt{\frac{l_{red}}{g}} \frac{d\varphi}{\sqrt{2(\cos \varphi - \cos \varphi_0)}} . \quad (5.17)$$

Całkując lewą stronę w granicach $(0, t)$, a prawą w granicach (φ_0, φ) otrzymuje się

$$t = \pm \sqrt{\frac{l_{red}}{g}} \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{2(\cos \varphi - \cos \varphi_0)}} . \quad (5.18)$$

Ponieważ dla wahadła kąt φ zmienia się w granicach $(-\varphi_0, +\varphi_0)$, to wyrażenie $(\cos \varphi - \cos \varphi_0)$ przyjmuje dodatnie wartości $((\cos \varphi - \cos \varphi_0) > 0)$, a kąt w pierwszej fazie ruchu będzie malał (rys.5.3). Należy zatem przyjąć znak minus przed pierwiastkiem

$$t = - \sqrt{\frac{l_{red}}{g}} \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{2(\cos \varphi - \cos \varphi_0)}} . \quad (5.19)$$

We wzorze (5.22) można wykorzystać następujące tożsamości:

$$\cos \varphi = 1 - 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}, \quad \cos \varphi_0 = 1 - 2 \sin^2 \frac{\varphi_0}{2} \quad (5.20)$$

i wprowadzić nową zmienną ψ

$$\sin \psi = \frac{\sin \frac{\varphi}{2}}{\sin \frac{\varphi_0}{2}} . \quad (5.21)$$

Wyznaczając różniczkę zupełną wyrażenia (5.24) otrzymuje się

$$\cos \psi d\psi = \frac{\frac{1}{2} \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi}{\sin \frac{\varphi_0}{2}} , \quad (5.22)$$

stąd

$$d\varphi = \frac{2 \sin \frac{\varphi_0}{2}}{\cos \frac{\varphi}{2}} \cos \psi d\psi . \quad (5.23)$$

Stosując zamianę zmiennych należy ustalić (na podstawie zależności (5.24)) nowe granice całkowania:

- dolną (po wstawieniu $\varphi = \varphi_0$)

$$(\sin \psi)_{\varphi=\varphi_0} = \frac{\sin \frac{\varphi_0}{2}}{\sin \frac{\varphi_0}{2}} = 1 , \quad (5.24)$$

skąd

$$(\psi)_{\varphi=\varphi_0} = \frac{\pi}{2} , \quad (5.25)$$

- górną (po podstawieniu $\varphi = 0$)

$$(\sin \psi)_{\varphi=0} = \frac{0}{\sin \frac{\varphi_0}{2}} = 0 , \quad (5.26)$$

a więc

$$(\psi)_{\varphi=0} = 0 . \quad (5.27)$$

Uwzględniając powyższe w zależności (5.22), po przekształceniach otrzymuje się

$$t = - \sqrt{\frac{l_{red}}{g}} \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\varphi_0}{2} \sin^2 \psi}} \quad (5.28)$$

lub – zmieniając znak poprzez zmianę granic całkowania

$$t = \sqrt{\frac{l_{red}}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\varphi_0}{2} \sin^2 \psi}} . \quad (5.29)$$

Wprowadzając oznaczenie

$$k = \sin \frac{\varphi_0}{2} , \quad (5.30)$$

otrzymuje się

$$t = \sqrt{\frac{l_{red}}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}} . \quad (5.31)$$

Całka o postaci

$$\int_0^{\psi} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}} \quad (5.32)$$

nosi nazwę całki *eliptycznej pierwszego rodzaju w postaci Legendre'a*. W przypadku, gdy górna granica całkowania wynosi $\frac{\pi}{2}$, to omawiana całka jest nazywana **całką eliptyczną zupełną pierwszego rodzaju**

$$F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}} \equiv K . \quad (5.33)$$

Nie ma ona rozwiązania na drodze elementarnej. Jej wartości liczbowe podawane są w tablicach całek eliptycznych jako funkcje parametru k .

Poszukiwane rozwiązanie równania (5.20), które jest rozwiązaniem równania ruchu wahadła (5.11) ze względu na zmienną t można zatem przedstawić jako

$$t = \sqrt{\frac{l_{red}}{g}} K . \quad (5.34)$$

Wyznaczony w ten sposób czas t dla kąta φ , zmieniającego się w granicach $(\varphi_0, 0)$ odpowiada 1/4 okresu wahań.

Zatem okres dużych wahań wahadła τ ($\tau = 4t$) jest wyrażony zależnością

$$\tau = 4K \sqrt{\frac{l_{red}}{g}} = 4K \sqrt{\frac{J_y}{mgs}} . \quad (5.35)$$

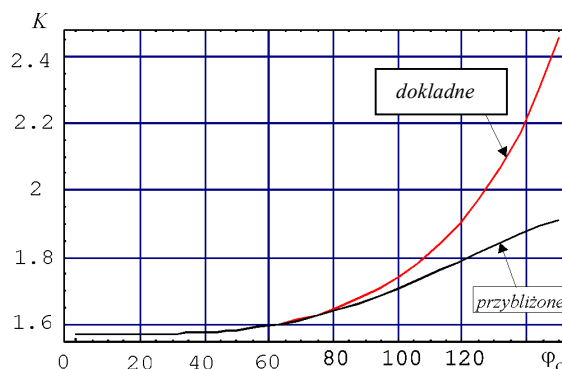
W obliczeniach można posłużyć się rozwinięciem funkcji $K = f(k)$ w szereg względem parametru k

$$K = \frac{\pi}{2} \left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 k^4 + \dots + \left(\frac{(2n-1)!!}{2^n n!}\right)^2 k^{2n} + \dots \right) . \quad (5.36)$$

Ograniczając się do kilku pierwszych wyrazów rozwinięcia ($n = 3$) i wykorzystując (5.33) otrzymuje się

$$K \cong \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\varphi_0}{2} + \frac{9}{64} \sin^4 \frac{\varphi_0}{2} + \frac{25}{256} \sin^6 \frac{\varphi_0}{2} \right) . \quad (5.37)$$

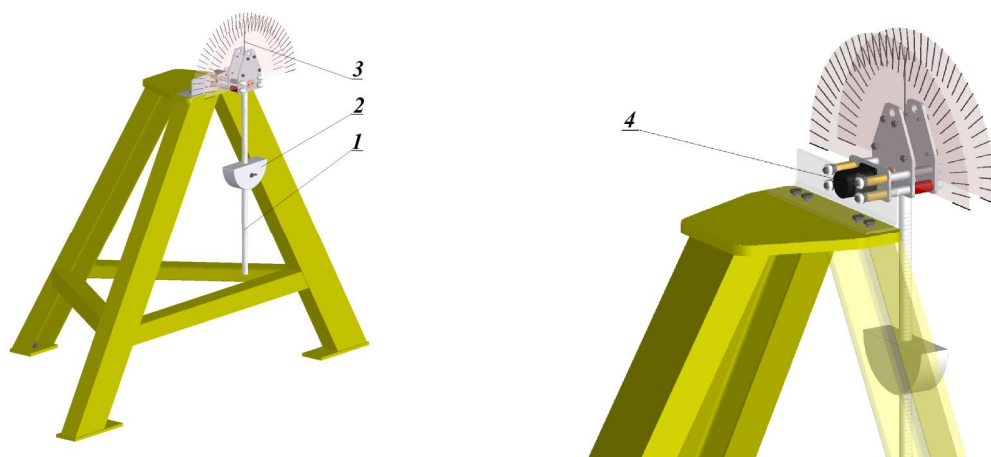
Na rysunku 5.4 porównane zostały wartości K otrzymane z zależności przybliżonej (5.40) i ścisłej.

Rys. 5.4. Dokładna i przybliżona wartość całki eliptycznej (K)

Widać, że dla kąta wychylenia mniejszego od 80° różnice obu wartości są niezauważalne.

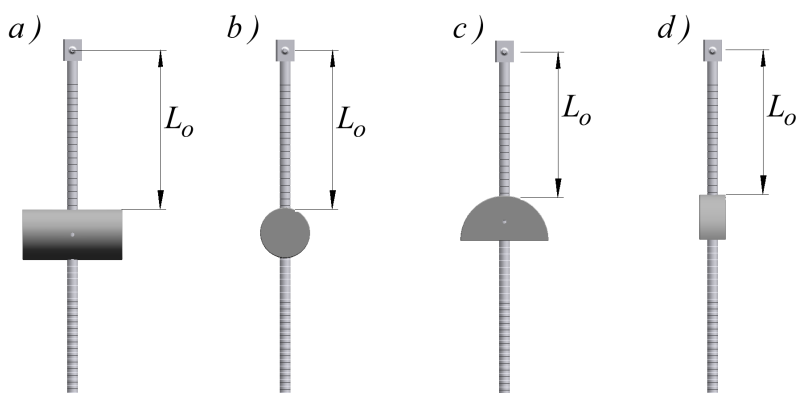
5.4. Opis stanowiska pomiarowego

Widok stanowiska, na którym są przeprowadzane pomiary okresu wahań wahadła przedstawia rys. 5.5.



Rys. 5.5. Widok stanowiska pomiarowego

Zasadniczą częścią stanowiska jest pręt (1) ułożyskowany na poziomej osi. Na pręcie można mocować dodatkowe ciała - półwalec (2) lub walec (rys. 5.6). Wskazówka (3) służy do odczytu kąta wychylenia wahadła od pionu. Do osi wahadła zamocowany jest czujnik optyczny (4) współpracujący z miernikiem uniwersalnym, który umożliwia pomiar okresu wahań.



Rys. 5.6. Wahadła o różnych momentach bezwładności zależnych od położenia dodatkowych ciał; badane warianty wahadła

5.4.1. Momenty bezwładności wahadła

Okres wahań wahadła fizycznego zależy od sposobu rozmieszczenia masy wahadła i położenia osi wahań względem środka masy. Pomiary okresu wahań są przeprowadzane dla kilku wariantów wahadła – różniących się masą i momentem bezwładności (rys. 5.6). Zmianę momentu bezwładności wahadła przy zachowaniu niezmiennego położenia środka ciężkości względem osi wahań osiąga się przez obrót o 90° bryły mocowanej na pręcie wahadła.

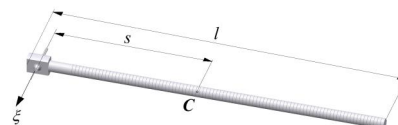
Wymiary i masy elementów wahadła

Pręt - wymiary są zaznaczone na rys. 5.7.

$$l = 0,540 \text{ m}$$

$$s = 0,25 \text{ m}$$

$$m = 0,922 \text{ kg}$$



Rys. 5.7. Pręt

W obliczeniach jest pomijana masa wskazówki i zmiana kształtu pręta przy oprawie łożysk.

Walec – pokazany na rys. 5.8.

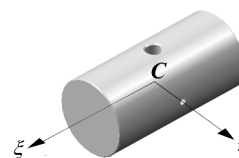
$$H = 0,15 \text{ m}$$

$$R = 0,0375 \text{ m}$$

$$r = 0,008 \text{ m}$$

$$h = 2 R = 0,075 \text{ m}$$

$$m = 5,08 \text{ kg}$$



Rys. 5.8. Walec

Półwalec – pokazany na rys. 5.9.

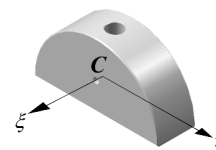
$$H = 0,04 \text{ m}$$

$$R = 0,066 \text{ m}$$

$$r = 0,008 \text{ m}$$

$$h = R = 0,066 \text{ m}$$

$$m = 2,04 \text{ kg}$$



Rys. 5.9. Półwalec

Obliczenie momentów bezwładności

Dla każdego z badanych wariantów wahadła (pokazanych na rys. 5.6) należy wyznaczyć jego moment bezwładności względem osi wahań y .

Obliczenie momentu bezwładności względem osi wahań y dla wahadła z zamocowaną bryłą (walcem lub półwalcem) przeprowadza się dla aktualnego położenia bryły (odległość L_0 na rys. 5.6). Przy wyznaczaniu momentów bezwładności należy wykorzystać twierdzenia Steinera. Momenty bezwładności pręta, walca i półwalca zostały podane w tablicy 5.1. (W obliczeniach tych wielkości uwzględnione zostało wycięcie walcowe – wywiercony otwór).

Tablica 5.1. Zestawienie wartości momentów bezwładności elementów wahadła

Nazwa elementu	Masa	Masowy moment bezwładności		Uwagi
	m	J_ξ	J_η	
	kg	kg m ²	kg m ²	
pręt	0,922	$80 \cdot 10^{-3}$		oś ξ nie jest osią centralną dla pręta - rys.5.7
walec	5,08	$3,60 \cdot 10^{-3}$	$11,52 \cdot 10^{-3}$	osie ξ, η są osiami centralnymi - rys.5.8
półwalec	2,04	$2,92 \cdot 10^{-3}$	$0,87 \cdot 10^{-3}$	osie ξ, η są osiami centralnymi - rys.5.9

5.5. Sposób przeprowadzenia ćwiczenia

Zasadniczą część ćwiczenia stanowią pomiary i obliczenia okresu wahań (do ich realizacji jest wykorzystywany program komputerowy *wahadlo.exe*). W programie wykonywane są między innymi obliczenia okresu wahań przy dużych wychyleniach wahadła – na podstawie rozwiązania analitycznego przedstawionego w punkcie 5.3.3.

Dynamiczne równanie ruchu modelu wahadła z uwzględnieniem oporów ruchu (w łożyskach, oddziaływanie powietrza), ma postać

$$J_y \ddot{\phi} = M_y \operatorname{sign}(-\dot{\phi}) - m g s \sin \varphi. \quad (5.38)$$

Siły oporu zostały zredukowane do pary sił o momencie M_y . Użyte w obliczeniach wartości momentu M_y odzwierciedlają rzeczywiste opory ruchu wahadła. Równanie to jest rozwiązywane metodą *numerycznego całkowania*.

Dodatkowo w czasie wykonywania ćwiczenia jest używany program komputerowy *wahfiz_p.exe*. Jest to program umożliwiający numeryczne rozwiązanie równań ruchu wahadła fizycznego – jednak nie jest on dostosowany do istniejącego stanowiska pomiarowego.

5.5.1. Wyznaczanie okresu wahań dużych wychyleń wahadła

Przed przystąpieniem do pomiarów należy – z udziałem prowadzącego ćwiczenie – wybrać spośród przedstawionych w tablicy 5.2 warianty, dla których będą przeprowadzone pomiary i obliczenia.

Poniżej omówione są kolejne czynności, które należy wykonać podczas realizacji ćwiczenia.

1. Włączyć zasilacz optycznego czujnika okresu wahań, miernik czasu i komputer.
2. Przeprowadzić pomiary okresu wahań.
 - a) Wychylić pręt (bez dodatkowych ciężarów) o kąt 5° i puścić swobodnie (bez prędkości początkowej).
 - b) Odczytać wskazanie miernika okresu i zapisać go w kolumnie **10** tablicy 5.2. Pomiary powtórzyć dla początkowych wychyleń o wartościach 10° , 30° i 45° .
 - c) Zgodnie z ustalonym planem pomiarów umocować na pręcie wahadła walec lub półwalec. Zanotować w kolumnie **6** odległość L_0 (określić ją na podstawie nacięć na pręcie, wykonanych co **5 mm** - pierwsze nacięcie znajduje się w odległości **50 mm** od osi wahań).
- Uwaga: Skontrolować poprawność zamocowania brył na pręcie. Ich główne osie bezwładności muszą być równoległe (prostopadłe) do osi wahań.*
- d) Wykonać pomiary dla początkowych wychyleń podanych w kolumnie **9** tablicy 5.2, a wyniki zanotować w kolumnie **10** tej tablicy.
3. Uruchomić program komputerowy *wahadlo.exe*. Wprowadzić wymagane dane liczbowe i wykonać obliczenia. Wyświetlone na ekranie rezultaty obliczeń (masa wahadła m , odległość środka masy s , moment bezwładności wahadła J_y , długość zredukowana l_{red} , okres wahań T) zanotować odpowiednio w kolumnach **3, 5, 7, 8, 11** tablicy 5.2.
4. Uruchomić program komputerowy *cwic5.exe* i wprowadzić wymagane dane liczbowe dla jednego z analizowanych wariantów (najlepiej dla kąta 30° albo 45°). Wybrać w menu opcje „**Obliczenia**” i po wykonaniu przez komputer obliczeń należy przejrzeć otrzymane rezultaty (przebiegi czasowe: *wychylenia*, *prędkości*, *energii* itd).

Uwaga: Przebiegi te są wyznaczone poprzez numeryczne całkowanie równań ruchu.

5.5.2. Numeryczna analiza i symulacja ruchu wahadła (program „wahfiz_p.exe”)

Uruchomić program komputerowy *wahfiz_p.exe*⁴. W uzgodnieniu z prowadzącym ćwiczenie przeprowadzić eksperymenty numeryczne (to znaczy wykonać obliczenia i porównać wyniki) dla różnych zestawów danych:

1. Wykonać obliczenia dla różnych wartości współczynnika tłumienia.
2. Przeprowadzić eksperymenty przy różnych prędkościach początkowych wahadła.
3. Zbadać wpływ położenia osi obrotu wahadła na okres wahań.

⁴ Program "WAHFIZ_P" został opracowany w Zakładzie Fizyki Ogólnej Instytutu Fizyki Doświadczalnej Uniwersytetu Gdańskiego. Prace nad programem prowadzono w ramach Resortowego Programu Badawczo Rozwojowego PRI.14.5.1 realizowanego w roku 1990 na Wydziale Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego po kierunku R. Kutnera.

Po zakończeniu ćwiczenia należy zdjąć z pręta zamocowaną bryłę, wyłączyć zasilacz czujnika, miernik i komputer oraz *uporządkować* stoisko pomiarowe.

Tablica 5.2. Zestawienie wyników pomiarów i obliczeń

Wariant i schemat wahadła		Masa		Moment bezwładności		Polożenie bryły	Długość zredukowana	Odległość środka ciężkości	Początkowe wy- chylenie	Okres wahań		
		bryły	wahadła	bryły	wahadła					ekspert- ment	teoria	
											nie- linio- wa	linio- wa
m_w m_{pw} [kg]	m [kg]	J_x lub J_y [kg m ²]	J_z [kg m ²]	L_O [m]	l_{red} [m]	s [m]	φ_o [°]	$T_{dośw}$ [s]	T_n [s]	T_l [s]		
1		2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1 rys. 5.7		—	0,922	—	80·10 ⁻³	—	0,347	0,25	5			
									10			
									30			
									45			
2 rys. 5.6-a		5,08				$\leq 0,07$ $\geq 0,05$			5			
									30			
3 rys. 5.6-b		5,08				$\leq 0,07$ $\geq 0,05$			5			
									30			
2a		5,08				$> 0,4$ $\leq 0,445$			5			
3a		5,08				$> 0,4$ $\leq 0,445$			5			
4 rys. 5.6-c		2,04				$\leq 0,07$ $\geq 0,05$			5			
									45			
5 rys. 5.6-d		2,04				$\leq 0,07$ $\geq 0,05$			5			
									45			
4a		2,04				$> 0,4$ $\leq 0,455$			5			
5a		2,04				$> 0,4$ $\leq 0,455$			5			

5.6. Opracowanie wyników pomiarów i sprawozdania

5.6.1. Obliczenia pomocnicze

Po zakończeniu pomiarów należy obliczyć okresy wahań wg teorii liniowej (wzór 5.9) i zanotować je w kolumnie 12 tablicy 5.2.

Następnie - dla wskazanego przez prowadzącego wariantu wahadła - wyznaczyć minimalny okres wahań i odpowiadającą mu odległość osi wahań od środka ciężkości (odpowiednie wzory w punkcie 5.3.2). Porównać otrzymane wyniki z tymi zawartymi w tablicy 5.2, a odnoszącymi się do danego wariantu wahadła; zaznaczyć na schemacie położenie osi wahań i środka ciężkości wahadła.

5.6.2. Sprawozdanie

W sprawozdaniu należy podać:

- a) temat i cel ćwiczenia,
- b) zestawienie wyników pomiarów (tablica 5.2) i obliczeń teoretycznych,
- c) wnioski wynikające z przeprowadzonych pomiarów i obliczeń,
- d) opis wyników eksperymentów numerycznych.

5.7. Pytania sprawdzające

1. Jaka jest różnica pomiędzy wahadłem fizycznym a wahadłem matematycznym ?
2. Co to jest wahadło rewersyjne?
3. Wyprowadzić równanie opisujące ruch wahadła metodą Newtona-Eulera.
4. Dlaczego rozróżnia się przypadki dużych i małych wychyleń wahadła?
5. Czy okres wahań jest zależny od kąta wychylenia wahadła?
6. W jakim przypadku ruch wahadła można traktować jako ruch harmoniczny ?