

WYZNACZANIE WSPÓŁCZYNNIKA RESTYTUCJI I IMPULSU REAKCJI DYNAMICZNYCH W CZASIE UDERZENIA

6.1. Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest doświadczalne wyznaczenie współczynnika restytucji, doświadczalne i teoretyczne wyznaczenie wartości impulsu reakcji łożysk i położenia środka uderzenia ciała nieswobodnego.

6.2. Wprowadzenie

Omawiane tu zagadnienia dotyczą modelowania i analizy zjawiska zderzenia ciała nieswobodnego z nieruchomą przeszkodą. Rozpatrywane jest ciało poruszające się ruchem obrotowym wokół poziomej osi pod wpływem sił ciężkości, które uderza w nieruchomą przeszkodę. W czasie uderzenia na ciało działają chwilowe siły pochodzące od przeszkody, które wywołują dodatkowe reakcje łożysk. Matematyczny opis zjawiska pozwalający na wyznaczenie impulsów reakcji przeszkody i łożysk jest możliwy na podstawie twierdzeń o pochodnej krętu i pochodnej pędu ciała oraz hipotezy Newtona.

Stanowisko badawcze umożliwia obserwację zjawiska oraz rejestrację przebiegu zmian wartości reakcji w czasie uderzenia. Przeprowadzone pomiary pozwalają na wyznaczenie: współczynnika restytucji, impulsu reakcji w łożyskach powstałych na skutek zderzenia oraz położenia środka uderzenia.

6.3. Teoretyczny opis zjawiska

W modelu rozpatrywanego układu (rys. 6.1) ciało obraca się wokół nieruchomej poziomej osi prostopadłej do płaszczyzny symetrii ciała xz . Ciało uderza mimośrodowo w nieruchomą przeszkodę. Założono, że przeszkoda umieszczona jest w taki sposób, że kierunek normalnej w miejscu uderzenia jest poziomy i leży w płaszczyźnie symetrii ciała. Wskutek oddziaływania podpory na ciało siłą $\dot{\mathbf{R}}_p$ w łożyskach powstają dodatkowe reakcje $\dot{\mathbf{R}}$. Reakcje są zerowe w przypadku, gdy prosta normalna uderzenia n przechodzi przez środek uderzenia (punkt D).

6.3.1. Zależności ogólne

Wartości impulsów reakcji w łożyskach ($\dot{\mathbf{S}}$) i w miejscu styku z podporą ($\dot{\mathbf{S}}_p$) można wyznaczyć na podstawie twierdzeń o pochodnej pędu i pochodnej krętu ciała:

$$\begin{aligned} \frac{d\dot{\mathbf{Q}}}{dt} &= \dot{\mathbf{P}}, \\ \frac{d\dot{\mathbf{K}}_O}{dt} &= \dot{\mathbf{M}}_O, \end{aligned} \quad (6.1)$$

gdzie $\dot{\mathbf{P}}$ oznacza sumę wszystkich sił czynnych i sił reakcji działających na ciało, a $\dot{\mathbf{M}}_O$ sumę momentów tych sił względem nieruchomego punktu O .

Pęd ciała jest określony jako $\dot{\mathbf{Q}} = m \dot{\mathbf{v}}_C$, przy czym m oznacza masę ciała, a $\dot{\mathbf{v}}_C$ prędkość środka masy.

Kręt ciała $\dot{\mathbf{K}}_O$ względem nieruchomego punktu O można przedstawić za pomocą składowych o kierunkach nieruchomych osi xyz (rys. 6.1) lub osi ruchomych xhz – sztywno związanych z ciałem. Najczęściej stosowana jest druga metoda – wówczas

$$\dot{\mathbf{K}}_O = \dot{\mathbf{i}}K_x + \dot{\mathbf{j}}K_h + \dot{\mathbf{k}}K_z, \quad (6.2)$$

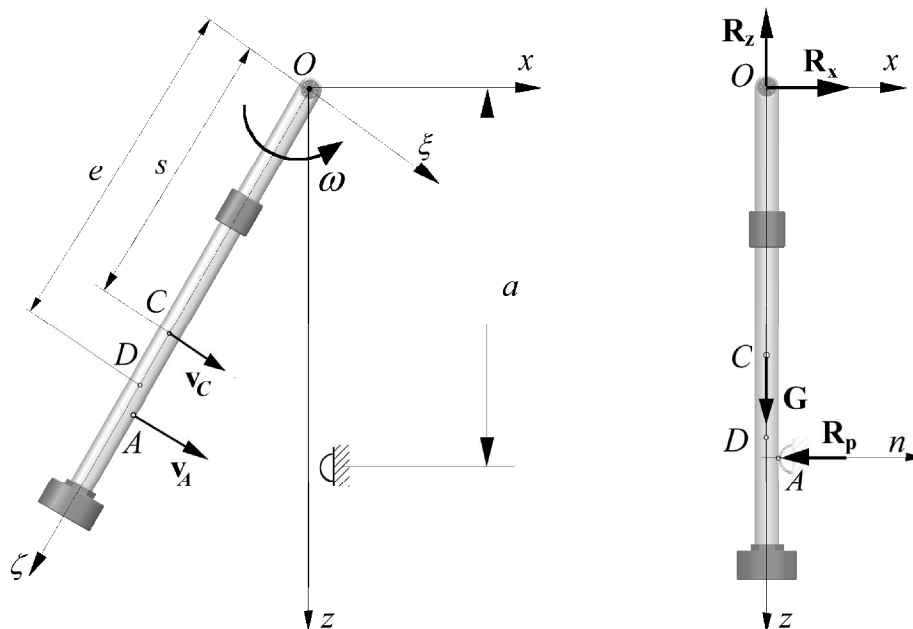
gdzie K_x, K_h, K_z oznaczają rzuty wektora krętu na osie xhz (sztywno związane z poruszającym się ciałem), a $\dot{\mathbf{i}}, \dot{\mathbf{j}}, \dot{\mathbf{k}}$ są wersorami tych osi. Rzuty wektora krętu na osie prostokątnego (prawoskrętnego) układu współrzędnych xhz wyznacza się z zależności:

$$\begin{aligned} K_x &= J_x \omega_x - J_{xh} \omega_h - J_{xv} \omega_v, \\ K_h &= J_h \omega_h - J_{hv} \omega_v - J_{hx} \omega_x, \\ K_v &= J_v \omega_v - J_{vx} \omega_x - J_{vh} \omega_h. \end{aligned} \quad (6.3)$$

W przypadku gdy ciało obraca się wokół nieruchomej osi – pokrywającej się z osią h – to wektor prędkości kątowej $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ ma tylko jedną składową różną od zera $\dot{\boldsymbol{\omega}} = \dot{\mathbf{j}}\omega_h$, ($\omega_x = \omega_v = 0$). Jeśli ponadto momenty dewiacyjne J_{xh} i J_{vh} są równe zeru, co ma miejsce wówczas, gdy płaszczyzna xz jest płaszczyzną symetrii ciała, to kręt $\dot{\mathbf{K}}_O$ jest określony jako

$$\dot{\mathbf{K}}_O = \dot{\mathbf{j}}K_h = \dot{\mathbf{j}}J_h \omega_h = J_h \dot{\boldsymbol{\omega}}. \quad (6.4)$$

(Ponieważ oś h pokrywa się z osią y , to $\omega_h \equiv \omega_y = \omega$ oraz $J_h \equiv J_y$.)



Rys. 6.1. Uderzenie mimośrodowe ciała nieswobodnego w nieruchomą przeszkodę:

a) układy współrzędnych i wymiary,

b) siły działające na ciało w czasie uderzenia

6.3.2. Zmiana pędu i krętu rozpatrywanego modelu

Całkując obie strony równania (6.1) w granicach od t do $t+Dt$ otrzymuje się zależność:

$$\Delta \mathbf{Q}_O = \mathbf{Q}_O(t + \Delta t) - \mathbf{Q}_O(t) = \int_t^{t+\Delta t} \mathbf{P} dt, \quad (6.5)$$

$$\Delta \mathbf{K}_O = \mathbf{K}_O(t + \Delta t) - \mathbf{K}_O(t) = \int_t^{t+\Delta t} \mathbf{M}_O dt, \quad (6.6)$$

które określają przyrosty wektorów pędu i krętu układu.

W położeniu, w którym ciało zderza się z przeszkodą równania (6.5)–(6.6) można przedstawić w postaci skalarnej jako:

$$\begin{aligned} mv_{cx}'' - mv_{cx}' &= S - S_p, \\ J_y w'' - J_y w' &= -S_p a. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Wprowadzone zostały następujące oznaczenia:

- $v_{cx}'' = v_{cx}(t + \Delta t)$; $v_{cx}' = v_{cx}(t)$ – rzuty prędkości środka masy ciała na oś x tuż po uderzeniu (w chwili $t+Dt$) i tuż przed uderzeniem (w chwili t),
- $w'' = w(t + \Delta t)$; $w' = w(t)$ – prędkość kątowna ciała tuż po uderzeniu i tuż przed uderzeniem,
- $S = \int_t^{t+\Delta t} R_x dt$ – impuls siły R_x działającej nałożyska w czasie uderzenia,
- $S_p = \int_t^{t+\Delta t} R_p dt$ – impuls reakcji podpory R_p .

6.3.3. Wyznaczenie impulsu reakcjiłożysk i reakcji podpory

Dodatkowe równania, konieczne do wyznaczenia wielkości impulsów sił powstających podczas uderzenia, to:

- hipoteza Newtona, która pozwala na określenie współczynnika restytucji (k) przy uderzeniu w nieruchomą podporę jako

$$k = -\frac{v_A'' - 0}{v_A' - 0}, \quad (6.8)$$

- zależności kinematyczne:

$$v_{cx}' = w' s, \quad v_{cx}'' = w'' s, \quad (6.9)$$

$$v_{Ax}' = w' a, \quad v_{Ax}'' = w'' a \quad (6.10)$$

(v_{Ax}' , v_{Ax}'' oznaczają rzuty wektora prędkości punktu A przed uderzeniem i po uderzeniu na oś x).

Po rozwiązaniu równań (6.7)–(6.10) otrzymuje się zależności określające impuls reakcjiłożysk

$$S = (1 + k) m w' \left(\frac{J_y}{ma} - s \right), \quad (6.11)$$

i impuls reakcji oddziaływania podpory na uderzające w nią ciało

$$S_p = (1 + k) \frac{J_y w'}{a}. \quad (6.12)$$

6.3.4. Środek uderzenia

Impuls reakcji łożysk (S) jest równy zero wtedy, gdy we wzorze (6.11) wyrażenie $\left(\frac{J_y}{ma} - s\right)$ jest równe zero.

Oznaczając symbolem e taką odległość a ($a = e$), dla której

$$\frac{J_y}{me} - s = 0, \quad (6.13)$$

można wyznaczyć odległość podpory $a = e$, dla której impuls reakcji łożysk jest równy zero. Odległość ta określa położenie środka uderzenia (np. punktu D na rys. 6.1). Ze wzoru (6.13) wynika, że odległość środka uderzenia od osi obrotu jest równa

$$e = \frac{J_y}{ms}. \quad (6.14)$$

Należy podkreślić, że wzór (6.14) jest słuszny przy następujących założeniach: oś obrotu jest prostopadła do płaszczyzny symetrii ciała, normalna uderzenia leży w tej płaszczyźnie i jest prostopadła do prostej OC .

6.3.5. Wyznaczenie współczynnika restytucji

Współczynnik restytucji jest wyznaczany na podstawie hipotezy Newtona, to znaczy z zależności

$$k = -\frac{v''_{Ax}}{v'_{Ax}} = \frac{-w''a}{w'a} = \frac{-w''}{w'}. \quad (6.15)$$

Prędkość w' oznacza prędkość kątową ciała uderzającego w chwili uderzenia (tuż przed uderzeniem). Można ją wyznaczyć wykorzystując twierdzenie o przyroście energii kinetycznej

$$\frac{1}{2} J_y (w')^2 - 0 = mgs(1 - \cos a_1), \quad (6.16)$$

gdzie założono, że w położeniu początkowym określonym kątem a_1 prędkość ciała nieswobodnego jest równa zero.

W podobny sposób można wyznaczyć prędkość w'' . Rozpatrując zmianę energii kinetycznej w chwili tuż po uderzeniu i w chwili, gdy ciało osiąga najwyższe wychylenie (określone kątem a_2) otrzymuje się

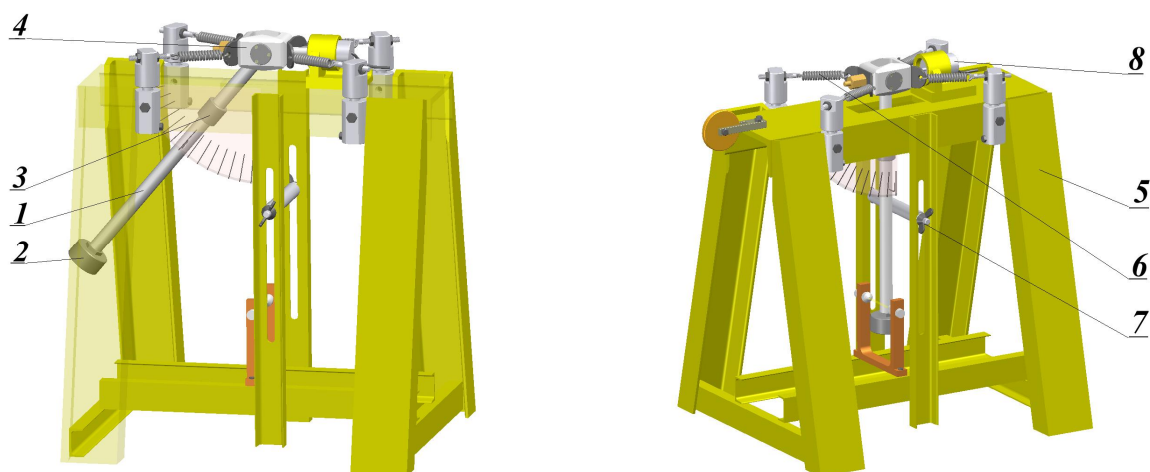
$$0 - \frac{1}{2} J_y (w'')^2 = -mgs(1 - \cos a_2). \quad (6.17)$$

Po rozwiązaniu równań (6.15)–(6.17) zależność określającą współczynnik restytucji dla znanych kątów a_1 i a_2 można przedstawić w formie

$$k = \sqrt{\frac{1 - \cos a_2}{1 - \cos a_1}}. \quad (6.18)$$

6.4. Opis stanowiska badawczego

Widok stanowiska do badań jest przedstawiony na rys. 6.2.



Rys. 6.2. Stanowisko badawcze

Użyte podczas doświadczenia ciało nieswobodne składa się z pręta (1) o przekroju kołowym, na końcu którego jest zamocowany walec (2) oraz tulei (3), która może być mocowana w dowolnym położeniu na pręcie. Ciało może się obracać względem osi łożysk umieszczonych w lekkiej oprawie (4). Oprawa łożysk jest połączona z ramą (5) za pomocą czterech sprężyn (6) o jednakowej sztywności. Przeszkoda (7) umieszczona jest w prowadnicach umożliwiającą zmianę jej położenia względem osi obrotu pręta.

6.4.1. Urządzenia pomiarowe

Podstawową wielkością mierzoną w czasie uderzenia jest wypadkowa sił reakcji łożysk (spowodowanych siłami powstającymi w momencie uderzenia). Pomiar jest dokonywany pośrednio – poprzez wyznaczenie przemieszczenia oprawy łożysk. Dokonuje się go przy użyciu indukcyjnego czujnika przemieszczeń (8), którego sygnał podawany jest na wejście oscyloskopu (lub komputera). Na podstawie obrazu czasowego przebiegu reakcji jest wyznaczany impuls reakcji łożysk.

6.5. Przebieg pomiarów

6.5.1. Wyznaczanie współczynnika restytucji

W celu wyznaczenia współczynnika restytucji (k) należy dokonać kilku pomiarów kąta wychylecia ciała przed i po uderzeniu.

Sposób przeprowadzenia pomiarów współczynnika restytucji:

1. Ustawić poprzeczkę w okolicy jej **górnego** skrajnego położenia, dobrze ją dokręcić i zanotować odległość a w tabeli 6.1.
2. Wychylić pręt o kąt α_1 (zanotować jego wartość w tabeli 6.1), a następnie puścić swobodnie.
3. Obserwować ruch ciała po uderzeniu w przeszkodę i zmierzyć maksymalny kąt (α_2), o jaki wychyliło się ono po odbiciu się od przeszkody. Wartość kąta zapisać w odpowiedniej rubryce tabeli 6.1.
Pomiary wykonać trzykrotnie.
4. Przesunąć poprzeczkę w okolice **dolnego** skrajnego położenia i powtórzyć opisane poprzednio czynności.

Tabela 6.1. Wyniki pomiarów współczynnika restytucji (k)

Numer pomiaru	Położenie przeszkody	Początkowy kąt wychylenia ciała	Kąt wychylenia ciała po odbiciu	Współczynnik restytucji wzór (6.18)	Wartość średnia
i	a	α_{1i}	α_{2i}	k_i	k
[-]	[mm]	[°]	[°]	[-]	[-]
1					
2					
3					
4					
5					
6					

6.5.2. Określenie wartości impulsu reakcji łożysk

Wyznaczenie impulsu (S) reakcji łożysk sprowadza się do rejestracji przebiegu zmian reakcji łożysk (R_x)

w czasie uderzenia, a następnie obliczenia całki $\int_t^{t+\Delta t} R_x dt = S$.

W tym celu należy:

1. Włączyć zasilacz czujnika przemieszczeń i oscyloskop (lub komputer).
2. Zamocować przeszkodę w okolicach jej **górnego** skrajnego położenia.
3. Wychylić pręt o kąt α_1 (około 40°), a następnie puścić swobodnie.
4. Zarejestrować (na oscyloskopie lub w komputerze) przebieg wartości reakcji (R_x) w funkcji czasu.
5. Otrzymany obraz przenieść na folię (ewentualnie wydrukować).
6. Za pomocą planimetru wyznaczyć pole obszaru wyznaczonego między krzywą przebiegu siły (R_x) a osią odciętych (t).
7. Uwzględniając skale osi rzędnych (wartości reakcji R_x) oraz osi odciętych (czas) wyznaczyć impuls siły reakcji (S).

Powyższe czynności wykonać **trzykrotnie**.

Tabela 6.2. Wyniki pomiarów i obliczeń wartości impulsu reakcji (S)

Nastawa podstawy czasu: $T = \dots\dots\dots ms / cm$

Nastawa wzmocnienia: $Z = \dots\dots\dots V / cm$

Stała czujnika przemieszczeń: $W = \dots\dots\dots mm / V$

Stała sprężyn: $C = \dots\dots\dots N / mm$

Numer pomiaru	Położenie przeszkody a [mm]	Początkowy kąt wychylenia α_1 [°]	Pole wykresu P [mm ²]	Impulsu reakcji S [N s]		
				eksperyment	wartość średnia	teoria wzór (6.11)
1						
2						
3						

6.5.3. Wyznaczanie położenia środka uderzenia

Doświadczalne wyznaczenie położenia środka uderzenia polega na zmianie położenia przeszkody i obserwacji zmian maksymalnej wartości reakcji łożysk w czasie uderzenia. Położenie podpory, w którym reakcje osiągają wartość zerową (bliską zera) określa położenie *środku uderzenia*.

Sposób przeprowadzenia pomiarów:

1. Zamocować przeszkodę w okolicach jej górnego skrajnego położenia.

2. Wychylić pręt o dowolny kąt (α_1) (zanotować jego wartość w tabeli 6.3), a następnie puścić go swobodnie.
 3. Zarejestrować (na oscyloskopie lub w komputerze) przebieg wartości reakcji (R_x) w funkcji czasu.
 4. Przesunąć przeszkodę w dół, wychylić pręt o taki sam kąt jak poprzednio i zarejestrować przebieg reakcji.
 5. Powyższą czynność powtarzać do momentu uzyskania płaskiego przebiegu zmian siły na ekranie i odczytać odległość przeszkody od osi obrotu. Wyniki pomiaru należy umieścić w odpowiedniej rubryce tabeli 6.3.
- Pomiary przeprowadzić dla **dwóch** różniących się znacznie kątów α_1 (np. 45° oraz 25°).

Tabela 6.3. Wyniki pomiarów i obliczeń odległości środka uderzenia (e)

Numer pomiaru	Początkowy kąt wychylenia ciała α_1 [°]	Odległość środka uderzenia e [mm]	
		eksperyment	teoria wzór (6.14)
1			
2			

6.6. Opracowanie wyników pomiarów i sprawozdanie

6.6.1. Obliczenia pomocnicze

Dla porównania rezultatów otrzymanych z pomiarów z wynikami obliczeń teoretycznych wyznaczana jest teoretyczna wartość impulsu reakcji łożysk. W tym celu należy najpierw obliczyć prędkość kątową ciała przed uderzeniem na podstawie zależności otrzymanej ze wzoru (6.16) – to jest

$$w' = \sqrt{\frac{2mgs(1 - \cos \alpha_1)}{J_y}}, \quad (6.19)$$

następnie, korzystając z zależności (6.11) o postaci

$$S = (1 + k) m w' \left(\frac{J_y}{ma} - s \right)$$

należy obliczyć wartość impuls reakcji łożysk (S) i zapisać ją w odpowiedniej rubryce tabeli 6.2.

Teoretyczną wartość odległości środka uderzenia od osi obrotu wyznacza się z zależności (6.14), to znaczy

$$e = \frac{J_y}{ms}.$$

Dane liczbowe do obliczeń:

- masa ciała nieswobodnego $m = 1,37 \text{ kg}$,
- moment bezwładności ciała względem osi obrotu $J_y = 0,1036 \text{ kg m}^2$,
- odległość środka ciężkości od osi obrotu $s = 255 \text{ mm}$,
- współczynnik restytucji k - wartość wyznaczona z pomiarów (przeprowadzonych dla takiego położenia przeszkody (a), dla którego wyznaczany jest impuls reakcji).

6.6.2. Sprawozdanie

W sprawozdaniu należy zamieścić:

- a) temat i cel ćwiczenia,
- b) wykres przebiegu czasowego reakcji w łożyskach otrzymany z pomiarów,
- c) obliczenia pomocnicze,
- d) wypełnione tabele 6.1, 6.2 i 6.3,
- e) obserwacje i wnioski.

6.7. Pytania sprawdzające

1. Na czym polega hipoteza Newtona?
2. Co to jest współczynnik restytucji?
3. Podać definicję impulsu siły?
4. Co oznacza termin „uderzenie mimośrodowe ciał”?
5. Co to jest środek uderzenia?