

Ćwiczenie 2

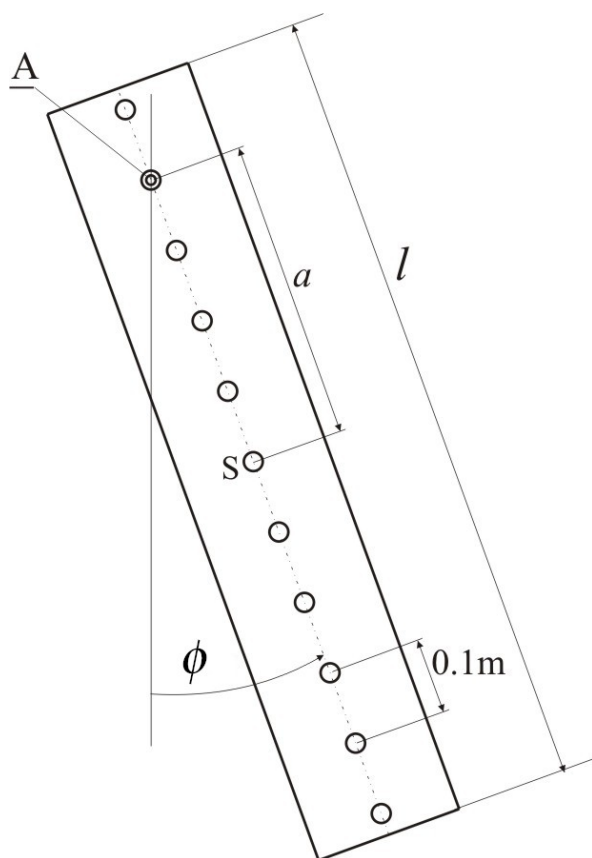
Wyznaczanie minimalnego okresu drgań swobodnych wahadła fizycznego.

Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest określenie, takiego położenia osi obrotu wahadła fizycznego, dla którego okres drgań swobodnych tego wahadła jest najkrótszy.

Opis stanowiska

Przedmiotem rozważań jest wahadło fizyczne mające postać jednorodnego pręta o długości $l=1.03$ m, mogące wykonywać ruch wahliwy wokół osi obrotu A. Wahadło zostało przedstawione na Rysunku 1.



Rysunek 1

Na podstawie dynamicznego równania ruchu obrotowego bryły (równania równowagi momentów sił względem osi obrotu, z uwzględnieniem momentu siły bezwładności) można sformułować następujące równanie ruchu wahadła:

$$B_A \ddot{\phi} + mga \phi = 0 \quad (1)$$

gdzie:

B_A moment bezwładności względem osi obrotu,

m masa,

g przyspieszenie ziemskie,

a odległość pomiędzy osią przechodzącą przez środek masy S a osią obrotu,

ϕ kąt obrotu.

Okres drgań swobodnych tego wahadła wynosi:

$$T_A = 2\pi \sqrt{\frac{B_A}{mga}}. \quad (2)$$

Czy wiesz jak rozwiązać równanie (1) i wyprowadzić wzór (2)???

W myśl twierdzenia Steinera o momentach bezwładności bryły względem osi równoległych

$$B_A = B_S + ma^2 \quad (3)$$

gdzie:

B_S – moment bezwładności względem osi przechodzącej przez środek masy.

Moment B_S jest stały i w przypadku analizowanego wahadła, mającego postać jednorodnego pręta, wyraża się wzorem

$$B_S = \frac{ml^2}{12} \quad (4)$$

Podstawiając równanie (3) do równania (2) otrzymuje się następujący wzór na okres drgań wahadła:

$$T_A(a) = 2\pi \sqrt{\frac{B_S + ma^2}{mga}} = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{l^2}{12} + a^2}{ga}} \quad (5)$$

Jak zaznaczono, okresowi drgań można nadać postać funkcji, której argumentem jest odległość a pomiędzy osią obrotu a osią przechodzącą przez środek masy.

Łatwo stwierdzić, że gdy odległość a maleje do zera (oś obrotu zbliża się do środka masy), okres drgań rośnie do nieskończoności: licznik wyrażenia pod pierwiastkiem dąży do stałej wartości B_S a mianownik dąży do zera.

Podobnie łatwo stwierdzić, że gdy odległość a rośnie do nieskończoności (oś obrotu oddala się do środka masy na nieograniczoną odległość wielokrotnie większą niż l), okres drgań także rośnie do nieskończoności: pochodna licznika wyrażenia pod pierwiastkiem ($2ma$) dąży do nieskończoności a pochodna mianownika jest stała (mg). Powstaje pytanie, dla jakiej wartości argumentu a funkcja (5) osiąga wartość ekstremalną i ile ta wartość wynosi.

Dla znalezienia odpowiedzi należy zróżniczkować (5) po zmiennej a , otrzymując:

$$\frac{dT_A(a)}{da} = \frac{2\pi}{2\sqrt{\frac{B_S + ma^2}{mga}}} \frac{2m^2 a^2 g - (B_S + ma^2)mg}{m^2 g^2 a^2} = \frac{\pi \left(a^2 - \frac{l^2}{12} \right)}{\sqrt{\frac{gl^2 a^3}{12} + ga^5}} \quad (6)$$

Łatwo zauważyć, że funkcja ta osiąga wartość zero dla

$$\frac{dT_A(a)}{da} = 0 \Rightarrow a = \frac{l}{\sqrt{12}} \quad (7)$$

i jest to jedyne ekstremum – logika podpowiada, że jest to minimum. Okres drgań T_A jest najkrótszy dla odległości a równej długości wahadła podzielonej przez pierwiastek z liczby 12. Podstawiając tę wartość do (5), można obliczyć

$$T_{A \min} = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{ml^2}{12} + m \frac{l^2}{12}}{mg \frac{l}{\sqrt{12}}}} = 2\pi \sqrt{\frac{\sqrt{12} l}{6g}} \quad (8)$$

Należy sprawdzić, czy istotnie dla wartości a wyrażonej przez (7), funkcja (5) osiąga ekstremum minimum a nie maksimum. W tym celu, różniczkując (6) określmy drugą pochodną okresu T_A po odległości a :

$$\frac{d^2 T_A(a)}{da^2} = \pi \frac{2a \sqrt{\frac{gl^2 a^3}{12} + ga^5} - \left(a^2 - \frac{l^2}{12}\right) \frac{5ga^4 + \frac{3gl^2 a^2}{12}}{2 \sqrt{\frac{gl^2 a^3}{12} + ga^5}}}{\frac{gl^2 a^3}{12} + ga^5} \quad (9)$$

Wzór wygląda PRZERAŻAJĄCO – każdy to widzi; ale: dla $a = \frac{l}{\sqrt{12}}$ wyrażenie w nawiasie w liczniku jest równe zeru, zatem drugi składnik licznika jest równy zeru. Pierwszy składnik jest dodatni, mianownik jest dodatni, czyli

$$a = \frac{l}{\sqrt{12}} \Rightarrow \frac{d^2 T_A(a)}{da^2} > 0 \quad \text{zatem istotnie dla tej wartości } a \text{ okres jest minimalny!!!}$$

Przebieg ćwiczenia:

Określić czas trwania 20 okresów ruchu wahadła zawieszonego kolejno za pomocą pięciu otworów odległych od środka masy o 0.50, 0.40, 0.30, 0.20 i 0.10 metra. Dzieląc ten czas przez 20 określić okresy drgań T_A w funkcji a .

Za pomocą wzoru (5) obliczyć T_A dla różnych wartości a podanych w tabeli.

Narysować teoretyczny wykres $T_A(a)$. Nanieść wyniki pomiarów.

No i co – podobne???? Właśnie przewidywaniu zachowania układów rzeczywistych służą takie obliczenia...

Imię i Nazwisko:.....

Grupa:..... Ocena:.....

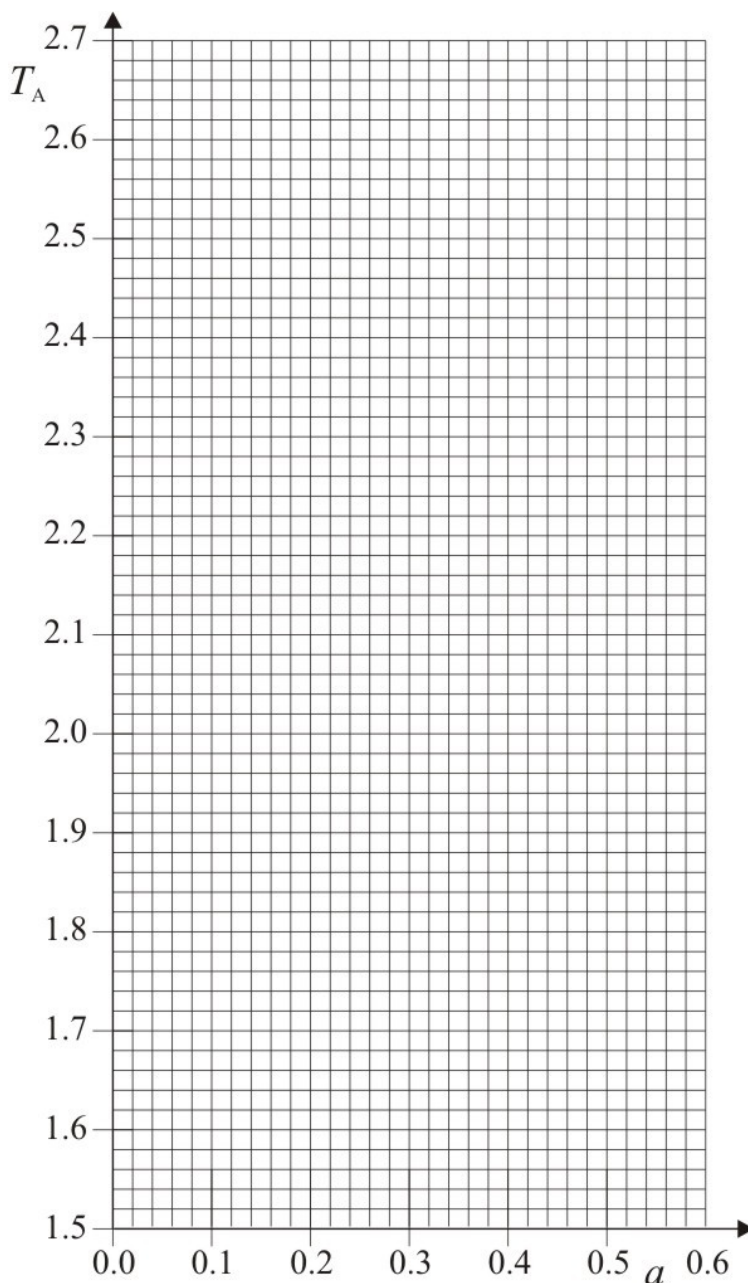
Sprawozdanie z ćwiczenia 2
Wyznaczanie minimalnego okresu drgań swobodnych wahadła fizycznego.

Wyniki pomiarów:

a	$20T_A$	T_A
0.10		
0.20		
0.30		
0.40		
0.50		

Wyniki obliczeń

a	T_A
0.05	
0.10	
0.15	
0.20	
0.25	
0.30	
0.35	
0.40	
0.45	
0.50	
0.55	
0.60	



Wzór do obliczania okresu drgań:

$$T_A(a) = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{l^2}{12} + a^2}{ga}}, \quad l = 1.03 \text{ m}, \quad g = 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$