

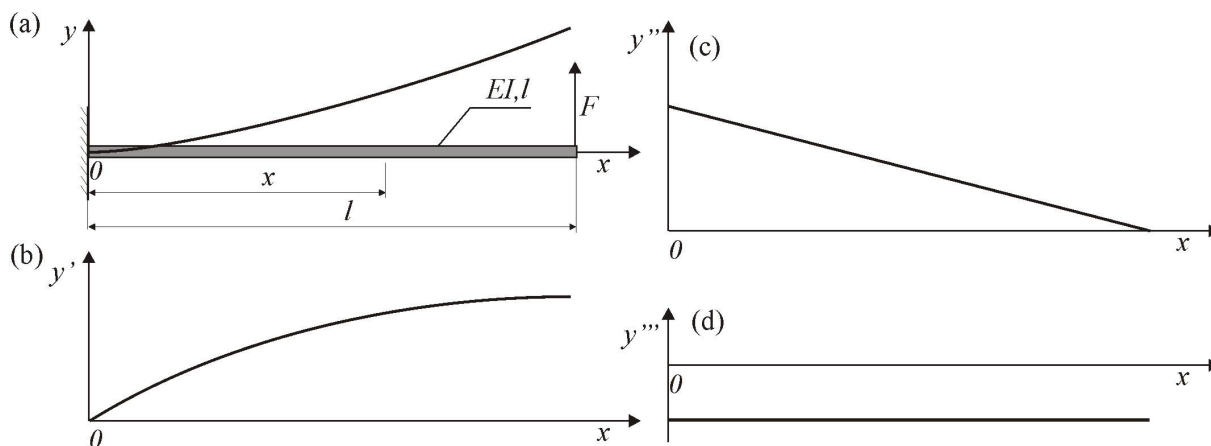
Ćwiczenie 4

Prędkości krytyczne wirującego wału o masie rozłożonej w sposób ciągły

Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest określenie wartości prędkości krytycznych wirującego wału oraz obserwacja postaci głównych drgań.

Wprowadzenie



Rysunek 1.

Zacznijmy od przypomnienia pewnych faktów z dziedziny wytrzymałości materiałów. Na rysunku 1a przedstawiono belkę wspornikową o sztywności EI i długości l , obciążoną na swobodnym końcu siłą poprzeczną F . Potrafimy napisać równanie różniczkowe opisujące zależność pomiędzy drugą pochodną ugięcia belki a momentem gnącym:

$$EIy''(x) = F(l - x) \quad (1)$$

Liniową zależność y'' od współrzędnej x pokazuje rysunek 1c. Po scałkowaniu równania (1) otrzymuje się funkcję określającą kąt ugięcia belki y' :

$$EIy'(x) = F\left(lx - \frac{x^2}{2}\right). \quad (2)$$

Paraboliczną zależność y' od współrzędnej x pokazuje rysunek 1b. Po scałkowaniu równania (2) otrzymuje się funkcję określającą ugięcie belki y :

$$EIy(x) = F\left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right). \quad (3)$$

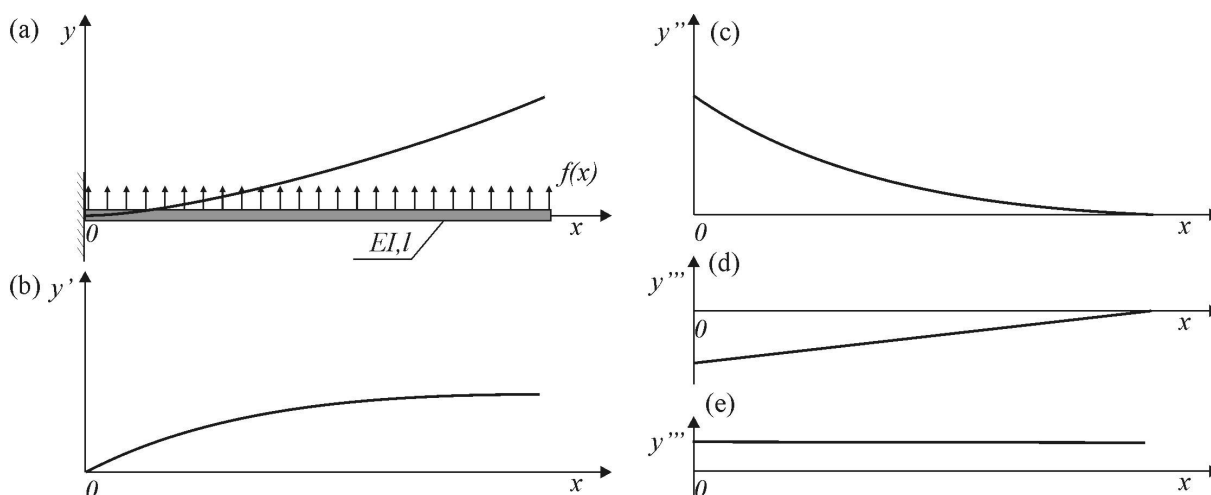
Zależność (krzywa trzeciego stopnia) y od współrzędnej x pokazuje rysunek 1a. To są podstawowe wiadomości znane z wytrzymałości materiałów. Wróćmy do równania (1). Po zróźniczkowaniu równania (1) otrzymuje się funkcję określającą siłę tnącą w belce:

$$EIy'''(x) = -F. \quad (4)$$

Siła tnąca pokazana jest na rysunku 1d.

Należy zauważyć, że zapisanie równań (1) – (4) możliwe było dzięki temu, że obciążenie belki jest znane, a w szczególności, że jest niezależne od ugięcia belki $y(x)$.

Kolejny przykład:



Rysunek 2.

Na rysunku 2a przedstawiono belkę wspornikową o sztywności EI i długości l , obciążoną na całej długości stałym obciążeniem ciągłym o intensywności $f(x)$ (N/m !). Potrafimy napisać równanie różniczkowe opisujące zależność pomiędzy drugą pochodną ugięcia belki a momentem gnącym:

$$EIy''(x) = f(x) \frac{(l-x)^2}{2} \quad (5)$$

Paraboliczną zależność y'' od współrzędnej x pokazuje rysunek 2c. Po scałkowaniu równania (5) otrzymuje się funkcję określającą kąt ugięcia belki y' :

$$EIy'(x) = f(x) \left(\frac{l^2x}{2} - \frac{lx^2}{2} + \frac{x^3}{6} \right). \quad (6)$$

Zależność y' od współrzędnej x pokazuje rysunek 2b. Po scałkowaniu równania (6) otrzymuje się funkcję określającą ugięcie belki y :

$$EIy(x) = f(x) \left(\frac{l^2x^2}{4} - \frac{lx^3}{6} + \frac{x^4}{24} \right). \quad (7)$$

Zależność (krzywa czwartego stopnia) y od współrzędnej x pokazuje rysunek 2a. To są także podstawowe wiadomości znane z wytrzymałości materiałów.

Wróćmy do równania (5). Po jego zróżniczkowaniu otrzymuje się funkcję określającą siłę tnącą w belce:

$$EIy'''(x) = -f(x)(l-x) \quad (8)$$

Siła tnąca przedstawiona jest na rysunku 2d

Wreszcie, po zróżniczkowaniu równania (8), otrzymuje się funkcję określającą intensywność obciążenia ciągłego:

$$EIy''''(x) = f(x) \quad (9)$$

Należy zauważyć, że zapisanie równań (5) – (9) możliwe było także tylko dzięki temu, że obciążenie belki jest znane, a w szczególności, że jest niezależne od ugięcia belki $y(x)$.

Układ, który jest przedmiotem ćwiczenia, to wirująca belka przęsłowa, pokazana na rys. 3.



Wobec faktu, że belka przemieszcza się, funkcja y jest funkcją dwóch argumentów: położenia przekroju belki x oraz czasu t . Ponadto, obciążeniem ciągłym jest siła odśrodkowa bezwładności, której wartość zależy od przyspieszenia poszczególnych przekrojów belki. Nieznajomość funkcji $y(x,t)$, uniemożliwia zapisanie równania analogicznego do równania (5). Możliwe jest za to zapisanie równania analogicznego do (9), postaci:

$$EIy''''(x,t) = -\frac{m}{l}\ddot{y}(x,t) \quad (10)$$

gdzie:

m – masa belki,

l – długość belki.

Zależność intensywności obciążenia od przyspieszenia przekrojów belki uniemożliwia scałkowanie tego równania „wprost”. Rozwiązuje się je następująco:

Po zapisaniu równania w postaci

$$\ddot{y}(x,t) + q^2 y''''(x,t) = 0, \quad q^2 = \frac{EI}{m} \quad (11)$$

Przewiduje się jego rozwiązanie w postaci funkcji

$$y(x,t) = Y(x)T(t), \quad T(t) = a \cos \alpha t + b \sin \alpha t. \quad (12)$$

Tym samym zakłada się, że drgania są harmoniczne, lub są kombinacją liniową drgań harmoniczných (gdy jest wiele wartości α , dla których funkcja (12) spełnia równanie (11)).

Z (12) wynika

$$\begin{aligned} \ddot{y}(x,t) &= Y(x)\ddot{T}(t) = -\alpha^2 Y(x)T(t) \\ y''''(x,t) &= Y''''(x)T(t) \end{aligned} \quad (13)$$

Po podstawieniu (13) do (11), otrzymuje się

$$(-\alpha^2 Y(x) + q^2 Y''''(x))T(t) = 0 \quad (14)$$

skąd, wobec $T(t) \neq 0$

$$Y''''(x) = \eta^4 Y(x), \quad \eta^4 = \frac{\alpha^2}{q^2} = \frac{\alpha^2 m}{EI} \quad (15)$$

Równanie (15) jest spełnione przez następujące rozwiązania szczególne:

$$Y_1(x) = A \cos \eta x, Y_2(x) = B \sin \eta x, Y_3(x) = C \cosh \eta x, Y_4(x) = D \sinh \eta x \quad (16)$$

Wobec warunków brzegowych

$$Y(0) = 0, Y''(0) = 0, Y(l) = 0, Y''(l) = 0, \quad (17)$$

Otrzymuje się $A=C=D=0$ oraz $B \sin \eta l = 0$.

Stąd, wobec oczywistego warunku $B \neq 0$, wynika

$$\sin \eta l = 0 \quad (18)$$

a stąd:

$$\eta l = i\pi, \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

$$\eta^4 l^4 = i^4 \pi^4 = \frac{\alpha^2 l^4}{q^4} = \frac{\alpha^2 m l^4}{EI} \quad (19)$$

Z ostatniego równania otrzymuje się wzór określający wartości kolejnych częstości kołowych drgań swobodnych belki przęsłowej, poddanej działaniu odśrodkowej siły bezwładności:

$$\alpha_i = \frac{i^2 \pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (20)$$

Drgania harmoniczne zachodzące z poszczególnymi częstościami kołowymi, mają postać funkcji:

$$y(x, t) = B \sin\left(\frac{i\pi}{l} x\right) (a \cos(\alpha_i t) + b \sin(\alpha_i t)) \quad (21)$$

Przebieg ćwiczenia:

1. Obliczyć trzy pierwsze prędkości krytyczne wirującego wału, korzystając ze wzorów:

$$\alpha_1 = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m}} = \quad \alpha_2 = \frac{4\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m}} = \quad \alpha_3 = \frac{9\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m}} =$$

Wartości parametrów wału:

$$m = 0.22 \text{ kg} \quad l = 1.0 \text{ m} \quad d = 0.006 \text{ m} \quad E = 0.2 \times 10^{12} \text{ N/m}^2$$

$$I = \frac{\pi d^4}{64} =$$

2. Dokonać obserwacji postaci głównych drgań odpowiadających tym prędkościom.

Imię i Nazwisko:.....

Grupa:..... Ocena:.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Sprawozdanie z ćwiczenia 4

Prędkości krytyczne wirującego wału o masie rozłożonej w sposób ciągły

Wartości parametrów wału:

$$m = 0.22 \text{ kg} \quad l = 1.0 \text{ m} \quad d = 0.006 \text{ m} \quad E = 0.2 \times 10^{12} \text{ N/m}^2$$

$$I = \frac{\pi d^4}{64} =$$

Trzy pierwsze prędkości krytyczne wirującego wału:

$$\alpha_1 = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m}} =$$

$$\alpha_2 = \frac{4\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m}} =$$

$$\alpha_3 = \frac{9\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m}} =$$