TMM-2
Analiza kinematyki manipulatora metodą analityczną

Celem ćwiczenia jest zapoznanie się ze sposobem analizy kinematyki mechanizmu korbowo-tłokowego oraz wyznaczanie położenia, prędkości i przyspieszenia chwytaka przykładowego manipulatora metodą analityczną.

1. Podstawy teoretyczne

W metodzie analitycznej analizy kinematyki mechanizmu uzyskujemy algebraiczne zależności między parametrami określającymi położenia i tory ruchu punktów lub członów oraz ich prędkościami i przyspieszeniami. W ramach ćwiczenia posłużymy się metodą wieloboków wektorowych.
Założenia metody to:
- dowolny mechanizm jako zamknięty łańcuch kinematyczny można przedstawić w formie zamkniętego wieloboku wektorowego, którego wektory określają chwilowe położenie jego członów. Wektory odpowiadają ogniwom mechanizmu.
- wektorom przyporządkowywane są zwroty oraz kąty ich orientacji w kartezjańskim układzie współrzędnych przy czym przez kąt, jaki tworzy wektor z osią rozumiemy zawsze dodatni kąt, o który należy obrócić oś tak aby jej dodatni zwrot pokrył się z dodatnim zwrotem wektora. Wszystkie kąty wieloboku wektorowego traktujemy więc jako kąty skierowane.

Każdy mechanizm złożony jest z co najmniej jednego ogniwa napędowego oraz grupy ogniw pędzonych. Na ogniwach tych budowane są wieloboki wektorowe. Wieloboki wektorowe ponieważ ogniwom mechanizmu przypisujemy odpowiednio zorientowane wektory. Początki i końce wektorów wieloboku zaczepione są w węzłach kinematycznych mechanizmu. Pierwszy wielobok wektorowy zawiera ogniwo napędowe i ogniwa pędzone pierwszej grupy strukturalnej. Kolejne wieloboki budowane są na ogniwach kolejnych grup strukturalnych, jeśli takie w mechanizmie istnieją. Tak tworzone wieloboki wektorowe definiują położenie ogniw mechanizmu.

Zalety metody:
- w oparciu o raz uzyskane równania kinematyki istnieje możliwość analizowania zmienności badanych parametrów kinematycznych mechanizmu oraz wpływu różnych wielkości (np. wymiary ogniw, prędkości i przyspieszenia ogniwa napędowego) na kinematykę ruchu węzłów i ogniw mechanizmu. Dzięki temu raz uzyskane zależności kinematyczne pozwalają na dowolną analizę i syntezę mechanizmu.
- dokładność wynikająca z faktu, iż zależności kinematyczne uzyskiwane są wyłącznie na drodze algebraicznej.

Wadą jest pracochłonność związana ze żmudnymi matematycznymi wyprowadzeniami zależności kinematycznych.

Oznaczając przez l_i długość dowolnego wektora z n wektorowego wieloboku możemy zapisać równanie wieloboku wektorowego w postaci

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{l}_i = 0 \qquad (2.1)$$

przy czym w równaniu tym uwzględnimy poprzez znak +/- orientacje poszczególnych wektorów względem siebie. Równanie wieloboku wektorowego przedstawia położenia ogniw mechanizmu w zależności od położenia ogniwa napędowego, a więc i w funkcji czasu.

Równanie (2.1) możemy przedstawić w postaci rzutów wieloboku wektorowego na osie układu współrzędnych *XY*

$$\sum_{i=1}^{n} l_i^x = 0 \qquad \sum_{i=1}^{n} l_i^y = 0 \tag{2.2}$$

Równania (2.1) i (2.2) są równaniami położeń ogniw mechanizmu. Dzięki przyjętemu sposobowi odmierzania kątów położenia wektorów rzutowanie określone równaniem (2.2) wykonywane jest automatycznie zgodnie z zapisem

$$l_i^x = l_i \cos\alpha_i \qquad l_i^y = l_i \sin\alpha_i \tag{2.3}$$

gdzie α_i jest kątem położenia wektora *i* względem osi *X* układu współrzędnych.
Równanie (2.2) po podstawieniu (2.3) ma postać

$$\sum_{i=1}^{n} l_i \cos\alpha_i = 0 \qquad \sum_{i=1}^{n} l_i \sin\alpha_i = 0 \tag{2.4}$$

i stanowi układ równań algebraicznych, z których można wyznaczyć nieznane kąty α_i – w przypadku węzłów obrotowych i długości wektorów l_i - w przypadku węzłów postępowych.
Rozważając mechanizm, który składa się z większej ilości grup strukturalnych wymagane jest tworzenie dodatkowych wieloboków wektorowych, odpowiednio dla każdej grupy strukturalnej. Dzięki temu uzyskujemy dodatkowe równania położeń typu (2.4). Należy pamiętać, iż liczba równań rzutów (2.4) wszystkich wieloboków wektorowych utworzonych na ogniwach danego mechanizmu musi być równa liczbie nieznanych parametrów tychże wieloboków. W skład parametrów wchodzą zmienne kąty α_i oraz zmienne długości wektorów l_i z wyłączeniem parametrów związanych z ogniwami napędowymi.
Zagadnienie prędkości i przyspieszeń węzłów mechanizmu oraz ogniw związane jest z różniczkowaniem równań (2.2) względem czasu. Otrzymujemy wówczas odpowiednio

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{dl_i^x}{dt} = 0 \qquad \sum_{i=1}^{n} \frac{dl_i^y}{dt} = 0 \tag{2.5}$$

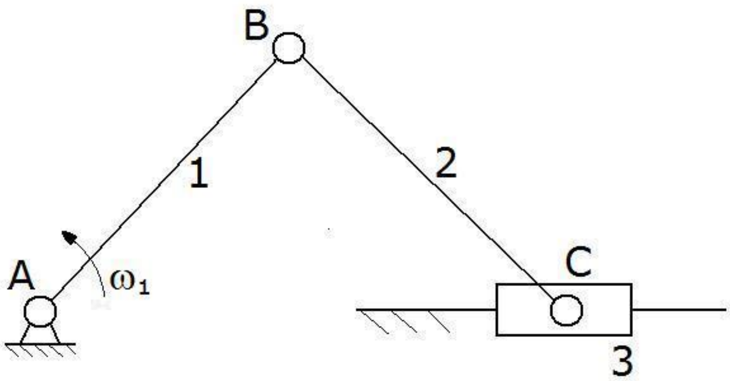
oraz

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{d^2 l_i^x}{dt^2} = 0 \qquad \sum_{i=1}^{n} \frac{dl_i^{2y}}{dt^2} = 0 \tag{2.6}$$

Równania (2.5) oraz (2.6) są układami równań algebraicznych, z których można wyznaczyć poszukiwane parametry prędkości i przyspieszeń węzłów i ogniw mechanizmu.

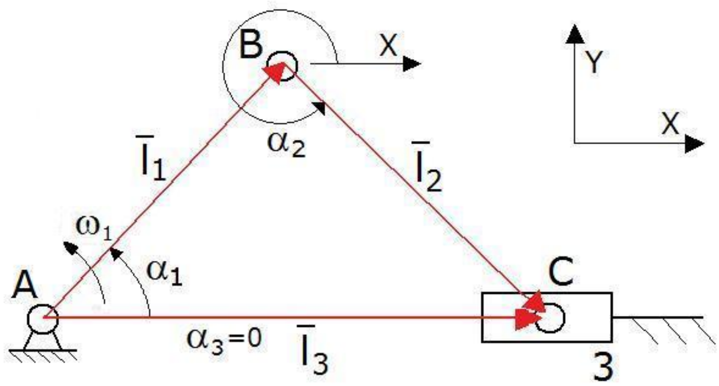
2. Analiza kinematyki mechanizmu korbowo-tłokowego

Mechanizm korbowo-tłokowy przedstawiono na Rys. 2.1. Ogniwem napędowym jest ogniwo 1. Należy wyznaczyć położenia, prędkości i przyspieszenia ogniw i węzłów kinematycznych mechanizmu. Zakładamy, iż dane są długości ogniw 1 i 2 - l_1, l_2 oraz prędkość kątowa i przyspieszenie kątowe korby - ω_1, ε_1.



Rys. 2.1. Schemat kinematyczny mechanizmu korbowo-tłokowego.

Mechanizm składa się z jednej grupy strukturalnej, a więc możliwe jest zbudowanie tylko jednego wieloboku wektorowego. Na Rys. 2.1 przedstawiono wielobok wektorowy mechanizmu korbowo-tłokowego. Widoczne są przyjęte wektory odpowiadające ogniwom mechanizmu oraz zorientowane kąty ich położeń określone w kartezjańskim układzie współrzędnych.



Rys. 2.2. Dobór wektorów oraz kątów ich położeń.

Zapis matematyczny przyjętego wieloboku wektorowego przyjmuje postać

$$\bar{l}_1 + \bar{l}_2 - \bar{l}_3 = 0 \tag{1}$$

Rzutujemy wektory wieloboku wektorowego (1) na osie układu współrzędnych XY

$$\begin{aligned} OX: &\quad l_1 \cos\alpha_1 + l_2 \cos\alpha_2 - l_3 \cos\alpha_3 = 0 \\ OY: &\quad l_1 \sin\alpha_1 + l_2 \sin\alpha_2 - l_3 \sin\alpha_3 = 0 \end{aligned} \tag{2}$$

Jak widać z Rys. 2.2 $\alpha_3 = 0$ (const), a więc równanie (2) przyjmuje postać

$$\begin{aligned} OX: &\quad l_1 \cos\alpha_1 + l_2 \cos\alpha_2 - l_3 = 0 \\ OY: &\quad l_1 \sin\alpha_1 + l_2 \sin\alpha_2 = 0 \end{aligned} \tag{3}$$

Z drugiego równania (3) mamy

$$\alpha_2 = \arcsin\left(-\frac{l_1 \sin\alpha_1}{l_2}\right) \tag{4}$$

Z pierwszego natomiast

$$l_3 = l_1 \cos\alpha_1 + l_2 \cos\alpha_2 \tag{5}$$

Różniczkując po czasie równanie (3), pamiętając iż wektory l_1 oraz l_2 mają stałe długości równe odpowiednio długościom ogniw *1* i *2* oraz, że

$$\frac{d\alpha_1}{dt} = \omega_1, \qquad \frac{d\alpha_2}{dt} = \omega_2, \qquad \frac{dl_3}{dt} = v_3 \tag{6}$$

otrzymujemy równania prędkości

$$\begin{aligned} -l_1\omega_1 \sin\alpha_1 - l_2\omega_2 \sin\alpha_2 - v_3 &= 0 \\ l_1\omega_1 \cos\alpha_1 + l_2\omega_2 \cos\alpha_2 &= 0 \end{aligned} \tag{7}$$

Z równania (7) w wyniku przekształceń matematycznych otrzymujemy

$$\omega_2 = -\frac{l_1\omega_1 \cos\alpha_1}{l_2 \cos\alpha_2} \qquad \cos\alpha_2 \neq 0 \tag{8}$$

$$v_3 = -l_1\omega_1 \sin\alpha_1 - l_2\omega_2 \sin\alpha_2 \tag{9}$$

Różniczkując po czasie równanie (7) otrzymujemy równania przyspieszeń

$$\begin{aligned} -l_1\omega_1^2 \cos\alpha_1 - l_1\varepsilon_1 \sin\alpha_1 - l_2\omega_2^2 \cos\alpha_2 - l_2\varepsilon_2 \sin\alpha_2 - p_3 &= 0 \\ -l_1\omega_1^2 \sin\alpha_1 + l_1\varepsilon_1 \cos\alpha_1 - l_2\omega_2^2 \sin\alpha_2 + l_2\varepsilon_2 \cos\alpha_2 &= 0 \end{aligned} \tag{10}$$

gdzie

$$\frac{d\omega_1}{dt} = \varepsilon_1, \qquad \frac{d\omega_2}{dt} = \varepsilon_2, \qquad \frac{dv_3}{dt} = p_3 \tag{11}$$

W wyniku przekształceń matematycznych równania (10) mamy

$$\varepsilon_2 = \frac{l_1(\omega_1^2 \sin\alpha_1 - \varepsilon_1 \cos\alpha_1) + l_2\omega_2^2 \sin\alpha_2}{l_2 \cos\alpha_2} \qquad \cos\alpha_2 \neq 0 \tag{12}$$

$$p_3 = -l_1(\omega_1^2 \cos\alpha_1 + \varepsilon_1 \sin\alpha_1) - l_2(\omega_2^2 \cos\alpha_2 + \varepsilon_2 \sin\alpha_2) \tag{13}$$

Równania (9) oraz (10) opisują prędkość i przyspieszenie liniowe suwaka mechanizmu korbowo-tłokowego.

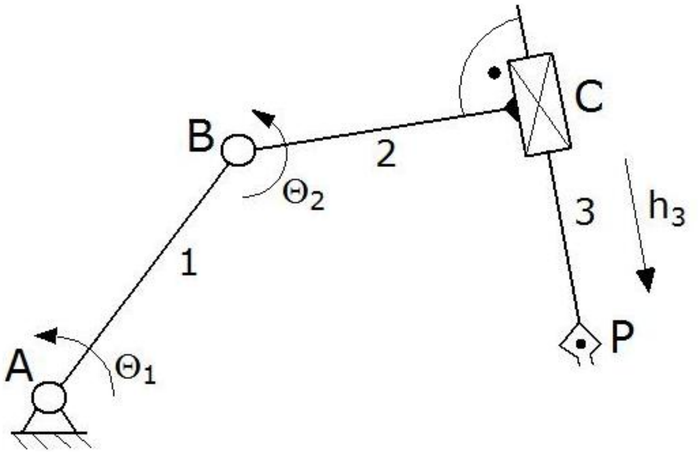
3. *Przebieg ćwiczenia*

Zadaniem studenta jest analiza kinematyki manipulatora trójczłonowego, Rys. 2.3 lub 2.4, metodą analityczną. Celem ostatecznym jest określenie położenia, prędkości i przyspieszenia chwytaka manipulatora w układzie współrzędnych podstawy manipulatora.

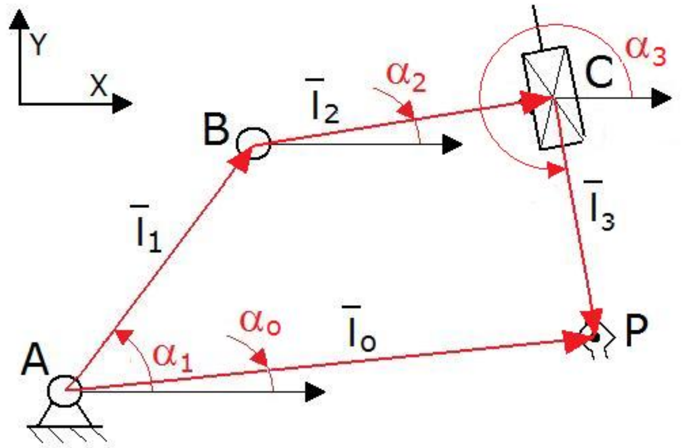
Dane są: długości ogniw l_{AB}, l_{BC}, współrzędne uogólnione Θ_1, Θ_2, h_3 oraz ich pochodne.

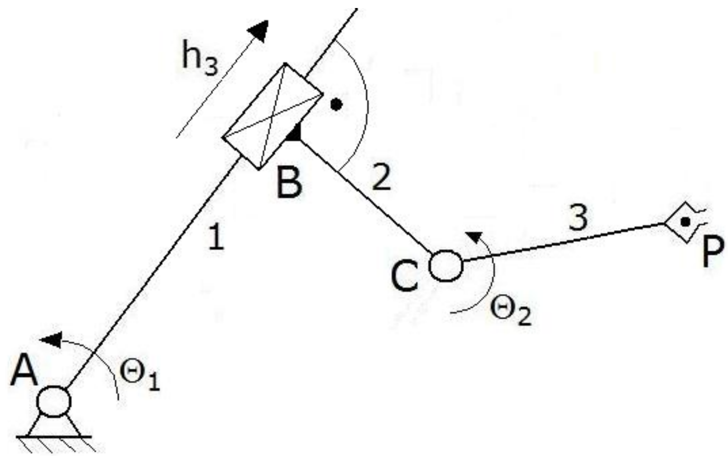
W ramach pracy studenta należy:

- zbudować wielobok wektorowy.
- zapisać równanie wektorowe wieloboku wektorowego (2.1).
- dokonać rzutowań wieloboku wektorowego na osie układu współrzędnych (2.2-2.4).
- wykonać różniczkowania równań położeń i prędkości
- wyznaczyć położenie, prędkość i przyspieszenie chwytaka manipulatora.
- wprowadzić otrzymane zależności kinematyczne do programu komputerowego.
- dokonać obserwacji ruchu mechanizmu.
- zmieniając wymiary geometryczne oraz prędkości i przyspieszenia współrzędnych uogólnionych podać wnioski z przeprowadzonych obserwacji numerycznych ruchu mechanizmu.



Rys. 2.3. Schemat manipulatora OOP.





Rys. 2.4. Schemat manipulatora OPO.

SPRAWOZDANIE Z LABORATORIUM TEORII MECHANIZMÓW
ćwiczenie TM-2

Dane studenta:

Grupa: Ocena:

Cel ćwiczenia:

Schemat manipulatora oraz rysunek wieloboku wektorowego.

Dane manipulatora:

Równanie wieloboku wektorowego (2.1):

Równania rzutów wieloboku wektorowego na osie *XY* układu współrzędnych (2.2-2.4):

Wyznaczenie parametrów położenia członów i węzłów kinematycznych manipulatora:

Różniczkowanie równań rzutów wieloboku wektorowego (2.5, 2.6):

Wyznaczenie prędkości i przyspieszeń ogniw i węzłów kinematycznych manipulatora:

Podanie zależności opisujących prędkość i przyspieszenie chwytaka manipulatora:

Wnioski wynikające z obserwacji ruchu mechanizmu (zmiany parametrów geometrycznych manipulatora)